

АНИЗОТРОПИЙНЫЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

Игорь Владимиров

Австралийский Национальный Университет



<https://arxiv.org/abs/1903.01692> (Anisotropy-based robust performance criteria for statistically uncertain linear continuous time invariant stochastic systems, 5 March 2019)

<https://vspu2019.ipu.ru/program> (19-У-А4 Стохастические системы 1: 19 июня 2019 г., 10.00–14.15)

13 октября 2020

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Робастное функционирование линейных стационарных стохастических систем непрерывного времени в смысле чувствительности их выходов к статистически неопределенным случайным процессам на входе.

Неопределенность как отклонение неточно известных вероятностных распределений входного возмущения от распределений стандартного винеровского процесса.

Отклонение от номинальной модели изотропного гауссовского белого шума в терминах средней анизотропии входа для дискретного аналога исходной системы, получаемого однопараметрическим семейством конформных отображений единичного круга комплексной плоскости на правую полуплоскость для передаточных функций в дискретном и непрерывном времени.

Параметр конформного соответствия как временной масштаб для фильтрованных версий входа и выхода системы, в терминах которых рассматривается наибольший среднеквадратический коэффициент усиления при ограничении сверху на среднюю анизотропию входа.

Вычисление в пространстве состояний получающегося двухпараметрического аналога анизотропийной нормы системы для случая непрерывного времени с использованием методов дискретной анизотропийной теории стохастического робастного управления и фильтрации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Рассматриваемые линейные стохастические системы

Рассматриваемые случайные возмущения

Пример формирующего фильтра без расширения пространства состояний

Фильтрованные процессы и передаточные функции

Среднеквадратический коэффициент усиления фильтрованных процессов

СКУ по отношению к изотропному гауссовскому белому шуму

Конформное соответствие между непрерывной и дискретной постановками

Сведение к СКУ дискретной системы

Анизотропийная формулировка статистической неопределенности и наихудший СКУ

Теоретико-энтропийная структура средней анизотропии

Двухпараметрическая анизотропийная норма непрерывной системы

Сложности непосредственного переноса анизотропийных конструкций на непрерывное время

Вычисление анизотропийной нормы непрерывной системы в пространстве состояний

Некоторые пояснения к доказательству

Пример расчета двухпараметрической анизотропийной нормы

Заключение

РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается устойчивая линейная стационарная система с входом W , состоянием X и выходом Z со значениями в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^p$, чья динамика параметризуется матрицами

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m},$$

причем A гурвицева.

Предполагается, что W , X , Z — процессы Ито относительно общего потока σ -алгебр на основном вероятностном пространстве, связанные линейными неупреждающими соотношениями:

$$X(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)A} B dW(\tau), \quad Z(t) = \int_{-\infty}^t f(t-\tau) dW(\tau) + f_0 W(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где

$$f(\tau) := C A^{-1} e^{\tau A} B, \quad \tau \geq 0 \quad (2)$$

— затухающая часть переходной характеристики системы* с импульсной характеристикой

$$f'(\tau) = C e^{\tau A} B, \quad \tau \geq 0,$$

и

$$f_0 := D - C A^{-1} B \quad (3)$$

— матрица статического усиления.

*в данном случае, линейная комбинация квазимногочленов времени, экспоненциально затухающих при $\tau \rightarrow +\infty$

Процессы X, Z в (1) подчиняются линейным стохастическим дифференциальным уравнениям (СДУ)

$$dX = AXdt + BdW, \quad dZ = CXdt + DdW. \quad (4)$$

Аналогично детерминированным линейным постановкам, состояние системы удовлетворяет

$$X(t) = e^{(t-s)A}X(s) + \int_s^t e^{(t-\tau)A}BdW(\tau), \quad t \geq s.$$

Если W — стандартный винеровский процесс в $\mathbb{R}^m$, то существование интегралов Ито в (1) обеспечивается квадратичной интегрируемостью подынтегральных функций времени, причем

$$\mathbf{E}\left(\left|\int_{-\infty}^t f(t-\tau)dW(\tau)\right|^2\right) = \int_0^{+\infty} \|f(\tau)\|_F^2 d\tau < +\infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

в силу изометрии Ито*, где $\mathbf{E}(\cdot)$ — математическое ожидание, и $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма матриц.

В этом случае, приращения W для произвольного временного отрезка $[a, b]$ обладают единственным ковариационным оператором:

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b \varphi(s)^T dW(s) \int_a^b \psi(t)^T dW(t)\right) = \int_a^b \varphi(t)^T \psi(t) dt, \quad \varphi, \psi \in L^2([a, b], \mathbb{R}^m). \quad (6)$$

Если W не является стандартным винеровским процессом, его ковариационный оператор имеет более сложную структуру, и равенства (5), (6) не выполняются.

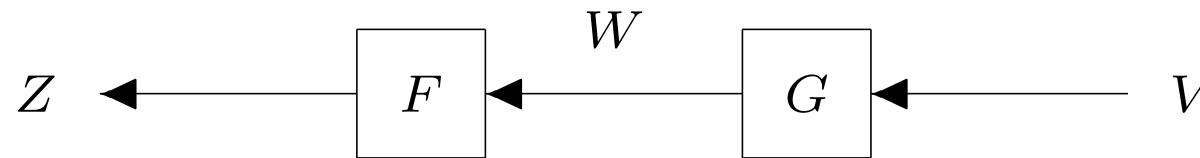
*И.И.Гихман, А.В.Скороход, Теория случайных процессов, в 3-х томах, М.: Наука, 1971

РАССМАТРИВАЕМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Предполагается, что W — процесс Ито относительно стандартного винеровского процесса V в $\mathbb{R}^{m*}$, получаемый на выходе неупреждающей линейной стационарной системы (формирующего фильтра):

$$W(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau) dV(\tau) + g_0 V(t) \quad (7)$$

с матрицей статического усиления $g_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и квадратично интегрируемой затухающей частью $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ переходной характеристики:



Рассматриваются формирующие фильтры G с представлением в пространстве состояний:

$$d\xi = \alpha \xi dt + \beta dV, \quad dW = c \xi dt + d dV, \quad (8)$$

где ξ — процесс Ито со значениями в $\mathbb{R}^\nu$ (размерность ν состояния ξ произвольна), и

$$\alpha \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}, \quad \beta \in \mathbb{R}^{\nu \times m}, \quad c \in \mathbb{R}^{m \times \nu}, \quad d \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

причем α гурвицева. В этом случае, как и в (2), (3), матрица статического усиления и затухающая часть переходной характеристики в (7) имеют вид

$$g_0 = d - c \alpha^{-1} \beta, \quad g(\tau) = c \alpha^{-1} e^{\tau \alpha} \beta, \quad \tau \geq 0.$$

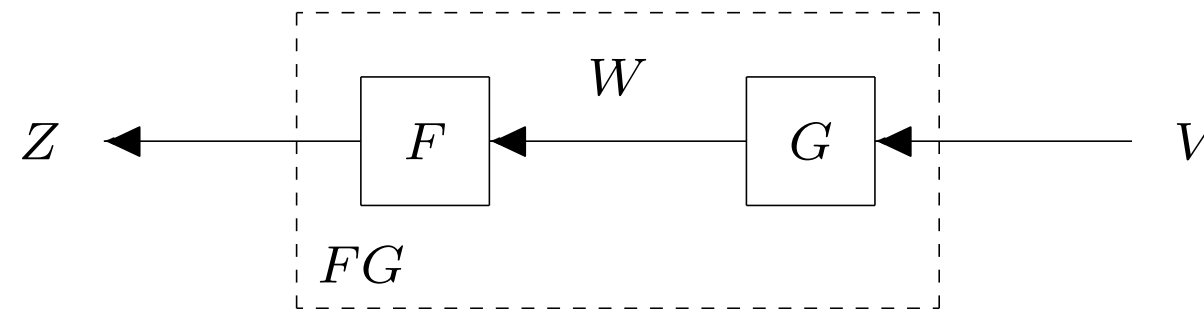
Снос $c\xi$ в (8) придает процессу W «временную окрашенность» (зависимость его приращений на непересекающихся интервалах времени), а (в общем случае недиагональная) диффузионная матрица dd^T делает его «пространственно коррелированным» (зависимость компонент процесса в один и тот же момент времени).

*а значит, таковы и состояние X и выход Z системы F со значениями в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^p$, движимые процессом W

Реализации системы F в (4) и формирующего фильтра G в (8) в пространстве состояний обозначаются

$$F \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad G \sim \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline c & d \end{array} \right].$$

Их последовательное соединение



— стационарная линейная стохастическая система с тем же (что у системы F) выходом Z , но со стандартным винеровским процессом V на входе и реализациями

$$FG \sim \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \beta \\ Bc & A & Bd \\ \hline Dc & C & Dd \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} A & Bc & Bd \\ 0 & \alpha & \beta \\ \hline C & Dc & Dd \end{array} \right] \quad (9)$$

с соответствующим из расширенных состояний

$$\begin{bmatrix} \xi \\ X \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X \\ \xi \end{bmatrix}.$$

Если формирующий фильтр G известен точно, то постановка с окрашенным шумом сводится к ситуации стандартного винеровского процесса на входе.* Окрашенность сама по себе не является источником статистической неопределенности.

Такая неопределенность возникает, если G неизвестен — тогда расширенная система FG приобретает внутреннюю неопределенность.

*путем объединения динамики системы F и внешнего возмущения W в расширенном пространстве состояний

ПРИМЕР ФОРМИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА БЕЗ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

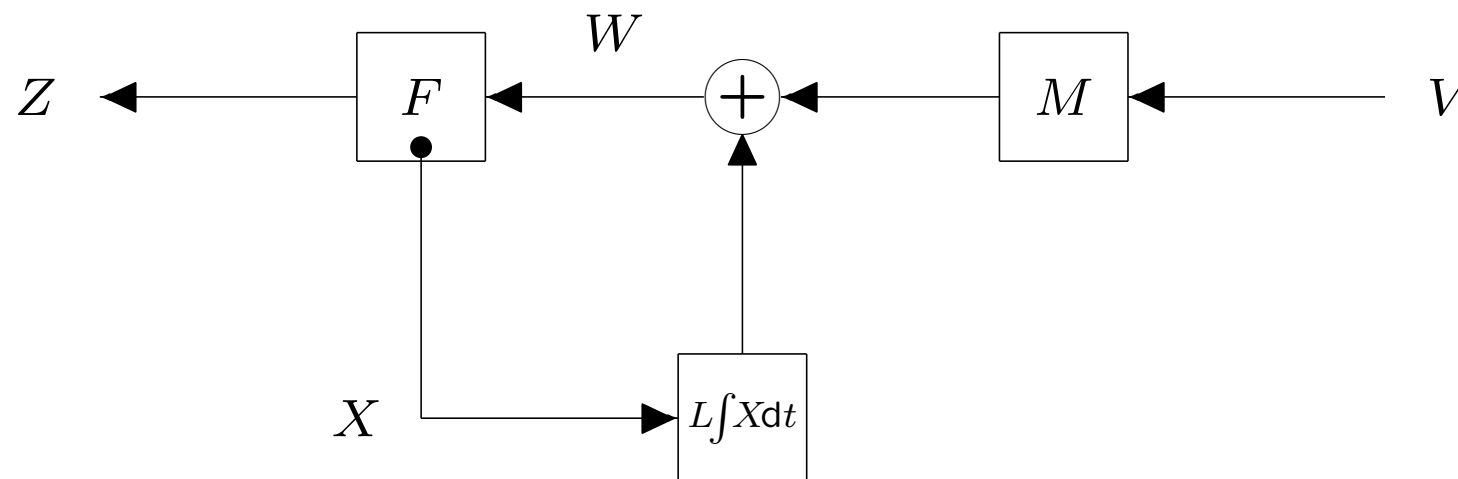
Расширение пространства состояний в FG происходит не всегда. Например, если формирующий фильтр G устроен в виде «паразитической» обратной связи

$$dW = LXdt + MdV$$

с матрицами $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, с помощью которой состояние X системы F поступает в снос LX возмущения W , то

$$FG \sim \left[\begin{array}{c|c} A + BL & BM \\ \hline C + DL & DM \end{array} \right].$$

В этом случае, система F и формирующий фильтр G имеют общее состояние X , делая реализации (9) избыточными.



Несмотря на специфичность, такова структура наиболее неблагоприятных случайных возмущений в рамках анизотропийного подхода к статистически неопределенным системам.

Это также демонстрирует «размытость» границ между внутренними неопределенностями в системе и неопределенностями в динамике внешнего возмущения.

ФИЛЬТРОВАННЫЕ ПРОЦЕССЫ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Однотипное представление входов и выходов в терминах стохастических дифференциалов облегчает рассмотрение последовательных соединений систем.

Однако, при таком представлении, ненулевые матрицы f_0 , g_0 статического усиления ведут к неограниченному росту дисперсий процессов W , Z со временем.

Более реалистичные (в смысле дисперсий) модели входов и выходов системы F и формирующего фильтра G — их фильтрованные аналоги, получаемые с помощью СДУ

$$dV_T = -\Omega V_T dt + \sqrt{2\Omega} dV, \quad (10)$$

$$dW_T = -\Omega W_T dt + \sqrt{2\Omega} dW, \quad (11)$$

$$dZ_T = -\Omega Z_T dt + \sqrt{2\Omega} dZ, \quad (12)$$

описывающих апериодическое инерционное звено первого порядка в роли фильтра низких частот с параметром $T > 0$ временного масштаба и частотой среза

$$\Omega := \frac{1}{T}. \quad (13)$$

При этом V_T , W_T , Z_T наследуют негладкость траекторий исходных процессов V , W , Z , но приближенно воспроизводят их относительно медленные компоненты (на частотах $\ll \Omega$, т.е. на временных масштабах $\gg T$).

Несмотря на отсутствие потраекторного сглаживания, фильтр низких частот обеспечивает асимптотическую стационарность процессов V_T, W_T, Z_T .

Будучи инициализированным в нулевом состоянии в бесконечно удаленном прошлом или с инвариантным гауссовским распределением в момент времени $t = 0$, СДУ (10) порождает процесс Орнштейна-Уленбека (ОУ) в $\mathbb{R}^m$ — стационарный гауссовский диффузионный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}(V_T(t)V_T(\tau)^T) = e^{-\Omega|t-\tau|}I_m, \quad t, \tau \in \mathbb{R},$$

так что дисперсия

$$\mathbf{E}(|V_T(t)|^2) = m$$

постоянна во времени, а T описывает корреляционное время процесса (характерное время затухания корреляций между значениями процесса в разнесенные моменты времени).

Поскольку мы будем интересоваться асимптотическим поведением устойчивой системы в бесконечно удаленном будущем*, СДУ (10)–(12) наделяются нулевыми начальными условиями:

$$V_T(0) = 0, \quad W_T(0) = 0, \quad Z_T(0) = 0.$$

*наступающем после затухания переходных процессов в системах в ответ на их начальные состояния

Асимптотические входо-выходные свойства системы (4) и формирующего фильтра (8) с гурвицевыми матрицами A , α удобно формулировать в терминах их передаточных функций

$$F(s) := C(sI_n - A)^{-1}B + D, \quad G(s) = c(sI_\nu - \alpha)^{-1}\beta + d, \quad (14)$$

аналитических в окрестности замкнутой правой комплексной полуплоскости

$$\mathbb{C}_+ := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq 0\}.$$

Как и в случае детерминированных линейных систем, при нулевых начальных условиях

$$X(0) = 0, \quad \xi(0) = 0,$$

передаточные функции F , G определяют линейные соотношения

$$\widehat{Z}(s) = F(s)\widehat{W}(s), \quad \widehat{W}(s) = G(s)\widehat{V}(s)$$

между преобразованиями Лапласа, примененными к приращениям входов и выходов:

$$\begin{aligned} \widehat{V}(s) &:= \int_0^{+\infty} e^{-st} dV(t), \\ \widehat{W}(s) &:= \int_0^{+\infty} e^{-st} dW(t), \\ \widehat{Z}(s) &:= \int_0^{+\infty} e^{-st} dZ(t), \end{aligned}$$

где интегралы Ито существуют при $\operatorname{Re} s > 0$.

Обычные преобразования Лапласа

$$\begin{aligned}\hat{V}_T(s) &:= \int_0^{+\infty} e^{-st} V_T(t) dt = \Phi(s) \hat{V}(s), \\ \hat{W}_T(s) &:= \int_0^{+\infty} e^{-st} W_T(t) dt = \Phi(s) \hat{W}(s), \\ \hat{Z}_T(s) &:= \int_0^{+\infty} e^{-st} Z_T(t) dt = \Phi(s) \hat{Z}(s)\end{aligned}$$

фильтрованных процессов V_T , W_T , Z_T в (10)–(12) связаны теми же передаточными функциями:

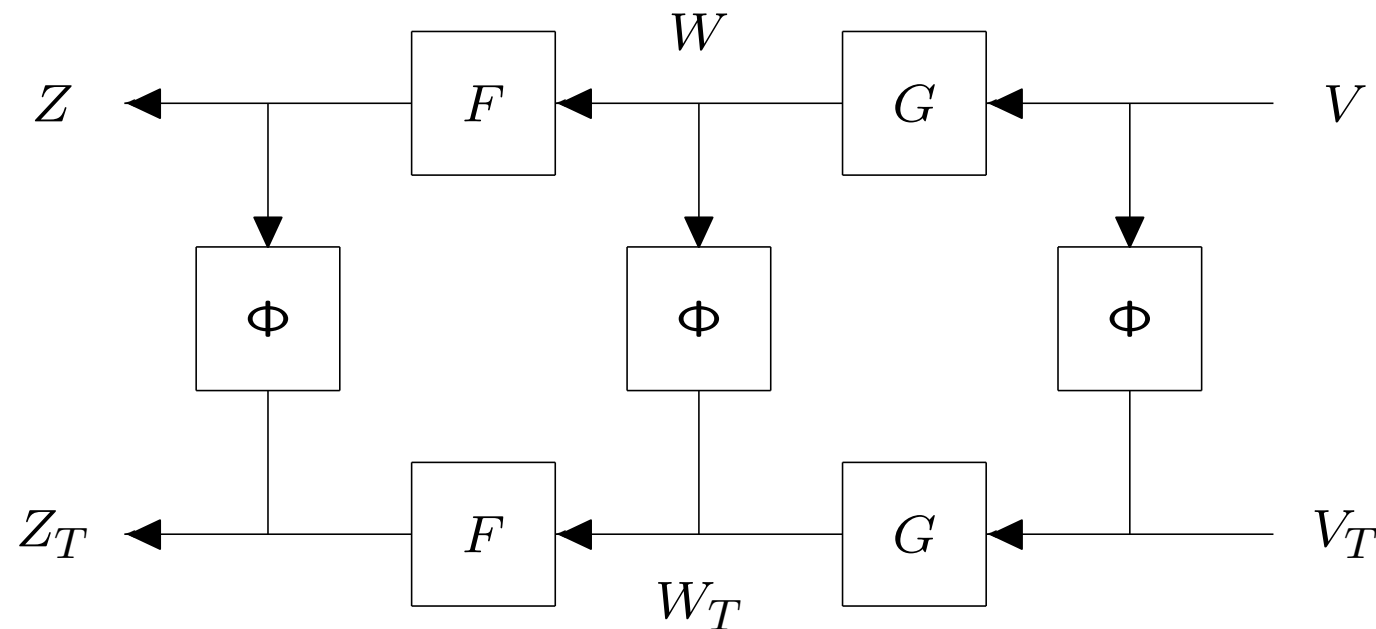
$$\begin{aligned}\hat{Z}_T(s) &= \Phi(s) F(s) \hat{W}(s) \\ &= F(s) \Phi(s) \hat{W}(s) = F(s) \hat{W}_T(s), \\ \hat{W}_T(s) &= \Phi(s) G(s) \hat{V}(s) \\ &= G(s) \Phi(s) \hat{V}(s) = G(s) \hat{V}_T(s),\end{aligned}$$

поскольку передаточная функция фильтра низких частот (с частотой среза Ω в (13))

$$\Phi(s) := \frac{\sqrt{2\Omega}}{s + \Omega} = \frac{\sqrt{2T}}{1 + Ts}, \quad (15)$$

благодаря своей скалярности, коммутирует с любой передаточной матрицей.

Фильтрованные процессы Z_T, W_T, V_T связаны теми же входо-выходными операторами F, G , что и Z, W, V :



Однако их динамика в пространстве состояний (нижняя часть диаграммы) описывается не СДУ Ито, но потраекторными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ)

$$\begin{aligned} \dot{X}_T &= AX_T + BW_T, & Z_T &= CX_T + DW_T, \\ \dot{\xi}_T &= \alpha\xi_T + \beta V_T, & W_T &= c\xi_T + dV_T, \end{aligned}$$

где $(\dot{})$ — производная по времени.

Состояния X_T, ξ_T — случайные процессы с непрерывно дифференцируемыми траекториями, связанные с исходными состояниями X, ξ (верхняя часть диаграммы) посредством ОДУ

$$\dot{X}_T = -\Omega X_T + \sqrt{2\Omega}X, \quad \dot{\xi}_T = -\Omega\xi_T + \sqrt{2\Omega}\xi,$$

где низкочастотный фильтр Φ (в обычной дифференциальной форме) действительно производит сглаживание.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ФИЛЬТРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ

Для заданного $T > 0$, СКУ системы F может быть определен в терминах фильтрованных входа и выхода W_T, Z_T в (11), (12) посредством*

$$\|F\| := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\int_0^t \mathbf{E}(|Z_T(\tau)|^2) d\tau}{\int_0^t \mathbf{E}(|W_T(\tau)|^2) d\tau}}, \quad (16)$$

где использовано отношение средних «энергий» этих процессов на временном отрезке $[0, t]$.

При нулевых начальных условиях и в силу неупреждающей структуры системы, фрагмент фильтрованного выхода

$$Z_T|_{[0,t]}$$

на отрезке $[0, t]$ связан ограниченным линейным оператором с соответствующим фрагментом фильтрованного входа

$$W_T|_{[0,t]}.$$

Процессы W_T, Z_T асимптотически стационарны и потому квадратично интегрируемы по времени лишь локально.

Было бы ошибкой рассматривать отношение их средних энергий на всей временной полуоси $\mathbb{R}_+$, потому что

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{E}(|W_T(\tau)|^2) d\tau = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \mathbf{E}(|Z_T(\tau)|^2) d\tau = +\infty.$$

*тривиальный случай нулевых входов не рассматривается

ТЕОРЕМА 1 Для устойчивых системы (4) и формирующего фильтра (8), СКУ (16) имеет место как предел

$$\|F\| = \sqrt{\frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(|Z_T(t)|^2)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(|W_T(t)|^2)}} = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) \langle \Lambda(\omega), S(\omega) \rangle d\omega}{\int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) \text{Tr} S(\omega) d\omega}}, \quad (17)$$

где функция Σ связана с (15) и задает спектральную плотность ΣI_m процесса ОУ V_T в $\mathbb{R}^m$:

$$\Sigma(\omega) := |\Phi(i\omega)|^2 = \frac{2\Omega}{\Omega^2 + \omega^2} = \frac{2T}{1 + (\omega T)^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — фробениусово скалярное произведение матриц, и функции $\Lambda, S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_m^+$ (со значениями в множестве $\mathbb{H}_m^+$ неотрицательно определенных эрмитовых матриц порядка m) связаны с передаточными функциями (14):*

$$\Lambda(\omega) := F(i\omega)^* F(i\omega), \quad S(\omega) := G(i\omega) G(i\omega)^*. \quad (19)$$

■

СКУ $\|F\|$ в (17) является полунормой передаточной функции F и корректно определен для любой ограниченной (не обязательно интегрируемой) спектральной плотности S .

Это обеспечивается присутствием интегрируемой функции Σ из (18) в качестве множителя в подынтегральных выражениях. Зависимость СКУ от S будет указываться нижним индексом:

$$\|F\| = \|F\|_S.$$

Величина $\|F\|_S$ инвариантна относительно масштабирования спектральной плотности $S \mapsto \kappa S$ с произвольной константой $\kappa > 0$ (она сокращается в числителе и знаменателе в (17)):

$$\|F\|_{\kappa S} = \|F\|_S.$$

* S — спектральная плотность входного возмущения W , нулевые S исключены из рассмотрения

Если система F изометрична с точностью до мультипликативной константы, т.е. функция Λ в (19) удовлетворяет $\Lambda(\omega) = \lambda I_m$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$ и некоторой константы $\lambda > 0$, то СКУ сводится к

$$\|F\|_S = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) \langle \lambda I_m, S(\omega) \rangle d\omega}{\int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) \text{Tr} S(\omega) d\omega}} = \sqrt{\lambda} \quad (20)$$

и не зависит от спектральной плотности S . Такие системы F называются «сферическими» (а остальные системы — «несферическими»).

В общем случае, неравенства

$$\lambda_{\min}(L) \text{Tr} M \leq \langle L, M \rangle \leq \lambda_{\max}(L) \text{Tr} M$$

для эрмитовых матриц L, M при условии $M \succcurlyeq 0$ ведут к

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\min}(\Lambda(\omega))} \leq \|F\|_S \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(\Lambda(\omega))} = \|F\|_{\infty}, \quad (21)$$

где правая часть — $\mathcal{H}_{\infty}$ -норма передаточной функции, так что (20) — частный случай (21).

Если размерности входа и выхода удовлетворяют $p < m$, то $\det \Lambda(\omega) = 0$ в (19) на любой частоте $\omega \in \mathbb{R}$, и левая часть (21) обращается в нуль.

При произвольных размерностях, величине $\|F\|_S$ доступно любое промежуточное значение в (21) путем надлежащего выбора спектральной плотности S .

ТЕОРЕМА 2 Для устойчивой системы (4), при любом μ , удовлетворяющем

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\min}(\Lambda(\omega))} \leq \mu \leq \|F\|_{\infty}$$

в (21), и любом $\epsilon > 0$, существует рациональная спектральная плотность S (связанная с некоторым устойчивым формирующим фильтром (8)), такая что

$$|\|F\|_S - \mu| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Из теоремы следует, что (при отсутствии специальных дополнительных ограничений на спектральную плотность S) верхняя граница в (21) не может быть улучшена:

$$\sup_S \|F\|_S = \|F\|_{\infty},$$

причем супремум можно сузить до класса рациональных спектральных плотностей S . Один из способов построения максимизирующей последовательности:

$$S_{\gamma}(\omega) := \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{1}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} u u^* + \frac{1}{\gamma^2 + (\omega + \omega_0)^2} \bar{u} u^T \right), \quad \gamma > 0, \quad u \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}. \quad (22)$$

В силу слабой сходимости* при $\gamma \rightarrow 0+$ распределения Коши с плотностью

$$\frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

к атомарной вероятностной мере, сосредоточенной в ω_0 (аналогично для $-\omega_0$), спектральная плотность (22), как регулярная обобщенная функция,[†] сходится к

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0+} S_{\gamma}(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) u u^* + \delta(\omega + \omega_0) \bar{u} u^T.$$

В качестве u используется собственный вектор матрицы $\Lambda(\omega_0)$, связанный с ее наибольшим собственным значением.

Такие спектральные плотности «концентрируют энергию» в окрестности определенных частот и в определенных направлениях в $\mathbb{C}^m$.

*П.Биллингсли, Сходимость вероятностных мер, М.: Наука, 1977

†В.С.Владимиров, Обобщенные функции в математической физике, М.: Наука, 1979

СКУ ПО ОТНОШЕНИЮ К ИЗОТРОПНОМУ ГАУССОВСКОМУ БЕЛОМУ ШУМУ

В случае изотропного белого шума, спектральная плотность W — постоянная скалярная матрица:

$$S(\omega) = \kappa I_m, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

где $\kappa > 0$ — скалярный параметр. В этом случае, с точностью до мультипликативной константы, W — стандартный винеровский процесс*, а его фильтрованная версия W_T — процесс ОУ.

СКУ системы принимает вид взвешенной $\mathcal{H}_2$ -нормы† передаточной функции F :

$$\begin{aligned} \|F\|_{\kappa I_m} &= \|F\|_{I_m} = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) \operatorname{Tr} \Lambda(\omega) d\omega}{m \int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) d\omega}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi m} \int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) \operatorname{Tr} \Lambda(\omega) d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi m} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Tr} \Lambda\left(\Omega \tan \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi}. \end{aligned} \quad (24)$$

Использованы $\int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) d\omega = 2\pi$ для функции Σ в (18) и следующее преобразование частоты:

$$\omega = \Omega \tan \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi := 2 \arctan(\omega T), \quad (25)$$

в силу чего,

$$\partial_{\omega} \varphi = \Sigma(\omega), \quad \Sigma(\omega) d\omega = d\varphi,$$

где новая переменная интегрирования φ принимает значения в интервале

$$\mathbb{T} := (-\pi, \pi), \quad (26)$$

отождествляемом с одномерным тором или единичной окружностью $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \setminus \{-1\}$ на комплексной плоскости, проколотой в -1 .

*и получается из V при $g = 0$, $g_0 = \sqrt{\kappa} I_m$ в (7)

†B.A.Francis, A Course in H^∞ -Control Theory, Springer, Berlin, 1987

При $T \rightarrow +\infty$ (т.е. $\Omega \rightarrow 0+$), процесс ОУ W_T становится все более коррелированным, и спектральная плотность $\Sigma(\omega)$ в (18) (как регулярная обобщенная функция) сходится к $2\pi\delta(\omega)$. Такой процесс действует на систему по существу как постоянный вход. Предел

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \|F\|_{I_m} = \lim_{\Omega \rightarrow 0+} \|F\|_{I_m} = \sqrt{\frac{1}{m} \text{Tr} \Lambda(0)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|f_0\|_F, \quad (27)$$

получаемый применением к СКУ (24) теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, использует матрицу статического усиления $f_0 = F(0)$ системы ввиду (3), (14).

Аналогично, когда время корреляции T процесса ОУ W_T на входе стремится к нулю (т.е. $\Omega \rightarrow +\infty$), спектральная плотность (18) становится практически постоянной ($\Sigma(\omega) \approx 2T$) в расширяющемся частотном диапазоне $|\omega| \ll \Omega$, и СКУ (24) сходится к

$$\lim_{T \rightarrow 0+} \|F\|_{I_m} = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \|F\|_{I_m} = \sqrt{\frac{1}{m} \text{Tr} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Lambda(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|D\|_F. \quad (28)$$

Пределы в (27), (28) не сводятся к обычной $\mathcal{H}_2$ -норме

$$\|F\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{Tr} \Lambda(\omega) d\omega}, \quad (29)$$

которая конечна лишь при $D = 0$. В последнем случае, предел (28) обращается в нуль, причем асимптотическое поведение СКУ имеет вид

$$\|F\|_{I_m} = \sqrt{\frac{T}{\pi m} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Tr} \Lambda(\omega)}{1 + (\omega T)^2} d\omega} \sim \|F\|_2 \sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad T \rightarrow 0+,$$

где использовано (18) в сочетании с предельным соотношением

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Tr} \Lambda(\omega)}{1 + (\omega T)^2} d\omega = 2\pi \|F\|_2^2,$$

вытекающим из (29) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Пределы (27), (28) в рассматриваемом случае изотропного белого шума проявляются, когда временной параметр T фильтра низких частот велик, или, соответственно, мал в сравнении с характерными временами переходных процессов в системе F , составляющими множество

$$\mathcal{T} := \left\{ \frac{1}{|\lambda|} : \lambda \in \mathfrak{S} \right\},$$

где $\mathfrak{S}$ — спектр гурвицевой матрицы A . Выполнение одного из условий

$$T \gg \max \mathcal{T} = \rho(A^{-1}), \quad T \ll \min \mathcal{T} = \frac{1}{\rho(A)} \quad (30)$$

($\rho(\cdot)$ — спектральный радиус) показывает является ли процесс ОУ W_T сильно коррелированным или почти белым для системы.

Относительная простота этого сравнения обусловлена тем, что этот процесс имеет лишь один временной параметр T (который определяет характерную ширину Ω эффективного частотного диапазона процесса ОУ), тогда как более сложные случайные входы могут обладать и несколькими масштабами времени, подобно самой системе F .

Рассмотренное поведение СКУ по отношению к изотропным белым шумам на входе качественно отличается от случая дискретного времени* несмотря на сходства в их определениях.

В дискретных постановках, частотный диапазон ограничен и может быть отождествлен с интервалом $\mathbb{T}$ в (26), тогда как процессы с непрерывным временем могут содержать произвольно быстрые составляющие (с произвольно малыми временными масштабами, т.е. высокими частотами) и иметь бесконечный частотный диапазон.

В то же время, последнее представление в (24) использует $\mathcal{H}_2$ -норму дискретной передаточной функции, связанной с (14) конформным соответствием, которое применимо не только в случае белого шума.

*И.Г.Владимиров, А.П.Курдюков, А.В.Семенов, Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем, Доклады Академии Наук, Т. 342 (1995), С. 583–585

КОНФОРМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ ПОСТАНОВКАМИ

Рассмотрим инволютивное конформное отображение (модифицированное преобразование Кэли)*

$$K(z) = \frac{1 - z}{1 + z} \quad (31)$$

между открытым единичным кругом и открытой правой полуплоскостью:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}.$$

Эти две области в $\mathbb{C}$ соответствуют постановкам с дискретным и непрерывным временем.

Отображение K — гладкая биекция единичной окружности, проколотой в -1 , на мнимую ось:

$$K(e^{i\varphi}) = -i \tan \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi \in \mathbb{T}. \quad (32)$$

Это свойство наследуется и масштабированным отображением ΩK при любом $\Omega > 0$. Конформное отображение ΩK задает линейный оператор Ψ , переводящий передаточные функции F , G системы и формирующего фильтра (14) в передаточные функции

$$F_T(z) := F(\Omega K(z)), \quad G_T(z) := G(\Omega K(z)), \quad (33)$$

аналитические в открытом единичном круге $|z| < 1$ и соответствующие устойчивым линейным дискретным системам.

С точностью до множителя 2 в ΩK , оператор Ψ — преобразование Тастина[†] линейной непрерывной системы в линейную дискретную систему и наоборот.[‡]

*Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, в 2-х томах, М.: Наука, 1976

[†]С.Bissel, A history of automatic control, Springer Handbook of Automation, S.Y.Nof (Ed.), 2009, Springer, pp. 53–69

[‡]будучи инволюцией, K совпадает со своим обратным отображением K^{-1}

ТЕОРЕМА 3 Для устойчивых системы (4) и формирующего фильтра (8), СКУ (17) допускает представление

$$\|F\|_S = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{T}} \langle \Lambda_T(\varphi), S_T(\varphi) \rangle d\varphi}{\int_{\mathbb{T}} \text{Tr} S_T(\varphi) d\varphi}}, \quad (34)$$

где функции $\Lambda_T, S_T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}_m^+$ связаны с F_T, G_T аналогично (19):

$$\Lambda_T(\varphi) := F_T(e^{i\varphi})^* F_T(e^{i\varphi}) = \Lambda\left(-\Omega \tan \frac{\varphi}{2}\right), \quad (35)$$

$$S_T(\varphi) := G_T(e^{i\varphi}) G_T(e^{i\varphi})^* = S\left(-\Omega \tan \frac{\varphi}{2}\right). \quad (36)$$

■

Правые равенства в (35), (36) вытекают из (32). Доказательство теоремы использует замену переменной интегрирования (25) и связь между спектральной плотностью Σ процесса ОУ в (18) и логарифмической производной конформного отображения K в (31):

$$i\partial_\omega \ln K(i\omega T) = -\frac{2T}{(i\omega T)^2 - 1} = \Sigma(\omega).$$

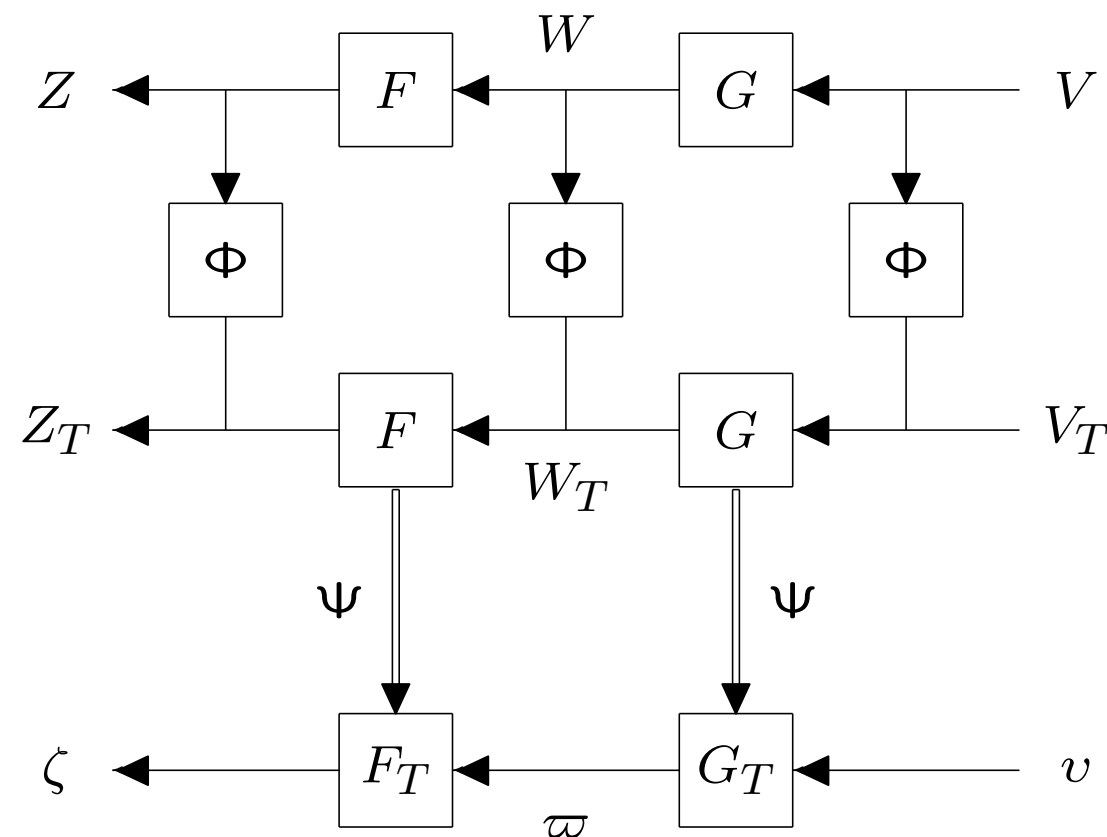
Функция S_T в (36) является спектральной плотностью некоторой стационарной гауссовской случайной последовательности $\varpi := (\varpi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ в $\mathbb{R}^m$ с нулевым средним, индексированной множеством целых чисел $\mathbb{Z}$. Ее элементы имеют постоянную дисперсию (в силу стационарности)

$$\mathbb{E}(|\varpi_k|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \text{Tr} S_T(\varphi) d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (37)$$

Последовательность ϖ — выход линейного дискретного формирующего фильтра с передаточной функцией G_T в (33), вход которого — последовательность гауссовского белого шума $v := (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ в $\mathbb{R}^m$ с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей:

$$\mathbf{E}v_k = 0, \quad \mathbf{E}(v_j v_k^T) = \delta_{jk} I_m, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (38)$$

В то же время, ϖ — вход линейной дискретной системы с передаточной функцией F_T в (33):



Выход системы F_T — стационарная гауссовская последовательность $\zeta := (\zeta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ в $\mathbb{R}^p$ с нулевым средним, спектральной плотностью

$$F_T(e^{i\varphi}) S_T(\varphi) F_T(e^{i\varphi})^*$$

и дисперсией

$$\mathbf{E}(|\zeta_k|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \langle \Lambda_T(\varphi), S_T(\varphi) \rangle d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (39)$$

СВЕДЕНИЕ К СКУ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

В силу (37), (39), СКУ (34) исходной непрерывной системы F совпадает с СКУ ее дискретного аналога F_T :

$$\|F\|_S = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{T}} \langle \Lambda_T(\varphi), S_T(\varphi) \rangle d\varphi}{\int_{\mathbb{T}} \text{Tr} S_T(\varphi) d\varphi}} = \sqrt{\frac{\mathbf{E}(|\zeta_0|^2)}{\mathbf{E}(|\varpi_0|^2)}} = \|F_T\|_{S_T}, \quad (40)$$

где, без потери общности, дисперсии в числителе и знаменателе взяты в начальный момент дискретного времени ввиду стационарности.*

Правая часть (40)[†] зависит от спектральной плотности S процесса W с непрерывным временем через ее дискретный аналог S_T в (36) и может быть вычислена для заданной S как в непрерывном, так и дискретном времени благодаря конформному соответствию между этими постановками (зависящему от параметра T).

Например, если W — стандартный винеровский процесс с точностью до мультипликативной константы (случай изотропного белого шума (23)), то спектральная плотность S_T в (36) является той же постоянной скалярной матрицей, а ϖ — последовательностью гауссовского белого шума с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. В этом случае, (40) принимает вид (24).

*в стационарном случае, излишне рассматривать чезаровские средние таких моментов, как дисперсии, вместо их постоянных значений

[†]которая является СКУ дискретной передаточной функции F_T по отношению к стационарным гауссовским случайным последовательностям ϖ с нулевым средним и спектральной плотностью S_T

АНИЗОТРОПИЙНАЯ ФОРМУЛИРОВКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И НАИХУДШИЙ СКУ

Если вход W системы F — статистически неопределенное случайное возмущение (получаемое на выходе неточно известного формирующего фильтра G), чья спектральная плотность S известна лишь с точностью до принадлежности некоторому классу $\mathcal{S}$, то представляет интерес наихудший СКУ системы

$$\|F\|_{\mathcal{S}} := \sup_{S \in \mathcal{S}} \|F\|_S. \quad (41)$$

Например, класс $\mathcal{S}$ может быть определен в терминах отклонения спектральной плотности S от постоянных скалярных матриц, каковой S была бы в модельном случае изотропного белого шума (23). Такое отклонение описывается, например, средней анизотропией* стационарной гауссовской последовательности ϖ в $\mathbb{R}^m$, принимающей, в силу (36), (37), вид

$$\begin{aligned} A_T(S) &:= \bar{A}(S_T) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m}{\mathbf{E}(|\varpi_0|^2)} \Gamma \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln \det \left(\frac{m}{\mathbf{E}(|\varpi_0|^2)} S_T(\varphi) \right) d\varphi \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \Sigma(\omega) \ln \det \left(\frac{2\pi m}{\int_{\mathbb{R}} \Sigma(\lambda) \text{Tr} S(\lambda) d\lambda} S(\omega) \right) d\omega \\ &= -\frac{T}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + (\omega T)^2} \ln \det \left(\frac{\pi m}{T \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Tr} S(\lambda)}{1 + (\lambda T)^2} d\lambda} S(\omega) \right) d\omega. \end{aligned} \quad (42)$$

Эта величина конечна и неотрицательна, если спектральная плотность S удовлетворяет

$$\int_{\mathbb{T}} \ln \det S_T(\varphi) d\varphi = 2T \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln \det S(\omega)}{1 + (\omega T)^2} d\omega > -\infty, \quad (43)$$

выполнение которого не зависит от выбора $T > 0$. Кроме того, $A_T(S)$ инвариантна относительно преобразований $S(\omega) \mapsto \lambda U(i\omega) S(\omega) U(i\omega)^*$ для любых $\lambda > 0$ и передаточных функций U систем полного пропускания (т.е. матрица $U(i\omega)$ унитарна на всех частотах $\omega \in \mathbb{R}$).

*И.Г.Владимиров, А.П.Курдюков, А.В.Семенов, Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем, Доклады Академии Наук, Т. 342 (1995), С. 583–585

Поскольку передаточная функция G_T в (33) принадлежит пространству Харди функций со значениями в $\mathbb{C}^{m \times m}$, аналитических в открытом единичном круге и квадратично интегрируемых на единичной окружности, то (43) равносильно тому, что $\det G_T(e^{i\varphi}) \neq 0$ для почти всех $\varphi \in \mathbb{T}$.

Эквивалентное условие внутренне-внешней факторизуемости* спектральной плотности S_T в (36) выражает отсутствие линейных связей между компонентами случайных векторов ϖ_k в один и тот же или разные моменты времени. Это связано с полной непредсказуемостью† таких последовательностей в смысле невырожденности условной ковариационной матрицы

$$\Gamma := \text{cov}(\varpi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \quad (44)$$

(неслучайной в рассматриваемом гауссовском случае) относительно предыстории $(\varpi_j)_{j < k}$ последовательности ϖ , где

$$\mathcal{F}_k := \sigma\{\varpi_k, \varpi_{k-1}, \varpi_{k-2}, \dots\}$$

— соответствующая σ -алгебра. Эта связь вытекает из соотношения Колмогорова-Сеге‡§

$$\ln \det \Gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N} \ln \det \text{cov}(\varpi_{0:N-1}) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln \det S_T(\varphi) d\varphi,$$

где

$$\varpi_{0:N-1} := (\varpi_k)_{0 \leq k < N} \quad (45)$$

— центрированный гауссовский случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^{mN}$, блоки ковариационной матрицы которого связаны со спектральной плотностью S_T :

$$\mathbf{E}(\varpi_j \varpi_k^T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{i(j-k)\varphi} S_T(\varphi) d\varphi.$$

*G.T.Wilson, The factorization of matricial spectral densities, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 23, no. 4, 1972, pp. 420–426

†Ю.А.Розанов, Стационарные случайные процессы, М.: Наука, 1990

‡А.Н.Колмогоров, Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1941, том 5, выпуск 1, 3–14

§U.Grenander, G.Szegö, Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press, Berkeley, Los-Angeles, 1958

ТЕОРЕТИКО-ЭНТРОПИЙНАЯ СТРУКТУРА СРЕДНЕЙ АНИЗОТРОПИИ

В применении к стационарной гауссовской последовательности ϖ со спектральной плотностью S_T , функционал средней анизотропии в (42) происходит из предельных теорем [ВКС1995, ВДК2006]

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{A_o(\mathcal{U}_N)}{N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{A(\varpi_{0:N-1})}{N} = \bar{A}(S_T).$$

Здесь изначальный «сферический» функционал анизотропии

$$A_o(\mathcal{U}_N) := D(\mathcal{U}_N \| U_{mN}) = \mathbf{E} \ln q_N(\mathcal{U}_N) = \int_{\mathbb{S}_{mN}} q_N(u) \ln q_N(u) U_{mN}(du)$$

— относительная энтропия Кульбака-Лейблера распределения единичного случайного вектора

$$\mathcal{U}_N := \frac{1}{|\varpi_{0:N-1}|} \varpi_{0:N-1}$$

с плотностью $q_N : \mathbb{S}_{mN} \rightarrow \mathbb{R}_+$ относительно равномерного распределения U_{mN} на единичной сфере $\mathbb{S}_{mN} := \{u \in \mathbb{R}^{mN} : |u| = 1\}$. Введенный позднее другой функционал анизотропии*

$$\begin{aligned} A(\varpi_{0:N-1}) &:= \min_{\lambda > 0} D(\varpi_{0:N-1} \| \mathcal{N}_{\lambda I_{mN}}) \\ &= \frac{mN}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{mN} \mathbf{E}(|\varpi_{0:N-1}|^2) \right) - h(\varpi_{0:N-1}) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m}{\mathbf{E}(|\varpi_0|^2)} \mathbf{E}(\varpi_{0:N-1} \varpi_{0:N-1}^T) \right) \end{aligned} \quad (46)$$

— минимальная относительная энтропия распределения случайного вектора $\varpi_{0:N-1}$ в (45) относительно изотропных гауссовских распределений $\mathcal{N}_{\lambda I_{mN}}$ в $\mathbb{R}^{mN}$ с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами λI_{mN} . Здесь $h(\cdot)$ — дифференциальная энтропия (относительно обычной лебеговой меры), вычисляемая явно для гауссовских случайных векторов.

*навеянный похожей (но одномерной) конструкцией из Н.-Р. Bernhard, A tight upper bound on the gain of linear and non-linear predictors for stationary stochastic processes, IEEE Trans. Sign. Proc., vol. 46, 1998, pp. 2909–2917

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЙНАЯ НОРМА НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ

Будучи всегда неотрицательной, средняя анизотропия $\mathbf{A}_T(S)$ в (42) обращается в нуль лишь если спектральная плотность S_T (а значит и S в силу (36)) — постоянная скалярная матрица, т.е. когда входное возмущение W — стандартный винеровский процесс с точностью до мультипликативной константы.

Как и для дискретного времени, это позволяет использовать $\mathbf{A}_T(S)$ (в качестве показателя отклонения входных возмущений от номинальной модели изотропного гауссовского белого шума) для одного из возможных способов описания класса неопределенности S в (41):

$$\mathcal{S}_{T,a} := \{S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m} : \mathbf{A}_T(S) \leq a\}. \quad (47)$$

Этот класс состоит из тех спектральных плотностей S входного процесса W , чьи дискретные аналоги S_T в (36) удовлетворяют ограничению сверху на среднюю анизотропию (42) соответствующей гауссовской стационарной последовательности ϖ с дисперсией (37). Поскольку $S \mapsto S_T$ — биекция, то наихудший СКУ (41), связанный с (47), принимает вид

$$\|F\|_{T,a} := \sup_{S \in \mathcal{S}_{T,a}} \|F\|_S = \sup_{S \in \mathcal{S}_{T,a}} \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{T}} \langle \Lambda_T(\varphi), S_T(\varphi) \rangle d\varphi}{\int_{\mathbb{T}} \text{Tr} S_T(\varphi) d\varphi}} = \|F_T\|_a \quad (48)$$

и совпадает с a -анизотропийной нормой дискретной системы F_T . Последняя норма (а значит и двухпараметрическая (T, a) -анизотропийная норма $\|F\|_{T,a}$ исходной линейной стохастической системы с непрерывным временем) допускает вычисление в пространстве состояний.

СЛОЖНОСТИ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ПЕРЕНОСА АНИЗОТРОПИЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ

Сказанное выше о функционалах анизотропии поясняет не только присутствие там логарифмов определителей матриц (возникающих из предельных теорем, в частности, для дифференциальной энтропии гауссовских распределений, а также асимптотических свойств спектров теплицевых форм), но и теоретико-информационную природу этих функционалов.

Последнее — благодаря связям относительной энтропии с шэнноновскими теоремами кодирования (например, о минимальной средней длине кодового слова для префиксных кодов при передаче случайного сообщения) и ролью дифференциальной энтропии как члена асимптотического разложения колмогоровской ϵ -энтропии* вероятностного распределения при $\epsilon \rightarrow 0+$.

В противном случае, анизотропийные конструкции были бы искусственными (и было бы непонятно, чем их специфическая структура выделяется на фоне других подходов к описанию статистической неопределенности).

Для постановок анизотропийной теории, исходящей из функционалов анизотропии, использующих конечномерные сферы и конечные фрагменты случайных последовательностей, существенна дискретность времени.

Равномерное распределение на сфере в конечномерном гильбертовом пространстве[†] не имеет аналога для бесконечномерной сферы (что связано с ее некомпактностью). Подобная непереносимость имеет место и для дифференциальной энтропии.

Нельзя переносить результаты с дискретного времени на непрерывное формальной заменой конечного частотного диапазона $\mathbb{T}$ на $\mathbb{R}$ уже потому, что в последнем случае, спектральная плотность S и $\ln \det S$ не являются одновременно интегрируемыми.

*И.М.Гельфанд, А.Н.Колмогоров, А.М.Яглом, Количество информации и энтропия для непрерывных распределений, Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 3, М.: АН СССР, 1958, С. 300–320

[†]как единственная с точностью до постоянного множителя мера Хаара, инвариантная относительно группы вращений

Тем не менее, энтропийные конструкции известны и для случайных процессов с непрерывным временем.

Например, в рамках динамики входного возмущения

$$dW = hdt + ddV \quad (49)$$

вида (8) (но с более общим сносом h) при $\det d \neq 0$, теорема Гирсанова* дает производную Радона-Никодима

$$Q(t) := e^{\int_0^t h(\tau)(dd^T)^{-1}dW(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^t |d^{-1}h(\tau)|^2 d\tau}, \quad t \geq 0, \quad (50)$$

вероятностного закона процесса W на временном отрезке $[0, t]$ относительно модельной вероятностной меры $\mathbf{P}_*$ (с математическим ожиданием $\mathbf{E}_*$), которая считает его винеровским процессом с той же диффузионной матрицей dd^T .

При выполнении условия Новикова

$$\mathbf{E}_* e^{\frac{1}{2} \int_0^t |d^{-1}h(\tau)|^2 d\tau} < +\infty,$$

процесс Q — мартингал с точки зрения $\mathbf{P}_*$.

Относительно же истинной вероятностной меры $\mathbf{P}$ (с математическим ожиданием $\mathbf{E}$), это не так, причем

$$\mathbf{E}Q(t) = \mathbf{E} e^{\int_0^t |d^{-1}h(\tau)|^2 d\tau}.$$

*И.В.Гирсанов, О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры, Теория вероятн. и ее примен., 5:3 (1960), 314–330

Представление (50) позволяет вычислить энтропию вероятностного распределения для W на отрезке времени $[0, t]$ относительно модельной меры:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(W|_{[0,t]} \| \mathbf{P}_*) &:= \mathbf{E} \ln Q(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{E}(|d^{-1}h(\tau)|^2) d\tau. \end{aligned} \quad (51)$$

То, что модельная мера $\mathbf{P}_*$ использует ту же диффузионную матрицу dd^T (предполагая отсутствие сноса) в динамике W , существенно для абсолютной непрерывности таких мер.

В общем случае, сингулярность относительно меры, которая считает W стандартным винеровским процессом (или винеровским процессом со скалярной диффузионной матрицей, отличающейся от dd^T и соответствующей изотропному гауссовскому белому шуму) не позволяет перенести (46) на непрерывное время.

Величина

$$\theta(\tau) = \frac{m}{\mathbf{E}(|d^{-1}h(\tau)|^2)}$$

в (51) качественно описывает локальный масштаб времени, на котором снос и мартингальная часть в (49) вносят в приращение процесса W сравнимый вклад (на уровне вторых моментов) ввиду соотношения

$$\mathbf{E}(|V(t) - V(\tau)|^2) = m|t - \tau|, \quad t, \tau \in \mathbb{R},$$

для стандартного винеровского процесса V в $\mathbb{R}^m$. Относительная энтропия

$$\mathbf{D}(W|_{[0,t]} \| \mathbf{P}_*) = \frac{m}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{\theta(\tau)}$$

становится большой, когда t существенно превышает это характерное время.

ВЫЧИСЛЕНИЕ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В силу соотношений (13), (14), (31), передаточная функция F_T в (33) принимает вид

$$F_T(z) = C \left(\Omega \frac{1-z}{1+z} I_n - A \right)^{-1} B + D = z C_T (I_n - z A_T)^{-1} B_T + D_T \quad (52)$$

(производящей функции импульсной характеристики с z -преобразованием $F_T(1/z)$) и отвечает дискретной системе

$$x_{k+1} = A_T x_k + B_T \varpi_k, \quad \zeta_k = C_T x_k + D_T \varpi_k \quad (53)$$

с последовательностью состояний $x := (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ в $\mathbb{R}^n$ и матрицами

$$A_T := (I_n + TA)(I_n - TA)^{-1}, \quad B_T := T(I_n - TA)^{-1}B, \quad (54)$$

$$C_T := 2C(I_n - TA)^{-1}, \quad D_T := TC(I_n - TA)^{-1}B + D. \quad (55)$$

Система (53) формально соответствует конечно-разностной схеме численного интегрирования исходных СДУ (4) методом трапеций с шагом $2T$.^{*} Соотношения (54), (55) при фиксированном $T > 0$ описывают гладкую биекцию

$$\Upsilon : (A, B, C, D) \mapsto (A_T, B_T, C_T, D_T)$$

между открытыми множествами четверок матриц, таких что A гурвицева и $\rho(A_T) < 1$. Обратное отображение $\Upsilon^{-1} : (A_T, B_T, C_T, D_T) \mapsto (A, B, C, D)$ имеет вид

$$A = \Omega(I_n + A_T)^{-1}(A_T - I_n), \quad B = 2\Omega(I_n + A_T)^{-1}B_T, \quad (56)$$

$$C = C_T(I_n + A_T)^{-1}, \quad D = D_T - C_T(I_n + A_T)^{-1}B_T. \quad (57)$$

Соотношения, аналогичные (52), (54)–(57), имеют место и для передаточной функции G_T дискретного формирующего фильтра в (33).

^{*}такая интерпретация предполагает малость временного параметра T в смысле второго из соотношений (30)

ТЕОРЕМА 4 Для устойчивой несферичной системы (4), ее (T, α) -анизотропийная норма (48) (при любых заданных $T > 0$, $\alpha > 0$) может быть вычислена по формуле

$$\|F\|_{T,\alpha} = \sqrt{\frac{1}{q} \left(1 - \frac{m}{\text{Tr}(L_T P_T L_T^\top + M_T^2)} \right)}. \quad (58)$$

Неотрицательно определенная матрица $P_T = P_T^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — грамиан управляемости пары $(A_T + B_T L_T, B_T M_T)$, являющийся единственным решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$P_T = (A_T + B_T L_T) P_T (A_T + B_T L_T)^\top + B_T M_T^2 B_T^\top, \quad (59)$$

где A_T, B_T, C_T, D_T даются (54), (55), а $L_T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M_T = M_T^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (причем $M_T \succ 0$) связаны с единственным допустимым решением $R_T = R_T^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ алгебраического уравнения Риккати

$$R_T = A_T^\top R_T A_T + q C_T^\top C_T + L_T^\top M_T^{-2} L_T, \quad (60)$$

$$L_T := M_T^2 (B_T^\top R_T A_T + q D_T^\top C_T), \quad (61)$$

$$M_T := (I_m - q D_T^\top D_T - B_T^\top R_T B_T)^{-1/2}. \quad (62)$$

Допустимость R_T понимается в смысле $I_m - q D_T^\top D_T - B_T^\top R_T B_T \succ 0$ и условия устойчивости

$$\rho(A_T + B_T L_T) < 1, \quad (63)$$

а параметр $0 < q < \frac{1}{\|F\|_\infty^2}$ (от него зависят и R_T, L_T, M_T, P_T) — единственное решение уравнения

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m}{\text{Tr}(L_T P_T L_T^\top + M_T^2)} M_T^2 \right) = \alpha. \quad (64)$$

Наиболее неблагоприятная спектральная плотность единственна с точностью до положительной мультипликативной константы и реализуется входным возмущением W согласно СДУ

$$dW = LXdt + MdV, \quad (65)$$

где матрицы $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (M не обязательно симметрична) даются выражениями

$$L = L_T (I_n + A_T + B_T L_T)^{-1}, \quad M = (I_m - L B_T) M_T. \quad \blacksquare \quad (66)$$

НЕКОТОРЫЕ ПОЯСНЕНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ

Утверждение теоремы о вычислении (T, a) -анизотропийной нормы (48) следует из соответствующего результата* для случая дискретного времени в применении к системе (53)–(55).

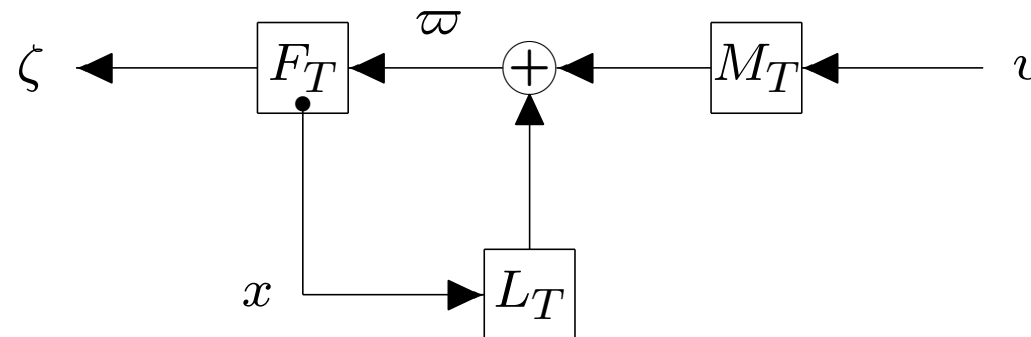
Устойчивость и несферичность системы F равносильны соответствующим свойствам ее дискретного аналога F_T . Обе системы имеют одинаковые $\mathcal{H}_\infty$ -нормы в пространствах Харди, связанных с правой полуплоскостью и единичным кругом:

$$\|F\|_\infty = \|F_T\|_\infty.$$

Сопутствующий материал [VKS1996a, Section 5] описывает структуру

$$\varpi_k = L_T x_k + M_T v_k \quad (67)$$

входного возмущения ϖ дискретной системы,



реализующего (единственную с точностью до положительной мультипликативной константы [VKS1996a, Theorem 1]) наиболее неблагоприятную спектральную плотность

$$S_T = (I_m - q\Lambda_T)^{-1}$$

в (36), что равносильно изометричности вспомогательной дискретной системы

$$\Theta_T := \begin{bmatrix} \sqrt{q}F_T \\ G_T^{-1} \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{c|c} A_T & B_T \\ \hline \sqrt{q}C_T & \sqrt{q}D_T \\ -M_T^{-1}L_T & M_T^{-1} \end{array} \right] \quad (68)$$

с входом ϖ и выходом $\begin{bmatrix} \sqrt{q}\zeta \\ v \end{bmatrix}$. Матрица R_T в (60) – грамиан наблюдаемости системы Θ_T .

*I.G.Vladimirov, A.P.Kurdyukov, A.V.Semyonov, On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems, Proceedings of the 13th IFAC World Congress (San Francisco, California USA, July 1996), IFAC, 1996, pp. 179–184, Theorem 2

Изометричность системы Θ_T означает, что, если бы ϖ была произвольной квадратично суммируемой последовательностью в $\mathbb{R}^{m*}$ и следовательно, такими же были бы и ζ , v , то их ℓ_2 -нормы были бы связаны соотношением

$$\|\varpi\|_2^2 = q\|\zeta\|_2^2 + \|v\|_2^2.$$

В рассматриваемом же случае наиболее неблагоприятной стационарной гауссовской последовательности ϖ , изометричность системы (68) проявляется в дисперсиях:

$$\mathbf{E}(|\varpi_k|^2) = q\mathbf{E}(|\zeta_k|^2) + \underbrace{m}_{\mathbf{E}(|v_k|^2)},$$

где использовано (38). Как и обратная к нему система G_T^{-1} в (68), формирующий фильтр

$$G_T = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A_T + B_T L_T}{L_T} & \frac{B_T M_T}{M_T} \end{array} \right] \quad (69)$$

имеет общее с системой F_T состояние x :

$$x_{k+1} = (A_T + B_T L_T)x_k + B_T M_T v_k, \quad \varpi_k = L_T x_k + M_T v_k. \quad (70)$$

Устойчивость фильтра (70) обеспечивается условием (63) и, в сочетании с (38), ведет к уравнению (59) для ковариационной матрицы

$$P_T := \mathbf{E}(x_k x_k^T)$$

состояния системы при рассматриваемом наихудшем внешнем воздействии. Соответственно, общий знаменатель в (58), (64) является дисперсией выхода формирующего фильтра:

$$\mathbf{E}(|\varpi_k|^2) = \text{Tr}(L_T P_T L_T^T + M_T^2).$$

*а не стационарной гауссовской последовательностью, траектории которой квадратично суммируемы лишь в тривиальном случае $\varpi = 0$

В силу устойчивости фильтра и самой системы ($\rho(A_T) < 1$), а также $\det M_T \neq 0$, последовательность ϖ порождает тот же поток σ -алгебр $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, что и v , причем (67) описывает ее разложение Дуба* на $\mathcal{F}$ -предсказуемую и обновляющую компоненты

$$\mathbf{E}(\varpi_k | \mathcal{F}_{k-1}) = L_T x_k, \quad \varpi_k - \mathbf{E}(\varpi_k | \mathcal{F}_{k-1}) = M_T v_k.$$

Условная ковариационная матрица (44) принимает вид

$$\Gamma = \text{cov}(M_T v_k | \mathcal{F}_{k-1}) = M_T^2$$

(с учетом симметричности матрицы M_T), что и ведет к числителю M_T^2 в (64).

Структура эквивалентного входного возмущения W с непрерывным временем получается применением обратного преобразования Υ^{-1} к наихудшему формирующему фильтру (69), что приводит к (65), (66). Таким образом, с учетом (4), наихудший формирующий фильтр G с непрерывным временем подчиняется уравнениям

$$dX = (A + BL)Xdt + BMdV, \quad dW = LXdt + MdV. \quad (71)$$

В силу свойств отображения Υ , динамическая матрица этого СДУ удовлетворяет соотношению

$$A + BL = \Omega(I_n + A_T + B_T L_T)^{-1}(A_T + B_T L_T - I_n)$$

и, благодаря условию (63), является гурвицевой. ■

Как и в представлении дискретного времени, наиболее неблагоприятное возмущение W на входе системы (4) формируется в (65) с помощью контура обратной связи, по которому состояние X системы поступает в снос LX возмущения.

Условие устойчивости (гурвицевости матрицы $A + BL$ в (71)) и анизотропийное ограничение в (47) не позволяют гипотетическому оппоненту использовать произвольно большую матрицу L и вынуждают его смешивать систематическую составляющую возмущения с обновляющим процессом MV .

*А.В.Булинский, А.Н.Ширяев, Теория случайных процессов, М.: Физматлит, 2005

ПРИМЕР РАСЧЕТА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ

Устойчивая система непрерывного времени с размерностями $n = 4$, $m = 3$, $p = 2$ состояния, входа и выхода и матрицами реализации в пространстве состояний (сгенерированы случайно при условии гурвицевости A):

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1.8396 & 0.1240 & -1.2078 & -1.0582 & -0.2779 & -0.8236 & 0.0335 \\ 1.3546 & 0.4367 & 2.9080 & -0.4686 & 0.7015 & -1.5771 & -1.3337 \\ -1.0722 & -1.9609 & -0.1748 & -0.2725 & -2.0518 & 0.5080 & 1.1275 \\ 0.9610 & -0.1977 & 1.3790 & 0.0984 & -0.3538 & 0.2820 & 0.3502 \\ \hline -0.2991 & -0.2620 & -0.2857 & -0.9792 & -0.5336 & 0.9642 & -0.0200 \\ 0.0229 & -1.7502 & -0.8314 & -1.1564 & -2.0026 & 0.5201 & -0.0348 \end{array} \right].$$

Спектр матрицы A : $\{-0.2406 \pm 2.0265i, -0.7598, -0.2384\}$, соответствующие границы (30):

$$\frac{1}{\rho(A)} = 0.4900, \quad \rho(A^{-1}) = 4.1953.$$

Левая из этих границ заметно превышает используемый временной параметр

$$T = 0.1890$$

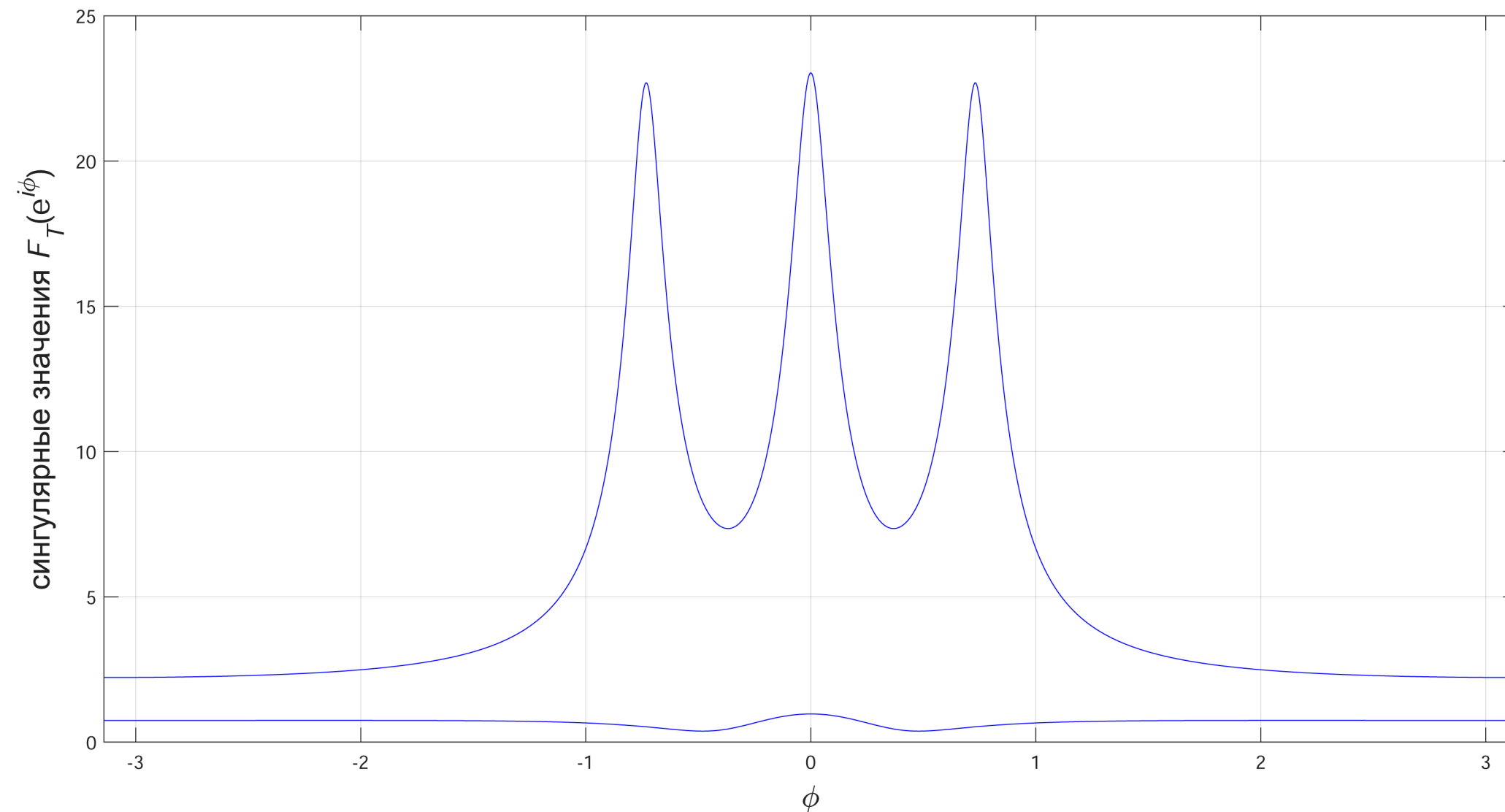
конформного преобразования (с частотой среза $\Omega = 5.2923$ в (13)).

Эффективный диапазон фильтра низких частот в (11), (12), определяющего фильтрованные вход W_T и выход Z_T для СКУ (17), адекватно отражает переходные процессы в системе.

Матрицы (54), (55) соответствующего дискретного аналога исходной системы:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_T & B_T \\ \hline C_T & D_T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0.5246 & 0.1804 & -0.3191 & -0.3102 & 0.0442 & -0.1691 & -0.0622 \\ 0.1844 & 0.8411 & 0.8756 & -0.2496 & -0.0442 & -0.2533 & -0.1464 \\ -0.3739 & -0.6849 & 0.6671 & 0.0505 & -0.3604 & 0.2125 & 0.2644 \\ 0.1758 & -0.2185 & 0.3503 & 1.0034 & -0.1540 & 0.0891 & 0.1317 \\ \hline -0.5696 & -0.1267 & -0.9532 & -1.8180 & -0.2815 & 0.9332 & -0.1675 \\ -0.1803 & -2.3962 & -3.3308 & -1.9290 & -1.4465 & 0.6799 & -0.1520 \end{array} \right].$$

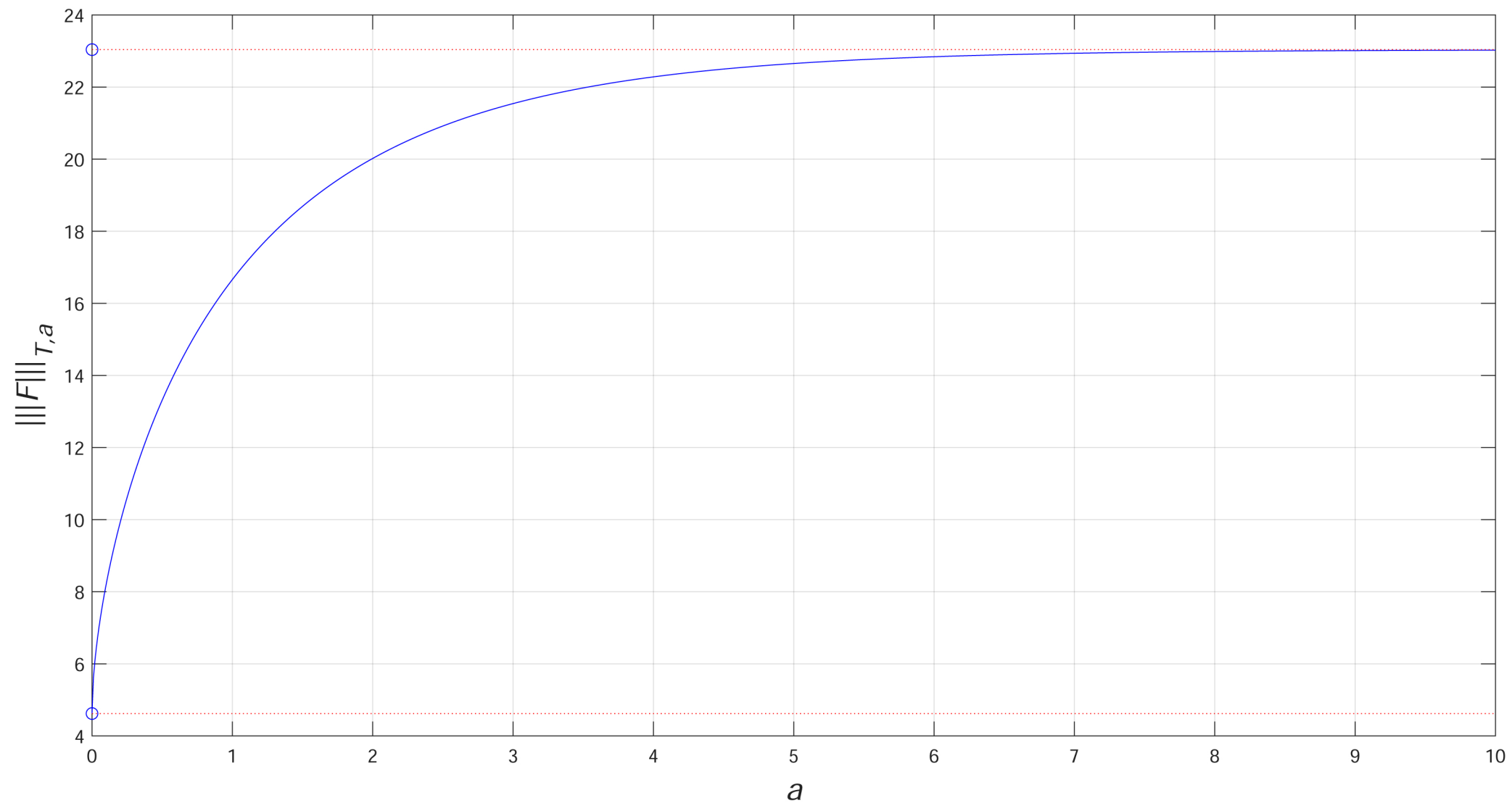
Поведение сингулярных значений его передаточной функции F_T в (52) на единичной окружности показывает, что система существенно несферична.



Этому соответствует и большой «зазор» между масштабированной $\mathcal{H}_2$ -нормой и $\mathcal{H}_\infty$ -нормой дискретной системы:

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|F_T\|_2 = 4.6211, \quad \|F_T\|_\infty = 23.0381.$$

Эти нормы — концы интервала значений (T, a) -анизотропийной нормы $\|F\|_{T,a}$ системы (при изменении уровня a средней анизотропии от 0 до $+\infty$), вычисленной по Теореме 4:



При $a = 1.2264$, рассматриваемая норма системы принимает значение $\|F\|_{T,a} = 17.6938$, а матрицы (66) наиболее неблагоприятного формирующего фильтра (65) имеют вид

$$L = \begin{bmatrix} -0.0286 & 0.0285 & -0.0657 & -0.0423 \\ -0.0220 & -0.1366 & -0.0369 & 0.1185 \\ 0.0356 & -0.1055 & -0.0105 & 0.1713 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1.0040 & 0.0091 & 0.0048 \\ -0.0121 & 1.0011 & 0.0034 \\ -0.0046 & -0.0036 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что M близка к единичной матрице, в то время как L сравнительно мала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен один из способов распространения анизотропийных критериев для входо-выходных операторов на линейные стационарные стохастические системы с непрерывным временем, описываемые СДУ со статистически неопределенными процессами Ито на входе.

Описанный подход использует СКУ выхода системы по отношению к ее входу в терминах фильтрованных версий этих процессов. Временной масштаб T фильтра низких частот параметризует преобразование Тастина исходной системы F в дискретную систему F_T , которая обладает тем же СКУ, только понимаемым в обычном смысле для фрагментов стационарных гауссовских случайных последовательностей на входе и выходе.

Двухпараметрический аналог $\|F\|_{T,a}$ анизотропийной нормы системы определен как a -анизотропийная норма $\|F_T\|_a$ дискретной системы, уровень a средней анизотропии для входа которой косвенно характеризует отклонение спектральной плотности процесса Ито на входе от спектральных плотностей изотропного гауссовского белого шума (постоянных скалярных матриц).

Тем самым, вычисление такой нормы сведено к разработанной более 20 лет назад процедуре численного решения системы матричных алгебраических уравнений Риккати, Ляпунова и логдетерминантного уравнения.

При обратном преобразовании Тастина наследуется общая структура обратной связи, в силу которой снос наиболее неблагоприятного входного возмущения линейно зависит от текущего состояния системы.

Таким образом, в сочетании с прямым и обратным преобразованиями Тастина, методы анизотропийного анализа и синтеза, разработанные ранее для дискретных систем, применимы и к постановкам с непрерывным временем.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ