Связь сдавливания, инъективных и медианных метрик и CAT(0) пространств

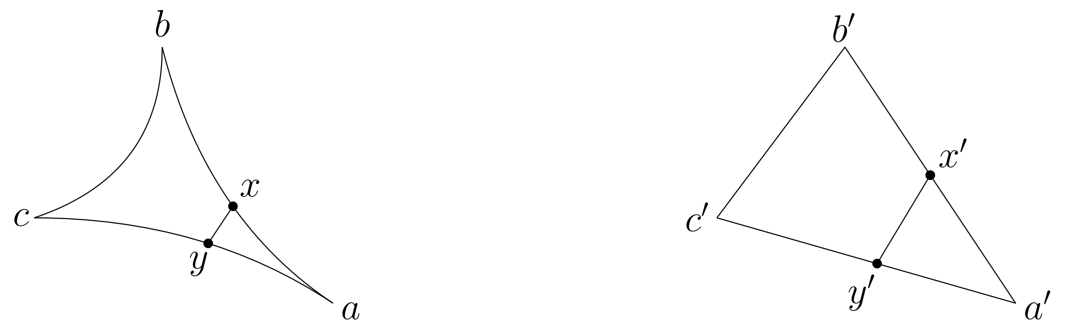
Теорема 1. *Пусть Q — конечный кубический комплекс. Пусть d_p — метрика на Q, полученная склейкой l_p метрик на кубах. Следующие утверждения эквивалентны:*
1. *(Q, d_1) — медианное метрическое пространство;*
2. *(Q, d_1) — кубизация медианного графа $\mathrm{sk}_1\, Q$;*
3. *(Q, d_2) — CAT(0)-пространство;*
4. *Q односвязен и линк каждой вершины это флаговый симплициальный комплекс;*
5. *(Q, d_∞) — инъективное метрическое пространство;*
6. *Q (регулярно) кубически сдавливаем*

Ссылки: в докладе Сергея «Инъективная метрика и кубическое сдавливание», есть на YouTube.
Мы постараемся разобрать (по модулю некоторых лемм):
- общую идею (без подробностей) (3) $\Leftrightarrow$ (4);
- (5) $\Rightarrow$ (4) следуя статье «Injective Metrics on Cube Complexes» B. Miesch;
- (4) $\Rightarrow$ (2) по «Poc Sets, Median Algebras and Group Actions» M. Roller;
- если успеем, (4) $\Rightarrow$ (6) по «Injective Metrics on Cube Complexes» B. Miesch;

CAT(0) кубические комплексы

Рассмотрим геодезическое метрическое пространство (X, d). Возьмём произвольные $a, b, c \in X$ и фиксируем геодезические $[a, b]$, $[a, c]$ и $[b, c]$. Возьмём также $a', b', d' \in (\mathbb{R}^2, d_2)$, такие что $d(a, b) = d_2(a', b')$, $d(a, c) = d_2(a', c')$ и $d(b, c) = d_2(b', c')$. Ясно, что для любых пар точек $x \in [a, b]$ и $y \in [a, c]$ существуют точки $x' \in [a', b']$ и $y' \in [a', c']$ такие что $d_2(a', x') = d(a, x)$ и $d_2(a', y') = d(a, y)$.

Определение. *Пусть (X, d) — геодезическое метрическое пространство. (X, d) это CAT(0)-пространство, если для любых трёх точек $a, b, c \in X$, любого геодезического треугольника $[a, b] \cup [b, c] \cup [c, a]$ и произвольных точек $x \in [a, b]$ и $y \in [a, c]$ для соответствующих точек x' и y' в треугольнике (a', b', c') в $(\mathbb{R}^2, d_2)$ выполнено $d(x, y) \leq d(x', y')$.*



Замечание. *Аналогично можно определить CAT(k) пространства для $k \neq 0$. Например, в случае $k = 1$ мы берём вместо $(\mathbb{R}^2, d_2)$ сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с угловой метрикой (в этом случае в определении мы рассматриваем треугольники с периметром меньше 2π).*

Пусть $I^n = [0, 1]^n \subset (\mathbb{R}^n, d_2)$. Гранью I^n будем называть подмножество $F = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n \subset I^n$, где $L_j = 0, 1$ или $[0, 1]$.

Определение. *Пусть есть набор кубов $I_i^{n_i}$, $i \in J$. Назовём $Q = \bigsqcup_i I_i^{n_i} / \sim$ кубическим комплексом, если*
- *p_i инъективно для любого $i \in J$*
- *если образы двух кубов пересекаются, то они пересекаются по грани: если $p_i(I_i^{n_i}) \cap p_j(I_j^{n_j}) \neq \varnothing$, то существуют грани $F_i \subset I_i^{n_i}$, $F_j \subset I_j^{n_j}$, и изометрия $g : F_i \to F_j$, так что $p_i(x) = p_j(y)$ если и только если $x \in F_i$ и $y = g(x)$.*

где p_i это композиция вложения $I_i^{n_i} \hookrightarrow \bigsqcup_i I_i^{n_i}$ и проекции $\bigsqcup_i I_i^{n_i} \to X$.

В дальнейшем будем считать, что Q связен, и размерности кубов в Q ограничены.

На Q несложно ввести метрику.

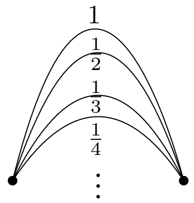
Определение. *Назовём струной в Q из x в y последовательность точек $\Sigma(x, y) = (x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y)$, такую что пары (x_i, x_{i+1}) лежат в одном кубе C_i.*

Длиной струны $\Sigma(x, y)$ назовём число $l(\Sigma(x, y)) = \sum_{i=1}^{n-1} d_2^i(x_i, x_{i+1})$ (здесь d_2^i это евклидова метрика на кубе C_i).

Для $x, y \in Q$ положим $d_Q(x, y) = \inf_{\Sigma(x,y)} l(\Sigma(x, y))$

Утверждение. *Если Q — связный конечномерный кубический комплекс, то (Q, d_Q) — полное геодезическое метрическое пространство.*

Вообще говоря, если бы мы склеивали Q не из фиксированных кубов, а из произвольно вложеных, то d_Q не было бы обязано быть метрикой.



Доказательство можно найти в «Metric Spaces of Non-Positive Curvature» Bridson, M. R., Hafliger, A. (I.7.13, I.7.19)

Нам ещё понадобится следующая лемма:

Лемма 1 («Metric Spaces of Non-Positive Curvature», I.7.29)**.** *Геодезическая любой пары точек $x, y \in Q$ реализуется некоторой струной $\Sigma_m(x, y)$, $l(\Sigma_m(x, y)) = d(x, y)$.*

Замечание. *В книге всё это доказывается для симплициальных комплексов, но доказательства легко переносятся на случай кубических комплексов.*

Оказывается, для кубических комплексов (локальное) условие CAT(0) имеет комбинаторный вид:

Теорема 2 («Metric Spaces of Non-Positive Curvature», II.5.20 или M. Gromov, «Hyperbolic groups», 4.2.C)**.** *Пусть Q связный конечномерный кубический комплекс. Тогда*

- *(Q, d_Q) локально удовлетворяет условию CAT(0) тогда и только тогда, когда линк каждой вершины $v \in \mathrm{sk}_0\, Q$ это флаговый симплициальный комплекс.*
- *(Q, d_Q) (глобально) удовлетворяет условию CAT(0) тогда и только тогда, когда Q односвязно и линк каждой вершины $v \in \mathrm{sk}_0\, Q$ это флаговый симплициальный комплекс.*

Для начала напомним определение флаговых симплициальных комплексов.

Определение. *Симплициальный комплекс K называется флаговым, если для любого набора вершин $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathrm{sk}_0\, K$ такого что $\{v_i, v_j\} \in K$ для любых $i \neq j$, симплекс $\{v_1, \dots, v_n\}$ также лежит в K.*

Примеры:

1. Одномерный симплициальный комплекс является флаговым тогда и только тогда, когда в нём нет циклов длины меньше 4-х.
2. Порядковый комплекс любого ЧУМа флаговый.
3. В частности, барицентрическое измельчение любого симплициального комплекса это флаговый комплекс (так как это порядковый комплекс ЧУМа граней).

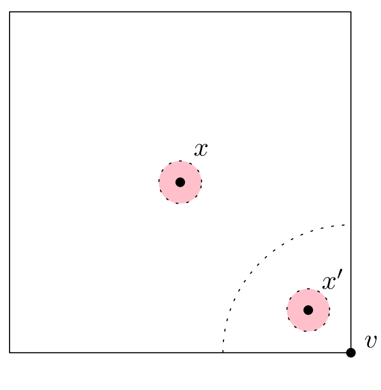
Вернёмся к теореме.

Из первого пункта теоремы следует второй, так как если выполнено локальное условие CAT(0), то глобальное условие CAT(0) выполнено тогда и только тогда, когда пространство односвязно:

- в одну сторону: если X — CAT(0) пространство, то между двумя точками геодезическая только одна (так как треугольник сравнения для «треугольника» из двух геодезических вырожден) и она непрерывно зависит от своих концов (II.1.4), так что X стягиваемо (по геодезическим).
- в другую сторону: по теореме Картана-Адамара («Metric Spaces of Non-Positive Curvature» II.4.1 (2)) если X локально удовлетворяет условию CAT(0) и односвязно, то X — CAT(0) пространство.

Попробуем понять (без деталей) откуда берётся первый пункт.

Во-первых, для любой точки x из внутренности куба $C \subset Q$ и для любой окрестности U_v вершины v этого куба C существует точка $x' \in U_v$ и изометричные окрестности U_x точки x и $U_{x'}$ точки x'. Пояснить это можно так: для достаточно маленьких открытых шаров $B(x, \varepsilon)$ и $B(x', \varepsilon)$ метрика d_Q на пересечении их с любым кубом будет совпадать с метрикой d_2 на этом кубе.



Следовательно, Q локально CAT(0)-пространство если и только если оно локально CAT(0) в окрестности каждой своей вершины.

Определение. *Евклидовым конусом $C_{d_2}X$ над метрическим пространством (X, d) назовём метрическое пространство $(X \times [0, \infty)/(X \times 0), d_C)$ где метрика d_C определена следующим образом:*

- $d_C((x, 0), (y, t)) = t$
- $d_C((x, t), (y, s)) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(\alpha)}$, *где* $\alpha = \min(\pi, d(x, y))$ *(то есть мы считаем евклидово расстояние между точками a и b треугольника $(a, b, 0)$ со сторонами $|a0| = t$ и $|b0| = s$ и углом в нуле взятом из метрики d)*

Линк вершины v в кубическом комплексе Q можно определить как множество направлений отрезков, выходящих из v в другие точки $w \in \bigcup_{C \in Q, v \in C} C$. Для направлений отрезков $[v, w]$ и $[v, w']$, если w, w' лежат в общем кубе, можно определить угловую метрику. Для направлений, выходящих в разные кубы, можно определить метрику через нижнюю грань длин струн (как мы её определяли на кубических комплексах).

Теорема («Metric Spaces of Non-Positive Curvature», I.7.39)**.** *Пусть v — вершина кубического комплекса конечной размерности Q. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что открытый шар $B(v, \varepsilon) \subset Q$ изометричен шару $B'(p, \varepsilon) \subset C_{d_2} \operatorname{lk} v$, где p — это вершина конуса $C_{d_2} \operatorname{lk} v$.*

Отсюда получаем, что локальное условие CAT(0) на Q эквивалетно тому, что для каждой вершины $v \in \operatorname{sk}_0 Q$ оно выполняется в некоторой окрестности вершины конуса $C_{d_2} \operatorname{lk} v$. Следующая теорема и утверждение дают необходимое и достаточное условие для этого.

Теорема («Metric Spaces of Non-Positive Curvature», II.3.14; см. также теорему 2 в «Задача Борсука о метризации полиэдра» В.Н.Берестовский)**.** *Пусть X — метрическое пространство. $C_{d_2}X$ это CAT(0) пространство тогда и только тогда, когда X это CAT(1) пространство.*

Утверждение («Metric Spaces of Non-Positive Curvature», II.3.16)**.** *Конус $C_{d_2}X$ является CAT(0) пространством тогда и только тогда, когда некоторая окрестность вершины конуса является CAT(0) пространством.*

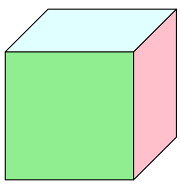
Заметим теперь, что линки вершин кубического комплекса обладают важным (для дальнейшего) свойством: все рёбра (соотвествующие квадратам I^2) имеют длину $\frac{\pi}{2}$.

Теорема («Metric Spaces of Non-Positive Curvature», II.5.18)**.** *Пусть K конечномерный метрический симплициальный комплекс, склееный из симплексов, вложенных в сферы S^n с угловой метрикой, причём все рёбра K имеют длину $\frac{\pi}{2}$. В этом случае K это CAT(1) пространство тогда и только тогда, когда комплекс K флаговый.*

Итак, $C_{d_2} \operatorname{lk} v$ это CAT(0) пространство тогда и только тогда, когда $\operatorname{lk} v$ это CAT(1) пространство. $\operatorname{lk} v$ это «сферический» симплициальный комплекс специального вида, к которому применима последняя теорема. Следовательно, $\operatorname{lk} v$ это CAT(1) пространство тогда и только тогда, когда $\operatorname{lk} v$ флаговый. Учитывая предыдущие шаги, получаем первый пункт теоремы 2.

В дальнейшем мы будем пользоваться эквивалентным критерием:

Лемма 2. *Кубический комплекс Q конечной размерности это CAT(0) пространство если и только если для любых трёх разных кубов $C_1 = I^{n+2}, C_2 = I^{n+2}, C_3 = I^{n+2} \in Q$, пересекающихся по кубу $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = C_{123}$ размерности n и попарно пересекающихся по разным кубам $C_1 \cap C_2 = C_{12}, C_1 \cap C_3 = C_{13}$ и $C_2 \cap C_3 = C_{23}$ размерности $n+1$, существует куб размерности $n+3$, гранями которого являются C_1, C_2 и C_3.*



На рисунке: три разноцветных куба размерности 2, пересекающиеся по вершине (кубу размерности 0) и попарно пересекающиеся по различным кубам размерности 1. Утверждается, что (если комплекс CAT(0)), должен быть трёхмерный куб, содержащий все квадраты.

Доказательство. Пусть Q — CAT(0) кубический комплекс. Возьмём конфигурацию кубов C_1, C_2, C_3 из условия леммы. Пусть v — произвольная вершина куба C_{123}. Тогда в линке этой вершины будут 3 $(n+1)$-симплекса, соответствующих C_1, C_2 и C_3, имеющих попарно общие n-грани и все вместе имеющие общую $(n-1)$-грань. □

$\Delta_1^{n+1} = v_1 v_3 \Delta^{n-1}$ $\quad \Delta_2^{n+1} = v_1 v_2 \Delta^{n-1}$ $\quad \Delta_3^{n+1} = v_2 v_3 \Delta^{n-1}$

$\Delta_{12}^{n} = v_1 \Delta^{n-1}$ $\quad \Delta_{23}^{n} = v_2 \Delta^{n-1}$ $\quad \Delta_{13}^{n} = v_3 \Delta^{n-1}$

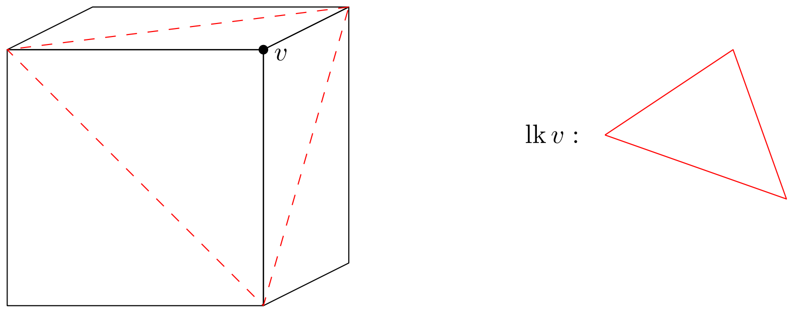
Δ^{n-1}

Ясно, что любая пара вершин из $\{v_1, v_2, v_3\} \cup \operatorname{sk}_0 \Delta^{n-1}$ соединены ребром (для любой пары вершин есть симплекс, который её содержит). Так как $\operatorname{lk} v$ это флаговый комплекс, должен существовать симплекс на этом наборе вершин. Он, очевидно, соответствует искомому $(n+3)$-кубу.

Пусть теперь Q не CAT(0) кубический комплекс. Тогда у некоторой вершины v комплекс $\operatorname{lk} v$ не флаговый, то есть существует набор попарно соединённых между собой вершин $w_0, \ldots, w_m$, которые при этом не составляют симплекс. Возьмём из этих вершин подмножество $S = \{w_0, \ldots, w_n\}$, такое что любое подмножество $S' \subset S$, $|S'| < |S|$ является симплексом в $\operatorname{lk} v$, но $S \notin \operatorname{lk} v$. Ясно, что $n + 1 = |S| \geq 3$ (все 1-симплексы есть).

По сути мы нашли в $\operatorname{lk} v$ границу некоторого симплекса Δ^n ($n \geq 2$), при этом в $\operatorname{lk} v$ нет самого симплекса. Возьмём три произвольные старшие грани Δ_1^{n-1}, Δ_2^{n-1}, Δ_3^{n-1}. Попарно они пересекаются по симплексам Δ_{ij}^{n-2}, и все вместе они пересекаются по симплексу Δ_{123}^{n-3} (либо не пересекаются вовсе при $n = 2$).

Заметим, что каждый симплекс Δ^m соотвествует $(m+1)$-кубу, одной из вершин которого является v, а общие грани симплексов соответствуют общим граням кубов. Следовательно, в нашем случае, мы нашли попарно пересекающиеся по старшим граням кубы C_1, C_2 и C_3 размерности n, имеющие общий $(n-2)$-куб, но не лежащие в большем кубе.



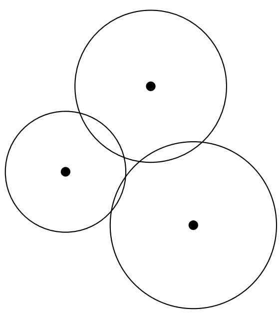
Инъективная метрика и CAT(0) кубические комплексы

Определение (Инъективное пространство). *M — инъективое метрическое пространство, если для любого метрического подпространства $X \subseteq Y$ и отображения $f : X \to M$ т.ч. $d_M(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$, оно продолжается до отображения $f' : Y \to M$, т.ч. $d_M(f(x), f(y)) \leq d_Y(x, y)$.*

$$\begin{tikzcd} M & X \arrow[l, "f"'] \arrow[d, hook] \\ & Y \arrow[ul, dashed, "f'"] \end{tikzcd}$$

Определение (Гипервыпуклое пространство). *M — гипервыпуклое метрическое пространство, если любой конечный набор (замкнутых) шаров $B_{r_1}(c_1), B_{r_2}(c_2), \ldots, B_{r_n}(c_n)$, такой что $r_i + r_j \geq d(c_i, c_j)$, имеет общую точку.*

Теорема (док-во, например: теорема 4.2, «Introduction to hyperconvex spaces» R. Espinola, M. A. Khamsi). *Метрическое пространство инъективно тогда и только тогда, когда оно гипервыпукло.*



$\mathbb{R}^2$ с l_2 метрикой — не инъективное пространство.

Но $\mathbb{R}^n$ с l_∞ метрикой — инъективное пространство, так как любой набор попарно пересекающихся кубов (шаров в $(\mathbb{R}^n, l_\infty)$) имеет общую точку.

Теорема. *Инъективные метрические пространства:*
- *Стягиваемые*
- *Полные*
- *Геодезические*

Доказательство стягиваемости можно найти, например, в J.R. Isbell «Six theorems about injective metric spaces», теорема 1.1. Полнота доказывается, например, в «Introduction to hyperconvex spaces», Proposition 3.2, существование геодезических очевидно (достаточно заметить, что $B(x, \varepsilon d(x, y)) \cap B(y, (1-\varepsilon) d(x, y)) \neq \varnothing$ для $\varepsilon \in [0, 1]$).

Мы хотим доказать следующую теорему:

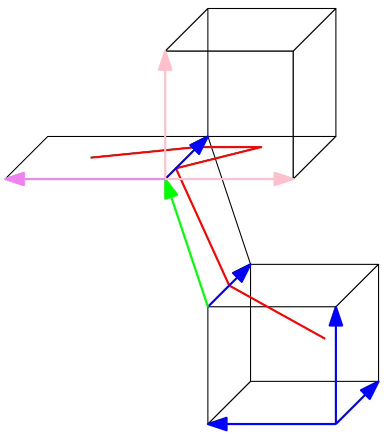
Теорема 3. *Пусть (Q, d_∞) — кубический комплекс конечной размерности, полученный склейкой кубов с l_∞ метрикой на каждом кубе, а (Q, d_2) — комплекс с той же структурой склеек, но с l_2 метрикой на каждом кубе. Тогда если (Q, d_∞) это инъективное метрическое пространство, то (Q, d_2) это CAT(0) пространство.*

Как и в случае евклидовой метрики, (Q, d_∞) также будет полным геодезическим метрическим пространством, и геодезические будут реализовываться струнами конечной длины.

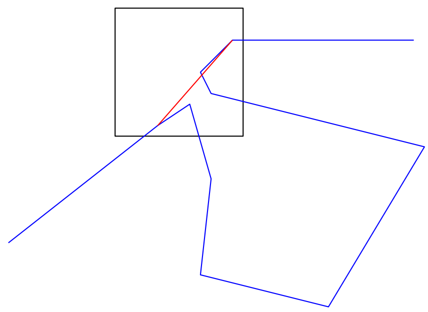
Пусть $\Sigma(x, y) = (x_0 = x, \dots, x_n = y)$ струна из x в y. Обозначим за $C_i \in Q$ максимальный куб, содержащий вместе точки x_i и x_{i+1}. Пусть также $F_i = C_i \cap C_{i+1}$. Для удобства введём на C_i следующие координаты:

1. На первом кубе C_1 координаты первых двух точек $x_1^1 \geq x_0^1$
2. Координаты C_i и C_{i+1} индуцируют одинаковые координаты на F_i.
3. $(0, \dots, 0) \in F_i$ в C_{i+1}.

Например, пусть F_1 в C_1 имеет вид $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, z_1, z_2, z_3)$ размерности 10 (то есть первые 4 координаты единицы, следующие 3 нули, остальные свободные). Тогда F_1 в C_2 размерности 6 будет иметь вид $(0, 0, 0, z_1, z_2, z_3)$. То есть чтобы получить координаты некоторой точки $p \in F_i$ в C_{i+1}, мы должны взять её координаты в C_i, оставить только общие координаты, а остальные установить в ноль. Если мы в какой-то куб вдруг заходим несколько раз (не подряд), то мы на нём имеем несколько систем координат. Но так как нас интересуют струны минимальной длины, эти случаи нам не очень интересны.



Пример струны и координат на кубах.



Если струна заходит в какой-то куб несколько раз (не подряд), мы можём обрезать «крюк», уменьшив длину.

Определение. *Натянутой струной между точками $x, y \in (Q, d_\infty)$ будем называть струну $\Sigma(x, y) = (x_0 = x, x_2, \dots, x_n = y)$, такую что*

- *x_i, x_{i+1}, x_{i+2} не лежат в одном кубе $\forall i \in \{0, \dots, n-2\}$*
- *если x_i и x_{i+1} лежат в максимальном общем кубе C_i, а x_{i+1} и x_{i+2} лежат в максимальном общем кубе C_{i+1}, то x_{i+1} лежит на геодезической из x_i в x_{i+2} в $C_i \cup C_{i+1}$.*
- *в координатах куба C_i имеем $(x_i)_s \leq (x_{i+1})_s$ для $s = 1, \dots, \dim C_i$.*

Лемма 3. *Пусть $\Sigma(x, y)$ — струна минимальной длины между $x, y \in (Q, d_\infty)$. Тогда существует натянутая струна $\Sigma'(x, y)$ той же длины.*

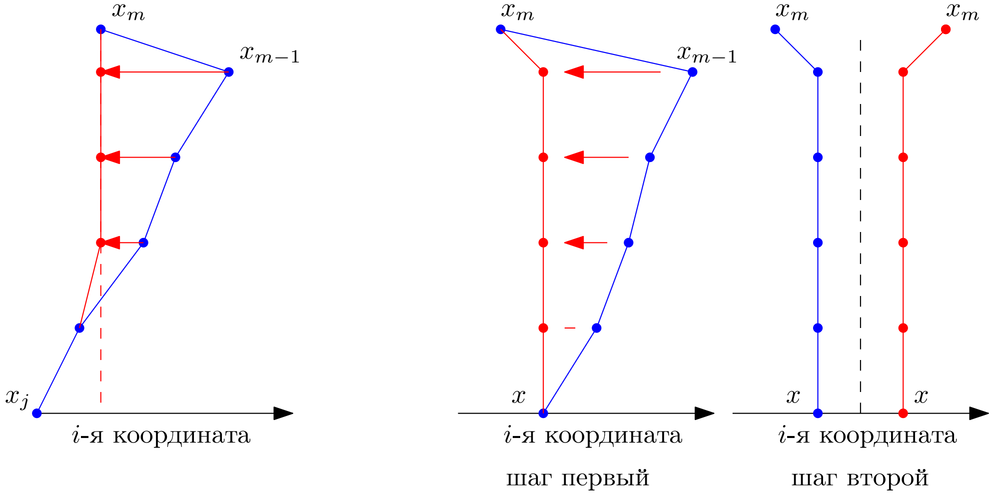
Доказательство. Заметим, что если x_i, x_{i+1}, x_{i+2} лежат в общем кубе, мы можем без увеличения длины выкинуть x_{i+1}. Также если x_{i+1} не лежит на геодезической из x_i в x_{i+2}, можно выбрать x'_{i+1} на геодезической и получить струну Σ' заведомо не большей длины (очевидно, что два куба, склеенные по грани это геодезическое метрическое пространство).

«Поправим» теперь Σ так, чтобы выполнялось последнее свойство. Будем действовать по индукции. Пусть оно выполняется для первых $m-1$ точек. Рассмотрим x_m. Пусть $(x_m)_i < (x_{m-1})_i$ для некоторой i-й координаты куба C_{m-1}. Пусть i-я координата у куба C_{m-1} общая с кубами $C_j, C_{j+1}, \dots, C_{m-2}$, то есть мы имеем $0 \leq (x_j)_i \leq (x_{j+1})_i \leq \dots \leq (x_{m-1})_i > (x_m)_i$.

Есть две возможности:

1. для некоторого $s \geq j$ имеем $(x_s)_i \leq (x_m)_i$. В этом случае меняем координаты: ставим $(x_k)_i = (x_m)_i$ для $k = s+1, \dots, m-1$. Так как модули разности координат не увеличатся, то и длина получившейся струны будет не больше старой.
2. $(x_m)_i < (x_j)_i$. Тогда $(x_j)_i > 0$. Но так как все новые координаты в каждом новом кубе выбираются равными нулю, мы получаем, что $j = 0$ и $(x_j)_i = (x)_i$ (не начинающиеся с исходной точки последовательности начинаются с $(x_j)_i = 0$). В этом случае устанавливаем i-е координаты точек от 1 до $m-1$ равными $(x)_i$, и меняем i-ю координату на кубах $C_0, \dots, C_{m-1}$ на симметричную относительно $\frac{1}{2}$. Модули разности координат не увеличатся, поэтому длина получившейся струны будет не больше старой.

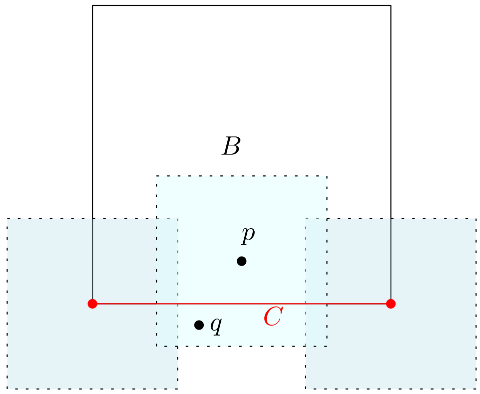
Таким образом, выкидывая лишние точки, выбирая точки на геодезических и проведя описанную выше процедуру (после которой, возможно, ещё раз придётся выкинуть лишние точки), мы получим натянутую струну Σ' длины не большей, чем $l(\Sigma)$. Так как Σ струна наименьшей длины, $l(\Sigma') = l(\Sigma)$. □



первый случай второй случай

Из леммы следует, что геодезические реализуются натянутыми струнами.

Лемма 4. *Пусть (Q, d_∞) — кубический комплекс конечной размерности, $p \in Q$. Пусть p лежит в некотором кубе B. Пусть также существует грань $C < B$ и число $r \in [0, \frac{1}{2}]$, такие что $d_\infty(p, C) \leq r$, а $d_\infty(p, \dot{C}) \geq r$. Тогда для любой точки q такой что $d(q, p) \leq r$ существует куб D, в котором лежат q и C.*



Доказательство. Пусть $B = [0,1]^k$ (где $k = \dim B$). Зададим на B координаты, в которых грань C имеет вид $[0,1]^n \times \{0\}^{k-n}$ (где $n = \dim C$). В этом случае если $p = (x_1, \dots, x_{n_0})$ по условию $r \leq x_i \leq 1 - r$ для $i = 1, \dots, n$ и $x_i \leq r$ для $i = n+1, \dots, k$. «Убрав» нулевые x_i'е для $i = n+1, \dots, k$, мы можем заменить B некоторой его гранью B', в координатах которой $0 < x_i \leq r$, без потери общности будем считать что эта грань и есть B. Ясно, что p попадает в внутренность этого куба (все координаты p не равны меньше 1 и больше 0).

Возьмём теперь натянутую струну $\Sigma = (p_0 = p, \dots, p_l = q)$, реализующую геодезическую между p и q. Обозначим за C_i максимальные кубы, содержащие p_i и p_{i+1}. Пусть также $n_i = \dim C_i$. Ясно, что B это грань C_0, так что $C < C_0$. Для всех C_i, гранью которых является C, зададим координаты, в которых C будет иметь вид $[0,1]^n \times \{0\}^{n_i - n}$. Заметим, что $p_i \in C_{i-1} \cap C_i \subset \dot{C}_i$ для $i = 1, \dots, l-1$.

Покажем по индукции, что $C < C_i$ для любого $i = 0, \dots, l-1$ и в координатах куба C_i мы для $p_i = (x_1, \dots, x_{n_i})$ имеем $r - d_\infty(p, p_i) \leq x_i \leq 1 - r + d_\infty(p, p_i)$ для $i = 1, \dots, n$ и $x_i \leq r + d_\infty(p, p_i)$ для $i = n+1, \dots, n_i$.

Для p_0 это верно по условию. Пусть $p_{k+1} = (y_1, \dots, y_{n_k})$ и $p_k = (x_1, \dots, x_{n_k})$ в координатах C_k. Так как $x_i - d(p_{k+1}, p_k) \leq y_i \leq x_i + d(p_{k+1}, p_k)$, используя предположения индукции получаем для $i = 1, \dots, n$

$$r - d(p, p_{k+1}) = r - d(p, p_k) - d(p_k, p_{k+1}) \leq x_i - d(p_k, p_{k+1}) \leq y_i \leq x_i + d(p_k, p_{k+1}) \leq 1 - r + d(p, p_k) + d(p_k, p_{k+1}) = 1 - r + d(p, p_{k+1})$$

аналогично для $i = n+1, \dots, n_k$

$$y_i \leq x_i + d(p_{k+1}, p_k) \leq r + d(p, p_k) + d(p_{k+1}, p_k) = r + d(p, p_{k+1})$$

Заметим, что $d(p, p_{k+1}) < r$, так что $0 < y_i < 1$ для $i = 1, \dots, n$ и $y_i < 1$ для $i = 1, \dots, n_k$. Это значит, что точка p_{k+1} лежит во внутренности грани куба C_k, которая содержит C (можно повторить рассуждения из первого абзаца), так что $C < C_k \cap C_{k+1}$ и $C < C_{k+1}$

Пусть теперь p_{k+1} имеет координаты $(z_1, \dots, z_{k+1})$ в C_{k+1}. Так как $y_i \in (0,1)$ для $i = 1, \dots, n$, получаем $z_i = y_i$. Для тех y_i среди $i = n+1, \dots, n_k$, которые не обнулились, мы также имеем равенство $y_i = z_i$. Все обнулившиеся и новые координаты в C_{k+1} будут нулями, следовательно, неравенство на координаты выполняется. □

Доказательство теоремы 3. Итак, Q — конечномерный кубический комплекс, (Q, d_∞) — инъективное пространство. Мы хотим показать, что (Q, d_2) — CAT(0) пространство. Для этого достаточно проверить «критерий трёх кубов» (см. лемму 3).

Пусть (Q, d_2) не CAT(0) пространство. Тогда существует три различных $(n+2)$-куба A, B, C, попарно пересекающиеся по различным $(n+1)$-кубам, все вместе пересекающиеся по n-кубу, но не содержащиеся в $(n+3)$-кубе. Заметим, что в этом случае нет и куба D, содержащего $A \cap B$ и C, так как тогда $A \cap B < D$ и $A \cap C < D$, то есть D пересекался бы с A по двум разным граням, следовательно, содержал бы A. Аналогично, он бы содержал и B.

Также заметим, что $A \cap B$ и $A \cap C$ имеют общую грань в A, так что это не противоположные грани. То же верно и для любой пары рассматриваемых пересечений.

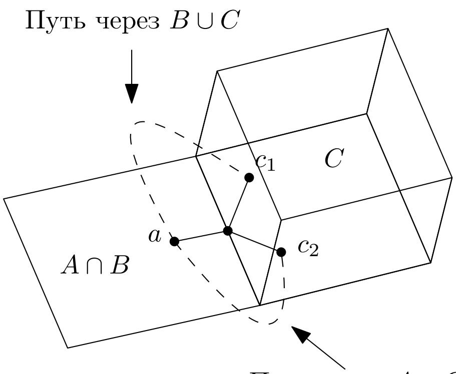
Будем обозначать за $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ координаты в A, за $(y_1, \ldots, y_{n+2})$ координаты в B и за $(z_1, \ldots, z_{n+2})$ координаты в C. В силу вышесказанного, мы можем задать координаты на кубах так, что
- $A \cap B$ задаётся $x_{n+2} = 0$ или $y_{n+2} = 0$.
- $A \cap C$ задаётся $x_{n+1} = 0$ или $z_{n+2} = 0$.
- $B \cap C$ задаётся $y_{n+1} = 0$ или $z_{n+1} = 0$.
- координаты на пересечениях у пересекающихся кубов совпадают

Пусть b — это барицентр пересечения $A \cap B \cap C$. Во всех координатах он имеет вид $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 0, 0)$. Возьмём три точки:
- $a = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, 0) \in A \cap B$ (координаты этой точки и в A, и в B совпадают)
- $c_1 = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16})_C \in C$
- $c_2 = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16})_C \in C$

Ясно, что $d_\infty(c_1, c_2) \le \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$. Также заметим, что мы можем попасть из x в c_1 и c_2 следующими путями длины $\frac{1}{16} + \frac{1}{8}$: $(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, 0)_B \mapsto (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{16})_{B,C} \mapsto (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16})_C$ и $(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, 0)_A \mapsto (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{16})_A = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, 0)_C \mapsto (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16})_C$, так что $d_\infty(p, c_1), d_\infty(p.c_2) \le \frac{1}{16} + \frac{1}{8}$. Следовательно, так как (Q, d_∞) инъективное, $B(a, \frac{1}{8}) \cap B(c_1, \frac{1}{16}) \cap B(c_2, \frac{1}{16}) \ne \varnothing$. Возьмём точку p из этого пересечения.

Во-первых, заметим, что $d_\infty(c_1, \dot{C}) = \frac{1}{16} \ge \frac{1}{16}$ и $d_\infty(c_1, C) = 0$. Также $d_\infty(c_1, p) \le \frac{1}{16}$. Следовательно, по предыдущей лемме существует куб D, содержащий куб C и точку p. Введём в D координаты $(u_1, \ldots, u_m)$ ($\dim D = m$), такие что первые $n+2$ координаты совпадают с координатами в C, и C в D имеет вид $(u_1, \ldots, u_{n+2}, 0, 0, \ldots, 0)$. Пусть p имеет в D координаты $(u_1^p, \ldots, u_m^p)$. Так как $p \in B(c_1, \frac{1}{16}) \cap B(c_2, \frac{1}{16})$, имеем
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \le u_i \le \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ для $i = 1, \ldots, n$
- $u_{n+1} = u_{n+2} = \frac{1}{8}$
- $u_i \le \frac{1}{16}$ для $i = n+3, \ldots, m$.

Отсюда получаем $d(p, \dot{C}) \ge \frac{1}{8}$ и $d(p, C) \le \frac{1}{8}$. Также $d(a, p) \le \frac{1}{8}$ так как $p \in B(a, \frac{1}{8})$. Из леммы следует, что существует куб D', содержащий a и C. Так как a лежит во внутренности $A \cap B$, имеем $A \cap B < D'$ и $C < D'$, получаем противоречие. □

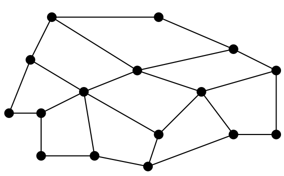


Медианные графы и CAT(0) кубические комплексы

На связном графе G естественным образом можно ввести метрику как минимальную длину пути между двумя вершинами.

Определение. *Граф G называется медианным, если естественная метрика d на нём превращает G в медианное пространство, то есть для любых вершин x, y, z существует вершина $m = m(x, y, z)$ такая что $I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(y, z) = \{m\}$. Здесь $I(v, w) = \{x | d(v, x) + d(x, w) = d(v, w)\}$.*

Примеры:
1. Любое дерево — медианный граф.
2. Т.н. рамочные графы, то есть планарные графы, каждая ограниченная грань у которых — четырёхугольник, и все вершины степени ≤ 3 инцидентны неограниченной грани.



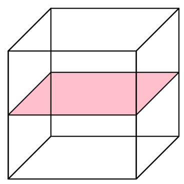
4. Одномерный скелет куба I^n. Легко видеть, что в этом случае медиану трёх верших куба $x, y, z \in \{0,1\}^n$ можно вычислить покомпонентно (учитывая, что $m(0,0,1) = 0,\ m(1,1,0) = 1$ и медиана — симметрическая функция).

Утверждение. *Если G — медианный граф, то для любых двух вершин x, y имеем $I(x,y) = \{z | z = m(x,y,z)\}$.*

Определение. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Подмножество $H \subset X$ будем называть полупространством, если и H, и $X \setminus H$ выпуклы.*

Нам также понадобятся гиперплоскости в кубических комплексах и некоторые их свойства.

Определение. *Серединным кубом M куба I^n будем называть сечение I^n плоскостью $x_i = \frac{1}{2}$ для одной из координат x_i.*

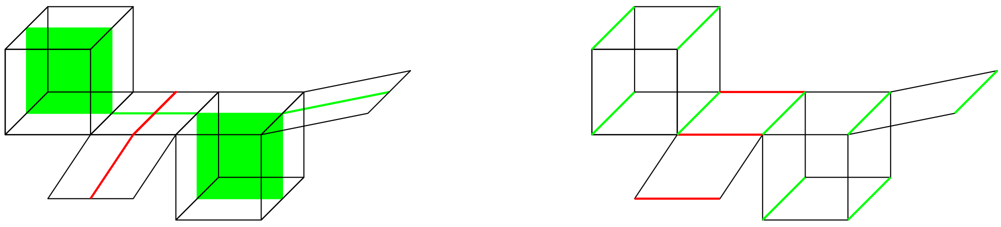


Очевидно, что для любой грани F куба I^n фиксированный серединный куб M либо не пересекается с ней, либо пересекается также по серединному кубу M_F грани F.

Определение. *Пусть Q — кубический комплекс, а S — множество всех серединных кубов для всех кубов $C \in Q$. Пусть $C_1, C_2 \in Q$ такие что $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$. Установим отношение: серединный куб $M_1 \subset C_1$ эквивалентен $M_2 \subset C_2$, если $M_1 \cap C_2 = M_2 \cap C_1$. Классы относительно транзитивно-рефлексивного замыкания этого отношения будем называть гиперплоскостями комплекса Q.*

Можно также дать определения гиперплоскостям через классы эквивалетности рёбер:

Определение. *Пусть Q — кубический комплекс. Установим отношение на множестве рёбер этого комплекса: $e_1 \sim e_2$ если существует квадрат $C^2 \in Q$, в котором e_1 и e_2 будут двумя противоположными гранями. Классы относительно транзитивно-рефлексивного замыкания этого отношения будем называть гиперплоскостями комплекса Q, причём если $e \in h$ для некоторого ребра e и гиперплоскости h, будем говорить, что e ортогонально h и писать $e \perp h$.*



Две гиперплоскости: как классы эквивалетных серединных кубов и как классы эквивалетных рёбер

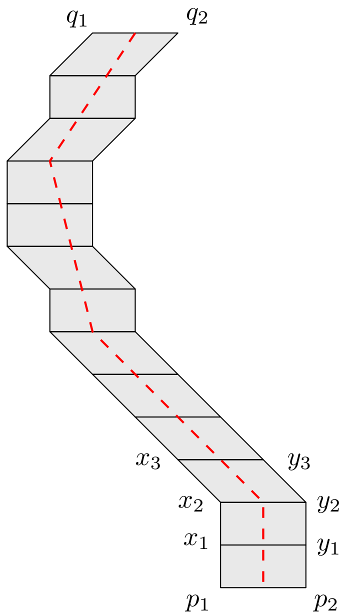
В CAT(0) пространствах гиперплоскости обладают дополнительными хорошими свойствами:

Теорема 4 (Ends of Group Pairs and Non-Positively Curved Cube Complexes, M.Sageev, теорема 4.10)**.** *Пусть Q — CAT(0) кубический комплекс. Тогда любая гиперплоскость (как объединение срединных кубов) не имеет самопересечений (то есть в каждом кубе содержится не более одного срединного куба) и делит Q на две компоненты связности.*

Теорема 5 (Ends of Group Pairs and Non-Positively Curved Cube Complexes, M.Sageev, теорема 4.13)**.** *Пусть Q — CAT(0) кубический комплекс, а $p, q \in Q$ вершины Q. Рассмотрим геодезический путь $x_0 = p, x_1, \ldots, x_n = q$ от p до q в графе $\mathrm{sk}_1 Q$ и набор гиперплоскостей $h_i, i = 0, \ldots, n-1$, $h_i \perp (x_i, x_{i+1})$. Тогда все h_i попарно различны.*

Теорема 6 (Ends of Group Pairs and Non-Positively Curved Cube Complexes, M.Sageev, теоремы 4.12 и 4.13)**.** *Пусть Q — CAT(0) кубический комплекс, h — некоторая гиперплоскость, p_1, p_2, q_1, q_2 — вершины Q, такие что пары p_1, q_1 и p_2, q_2 разделены h (лежат в разных компонентах связности). Также пусть $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in Q$. Тогда*

1. *Любая геодезическая из p_1 в q_1 в графе $\mathrm{sk}\, Q$ не пересекает h и проходит через вершины, граничные с h (то есть для каждой вершины геодезической существует выходящее из неё ребро ортогональное h).*
2. *Для любого пути $x_0 = p_1, \ldots, x_l = q_1$ из p_1 в q_1 не пересекающий h через граничные к h вершины существует сопряжённый относительно h путь $y_0 = p_2, \ldots, y_l = q_2$, такой что $(y_i, x_i) \in Q, (y_i, x_i, y_{i+1}, x_{i+1}) \in Q$ и $(y_i, x_i) \perp h$.*



Обозначим за $\Delta(x, y)$ множество гиперплоскостей, разделяющих вершины x и y (то есть таких что x и y оказываются в разных компонентах связности). Обозначим за G граф $\mathrm{sk}_1\, Q$ (Q — CAT(0) кубический комплекс). Естественную метрику на G будем обозначать $d(x, y)$.

Лемма 5. $d(x, y) = |\Delta(x, y)|$

Доказательство. Фиксируем произвольную геодезическую $[x, y]$ между x и y. Для любого ребра из $e \in [x, y]$ существует единственная ортогональная ей гиперплоскость, причем гиперплоскости, ортогональные разным рёбрам, различны. Также, очевидно, любая $h \in \Delta(x, y)$ ортогональна хотя бы одному ребру из $[x, y]$. Таким образом, существует биекция между ребрами $[x, y]$ и $\Delta(x, y)$. Следовательно, $|\Delta(x, y)| = d(x, y)$. □

Лемма 6. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1. $z \in I(x, y) = \{v : d(x, v) + d(v, y) = d(x, y)\}$;
2. *не существует гиперплоскости, разделяющей* z *и* $\{x, y\}$;

Доказательство. Заметим, что для любых x, y, z мы имеем $\Delta(x, y) = (\Delta(x, z) \setminus \Delta(y, z)) \cup (\Delta(y, z) \setminus \Delta(x, z))$. Действительно, для любой гиперплоскости h есть только 3 варианта:
1. h разделяет x и $\{y, z\} \Leftrightarrow h \in \Delta(x, z) \setminus \Delta(y, z)$
2. h разделяет z и $\{x, y\}$
3. h разделяет y и $\{x, z\} \Leftrightarrow h \in \Delta(y, z) \setminus \Delta(x, z)$

При этом $h \in \Delta(x, y)$ только в первом в третьем случае.

Следовательно, $|\Delta(x, y)| = |\Delta(x, z)| + |\Delta(z, y)| - 2|\Delta(x, z) \cap \Delta(z, y)|$. Далее, $z \in I(x, y) \Leftrightarrow d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \Leftrightarrow |\Delta(x, y)| = |\Delta(x, z)| + |\Delta(z, y)|$. Это эквивалентно тому, что $\Delta(x, z) \cap \Delta(z, y) = \varnothing$. □

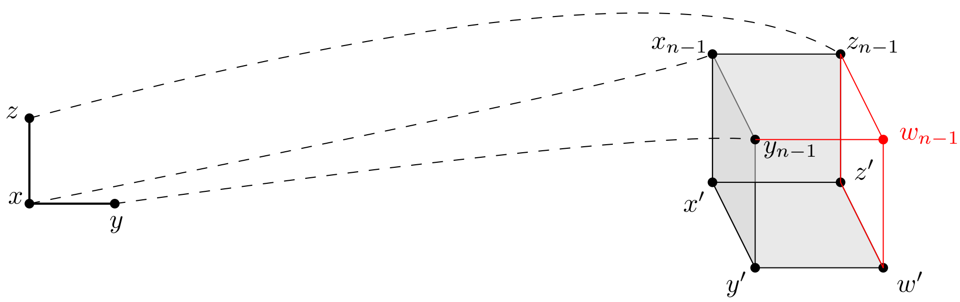
Следствие: любая гиперплоскость делит (G, d) на два полупространства.

Лемма 7. *Пусть* $(x, y), (x, z) \in G$ *для некоторых вершин* x, y, z. *Пусть также* $h_1 \perp (x, y)$ *и* $h_2 \perp (x, z)$ *для гиперплоскостей* h_1 *и* h_2. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1. $h_1 \cap h_2 \neq \varnothing$
2. *существует вершина* w, *такая что* $(y, w), (z, w) \in G$, $(x, y, z, w) \in Q$

Доказательство. Понятно, что из второго следует первое: в этом случае h_1 и h_2 пересекаются в квадрате (x, y, z, w). Покажем, что из первого следует второе.

Пусть h_1 и h_2 пересекаются в некотором квадрате (x', y', z', w'). Обозначим точки так, чтобы пары $\{x, x'\}$, $\{y, y'\}$, $\{z, z'\}$ не разделялись h_1 и h_2. Рассмотрим геодезическую $\gamma = (x_0 = x, \ldots, x_n = x')$ от x до x'. Так как и x, и x' — граничные вершины обоих гиперплоскостей, геодезическая будет проходить по границе и h_1, и h_2.

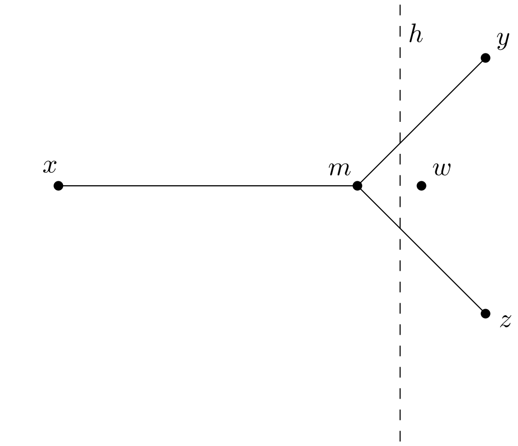
Возьмём также сопряжённые к γ относительно h_1 и h_2 пути $y_0 = y, \ldots, y_n = y'$ и $z_0 = z, \ldots, z_n = z'$. □



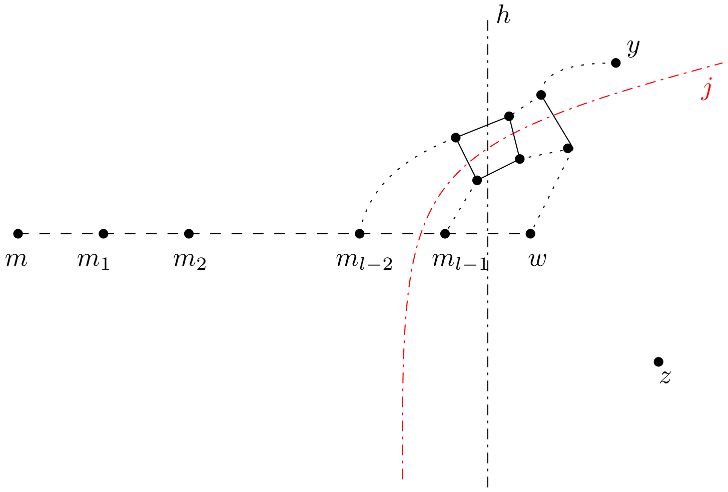
Из теоремы 6 $(x', y', x_{n-1}, y_{n-1}) \in Q$ и $(x', z', x_{n-1}, z_{n-1}) \in Q$. Так как Q — CAT(0) комплекс, должен существовать куб $(x', y', z', w', x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, w_{n-1}) \in Q$. Ясно, что гиперплоскости пересекаются в квадрате $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, w_{n-1})$. Продолжая по индукции, получаем требуемое утверждение.

Лемма 8. *Для любых вершин x, y, z пересечение $I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z)$ непусто.*

Возьмём $m \in I(x,y) \cap I(x,z)$ с максимальным расстоянием от x. Покажем, что $m \in I(y,z)$. Пусть не так. Тогда существует гиперплоскость h, разделяющая m и $\{y,z\}$.



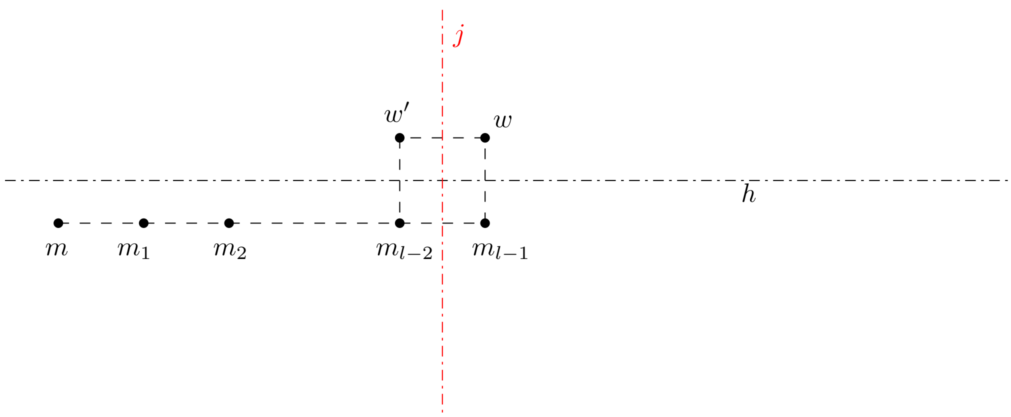
Возьмём пару (h, w), такую что $\{w, y, z\}$ отделены от m гиперплоскостью h и расстояние $d(m,w)$ минимально. Покажем, что $d(m,w) = 1$. Для этого рассмотрим геодезическую $m_0 = m, \ldots, m_l = w$. Гиперплоскость h ортогональна ребру (m_{l-1}, w) этой геодезической (если бы она была ортогональна другому ребру (m_i, m_{i+1}), то можно было взять за w вершину m_{i+1}).



Пусть $d(m,w) \geq 1$. Рассмотрим гиперплоскость j, ортогональную (m_{l-1}, m_{l-2}). Она не может отделять m от $\{y,z\}$, так как тогда пара (m_{l-1}, j) минимизировала бы расстояние $d(m, m_{l-1})$. Пусть, например, y лежит в той же компоненте связности, что и m.

Гиперплоскости h и j пересекаются. Это можно показать, например, так: возьмём путь из y в w, лежащий в одной компоненте связности относительно h. j разделяет y и w, так на этом пути будет ребро, ортогональное j. Вдоль этого ребра можно двигаться по квадратам до ребра (m_{l-2}, m_{l-1}) (теорема 6). Очевидно, что в одном из квадратов на пути h и j пересекутся.

Следовательно, $(m_{l-2}, m_{l-1}) \perp j$ и $(m_{l-1}, w) \perp h$. По предыдущей лемме тогда существует вершина w' и квадрат $(m_{l-2}, m_{l-1}, w', w)$.

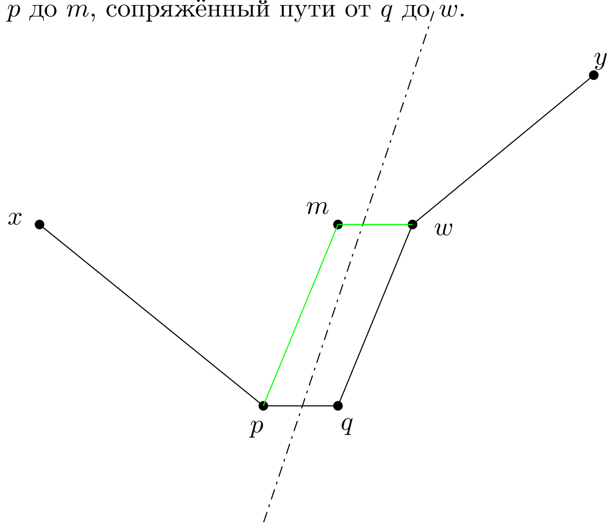


Но тогда вместо пары (h, w) нужно было взять пару (h, w'), так как $d(m, w') = d(m, w) - 1$, противоречие. Следовательно, $d(m, w) = 1$ и $\Delta(m, w) = \{h\}$.

Итак, $m \in I(x,y)$, $m \in I(x,z)$ и m отделено от $\{y,z,w\}$ гиперплоскостью h, причём h это единственная гиперплоскость, разделяющая m и w.

Пусть $w \notin I(x,y)$ тогда существует гиперплоскость, разделяющая w и $\{x,y\}$. Так как $m \in I(x,y)$, она разделяет w и $\{x,y,m\}$, в частности, она разделяет m и w. Но есть только одна гиперплоскость, разделяющая w и m — это h, но она также разделяет x и y. Следовательно, $w \in I(x,y)$. Аналогично, $w \in I(x,z)$. Покажем теперь, что $d(x,w) > d(x,m)$, что приведёт нас к противоречию с выбором m.

Покажем, что существуют геодезические $[x,y]$ и $[x,z]$, содержащие m, w и ребро между ними. Тогда $d(x,w) = d(x,m)+1$. Возьмём геодезическую $[x,y]$, проходящую через w. На части геодезической от x до w она пересекает h. Пусть, например, $(p,q) \perp h$. Так как отрезок от q до w тоже геодезическая, по теореме 6 это отрезок проходит через граничные к h вершины. Возьмём путь от p до m, сопряжённый пути от q до w.



Длина сопряженного пути равна длине пути от q до w. Соответственно, пути $x \to p \to m \to w \to y$ имеет ту же длину, что и исходная геодезическая, так что это тоже геодезическая между x и y, в которой лежат обе вершины m и w.

Следовательно, $w \in I(x,y) \cap I(x,z)$ и $d(x,w) > d(x,m)$, что противоречит выбору m (как наиболее удалённой точки от x в $I(x,y) \cap I(x,z)$. Исходно мы предполагали, что $m \notin I(y,z)$. Следовательно, $m \in I(y,z)$ и $I(y,z) \cap I(x,y) \cap I(x,z) \neq \varnothing$.

Теорема 7. *Граф G — медианный.*

Доказательство. В предыдущей лемме мы показали, что $I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z) \neq \varnothing$ для любых вершин x,y,z. Осталось показать, что $|I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z)| = 1$. Пусть $v,w \in I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z)$. Так как $d(v,w) \geq 1$ существует гиперплоскость, разделяющая v и w. Заметим, что какие-то две точки из x,y,z лежат в одном полупространстве H, соответствующем этой гиперплоскости. Следовательно, отрезок между этими точками лежит в этом полупространстве, и, соответственно, v и w лежат в нём, противоречие. $\square$

Важное замечание: пусть S — множество полупространств (соответствующим гиперплоскостям) в G. Определим отображение $\phi : G \to \{0,1\}^S : x \mapsto \{V \mapsto [x \in V]\}$. Это отображение инъективно (так как любые две точки разделяются гиперплоскостью). Если на множестве $\{0,1\}^S$ ввести естественную структуру медианной алгебры (т.е. брать медиану покомпонентно), ϕ — это морфизм медианных алгебр. Следовательно, G вкладывается в построеный куб (как медианная алгебра).

Важное замечание №2: по медианному графу можно построить кубический комплекс, «закрасив» все кубы. Верна следующая теорема:

Теорема 8 («Graphs of Some CAT(0) Complexes», Victor Chepoi, теорема 6.1; «Poc Sets, Median Algebras and Group Actions», Martin Roller, теорема 10.3)**.** *Кубический комплекс, построенный по медианному графу, является CAT(0) комплексом. Отображения взятия одномерного скелета CAT(0) комплекса и «кубизации» медианного графа взаимообратны.*

Интересное замечание: существует следующая характеризация медианных графов (которая, в принципе, следует из вышесказанного):

Теорема 9 («The interval function of a graph», H.M.Mulder, теорема 3.2.7)**.** *Конечный граф (G, d_G) медианный тогда и только тогда, когда он изоморфен замкнутому относительно взятия медианы подграфу гиперкуба $(C = \{0,1\}^n, d_C)$, такому что $d_G(x,y) = d_C(x,y)$.*

Кубические CAT(0) комплексы и сдавливание

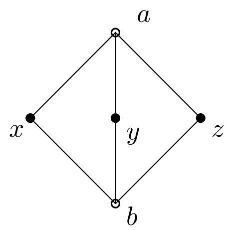
В этом разделе мы хотим устновить необходимые и достаточные условия сдавливания кубических CAT(0) комплексов. Но для начала нам нужно установить несколько простых свойств медианных графов.

Очевидно, в медианном графе не может быть треугольников, так как если есть треугольник с вершинами x, y, z, то $I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z) = \{x,y\} \cap \{x,z\} \cap \{y,z\}$. Также ясно, что в нём нет «равнобедренных треугольников с основанием 1»:

Утверждение (отсутствие равнобедренных треугольников с основанием 1)**.** *Пусть G — медианный граф. Тогда не существует трёх вершин x, y, z, таких что $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = d(y,z)$.*

Доказательство. Ясно, что $I(x,y) = \{x,y\}$. При этом $y \notin I(x,z)$ и $x \notin I(y,z)$, так что $I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z) = \varnothing$. □

В медианных графах кроме треугольников нет подграфа $K_{2,3}$, так как во-первых $d(x,y) = d(x,z) = d(y,z) = 2$ так как в G нет треугольников, а во-вторых $a, b \in I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z)$, поэтому $|I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z)| > 1$.

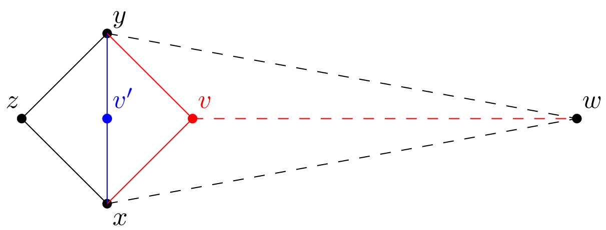


Также в медианном графе выполняется следующее свойство:

Утверждение (свойство четырёхугольника)**.** *Пусть x, y, z, w — вершины медианного графа G, такие что $d(x,z) = d(y,z) = 1$, $d(x,w) = d(y,w) = d(z,w) - 1$. Тогда существует единственная вершина v, такая что $d(x,v) = d(y,v) = 1$ и $d(v,w) = d(x,w) - 1$.*

Доказательство. Так как в G нет треугольников, $d(x,y) = 2$. Пусть $v = m(x,y,w)$. Ясно, что $d(x,v) = d(y,v) = 1$ (так как $x \neq v$ и $y \neq v$) и $v \neq z$. Следовательно, $d(v,w) = d(x,w) - 1 = d(y,w) - 1$.

Если же существует две таких вершины v' и v, то подграф на вершинах $\{x, y, z, v, v'\}$ это $K_{2,3}$, противоречие с медианностью G. □



Утверждается, что верно следующее:

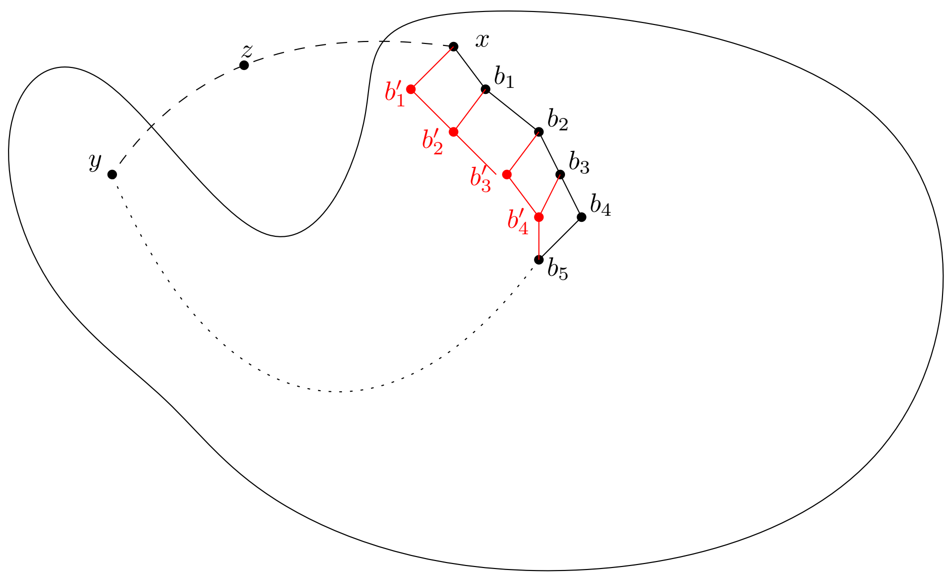
Теорема (H. J. Bandelt, «Characterizing median graphs»)**.** *Граф G медианный тогда и только тогда, когда в нём нет треугольников и подграфов $K_{2,3}$, и выполняется свойство четырёхугольника.*
(проблема в том, что статья «Characterizing median graphs» нигде, похоже, не публиковалась, а альтернативных доказательств мне найти не удалось)

Далее мы хотим понять некоторые свойства медианных графов как медианных пространств.

Лемма 9. *Пусть G — медианный граф. Подграф $H \subset G$ выпуклый тогда и только тогда, когда он 2-выпуклый (то есть для любых $x, y \in H$ таких что $d(x,y) = 2$ выполнено $I(x,y) \subset H$).*

Доказательство. Естественно, нам нужно доказывать, что из 2-выпуклости следует выпуклость. Докажем по индукции: пусть $\forall x, y \in H : d(x,y) \leq n$ имеем $I(x,y) \subset H$. Рассмотрим x, y такие что $d(x,y) = n+1$. Фиксируем произвольный $z \in I(x,y)$. Мы хотим показать, что $z \in H$.

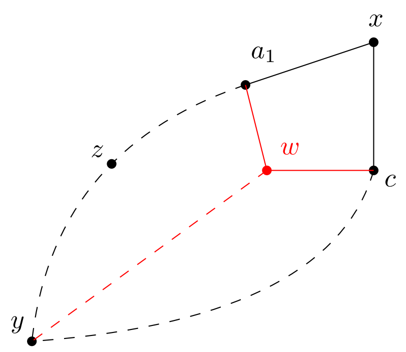
Выберем геодезическую $a_0 = x, \ldots, a_{n+1} = y$, такую что $a_k = z$. Построим также путь минимальной длины $b_0 = x, b_1, \ldots, b_l = y$ из x в y в H. Так как G медианный и в нём нет равносторонних треугольников с единичным основанием, $d(b_{i+1}, y) = d(b_i, y) \pm 1$. При этом $d(b_0, y) = n+1$ и $d(b_l, y) = 0$. Если $d(b_1, y) = d(x,y) - 1$ положим $c = b_1$. Иначе найдем первый b_i, такой что $d(b_{i+1}, y) = d(b_i, y) - 1$. □



Имеем $d(b_i, y) + 1 = d(b_{i+1}, y) = d(b_{i-1}, y)$. Следовательно, по свойству четырёхугольника существует и единственна вершина b'_i, такая что $d(b'_i, y) = d(b_i, y) - 2$. Если $b'_i = b_{i-2}$, то выбранный нами путь был бы не минимальной длины, так что b'_i это новая вершина. Также так как $d(b_{i-1}, b_{i+1}) = 1$ (из минимальности) $b'_i \in I(b_{i-1}, b_{i+1})$ и, следовательно, $b'_i \in H$ из 2-выпуклости.

Теперь у нас есть тройка $d(b_{i-1}, y) + 1 = d(b'_i, y) = d(b_{i-2}, y)$. Для неё есть вершина b'_{i-1}, такая что $d(b'_{i-1}, y) = d(b_{i-1}, y) - 2$. Аналогично, это не b_{i-3} так как наш путь минимальной длины и $b'_{i-1} \in H$ из 2-выпуклости.

Продолжая процедуру, мы найдём $b'_1 \in H$, такой что $d(b'_1, y) = d(b_1, y) - 2 = d(x, y) - 1$ (так как $d(b_1, y) = d(x, y) + 1$). Положим $c = b'_1$.



Теперь у нас есть $c \in H$, такая что $d(c, y) = d(a_1, y) = d(x, y) + 1$. По свойству четырёхугольника существует вершина $w : d(w, y) = d(c, y) - 1$, соединённая с a_1 и c. Так как $w \in I(c, y)$, по предположению индукции $w \in H$. Так как $a_1 \in I(w, x)$ из 2-выпуклости $a_1 \in H$. И, наконец, по предположению индукции $z \in I(a_1, y) \subset H$.

Определение. *Гейтом точки x в подмножестве Y метрического пространства X называется точка $a \in Y$, такая что $a \in I(x, y)$ для любого $y \in Y$. Если для любой точки $x \in X$ существует гейт во множестве Y, то Y называется гейтированным.*

Утверждение. *Если гейт точки x в Y существует, то он единственен.*

Доказательство. Пусть есть два гейта a и b. Тогда $a \in I(x, b)$ и $b \in I(x, a)$ то есть $d(x, a) + d(a, b) = d(x, b)$ и $d(x, b) + d(a, b) = d(x, a)$, откуда $d(a, b) = 0$. □

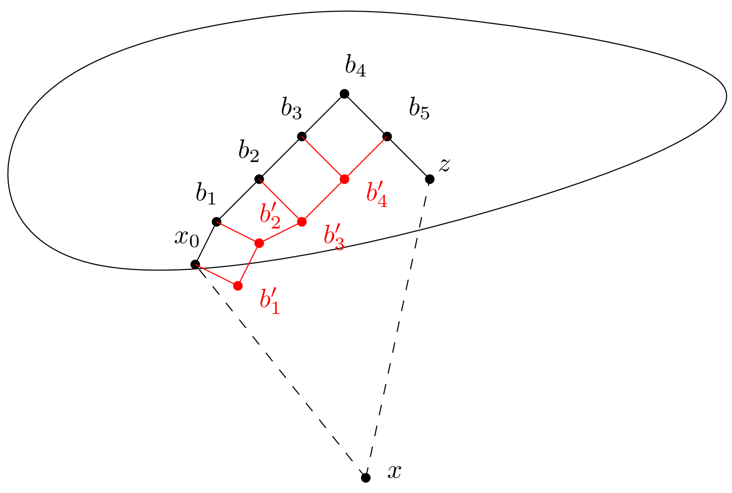
Утверждение. *Пусть известно, что в Y существует гейт точки x. Тогда a — гейт точки x во множестве Y тогда и только тогда, когда $I(x, a) \cap Y = \{a\}$.*

Доказательство. Если b — гейт x в Y, то $b \in I(x, a) \cap Y = \{a\}$, следовательно, $b = a$. С другой стороны, если a — гейт и $a \neq b \in I(x, a) \cap Y$, то b — тоже гейт, противоречие. □

Лемма 10. *Пусть G — связный медианный граф. Любой выпуклый подграф $H \subset G$ гейтирован.*

Доказательство. Возьмём произвольную вершину x и вершину x_0, такую что $d(x, x_0) = d(x, G)$.

Пусть $z \in H$. Покажем, что $x_0 \in I(x, z)$. Пусть это не так. Выберем геодезическую $b_0 = x_0, \ldots, b_l = z$. Она в силу выпуклости лежит в H. Ясно, что $d(b_1, x) = d(x_0, x) + 1$ и $d(b_{i+1}, x) = d(b_i, x) \pm 1$. Также так как $d(x, z) < d(x, x_0) + d(x_0, z)$, существует i, такой что $d(b_i, x) + 1 = d(b_{i-1}, x) = d(b_{i+1}, x)$. □

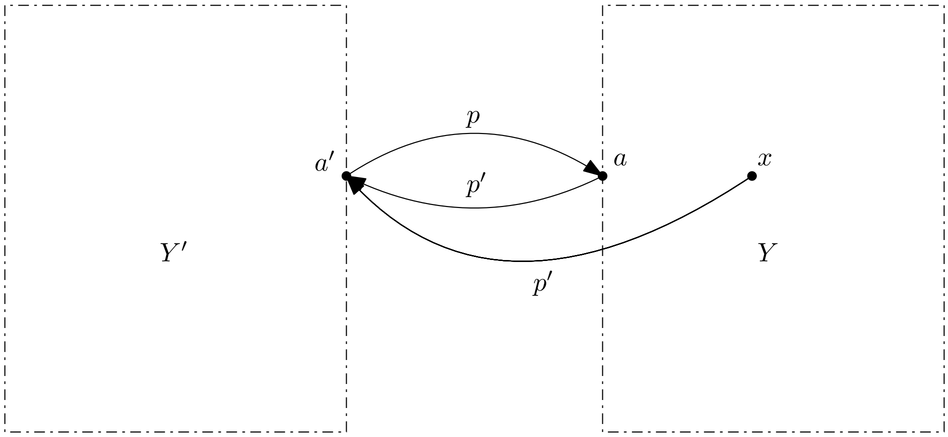


Воспользовавшись свойством прямоугольника, возьмём b'_i, такую что $d(b'_i, x) = d(b_i, x) - 2$, $d(b'_i, b_{i-1}) = d(b'_i, b_{i+1}) = 1$. Она лежит в H в силу выпуклости H и не равна b_{i-2}, так как путь геодезический. Далее рассматриваем тройку (b'_i, b_{i-1}, b_{i-2}) и берём $b'_{i-1} \in H$ и т.д. В конце находим $b'_1 \in H$, такой что $d(b'_1, x) = d(b_1, x) - 2 = d(x_0, x) - 1$, противоречие.

Лемма 11. *Пусть Y и Y' — два гейтированных подпространства метрического пространства X, $p : X \to Y$ и $p' : X \to Y'$ — гейт-функции (сопоставляющие точкам их гейты). Тогда $p' \circ p \circ p'\big|_Y = p'\big|_Y$.*

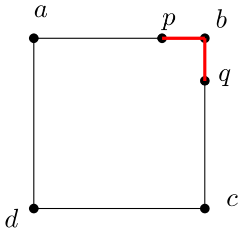
Доказательство. Пусть $x \in Y$, $a' = p'(x)$ и $a = p(a')$. Мы хотим показать, что $p'(a) = a'$ или, эквивалетно, $I(a, a') \cap Y' = \{a'\}$.

Мы знаем, что $I(a, a') \cap Y = \{a\}$ и $I(x, a') \cap Y' = \{a'\}$. Также $a \in I(a', x)$ так как a — гейт a' в Y. Таким образом, $I(a, a') \subset I(a', x)$ и $I(a, a') \cap Y' = I(a', x) \cap Y' = \{a'\}$. □



Утверждение. *Пусть Q — CAT(0) кубический комплекс, (a, b, c, d) — 4-цикл в $\mathrm{sk}_1 Q$. Тогда в Q существует квадрат (a, b, c, d).*

Доказательство. Заметим, что $d_Q(a, c) \le 2$. Пусть $(a, b, c, d) \notin Q$. Если $d_Q(a, c) = 2$, то в Q есть две геодезических между a и c, противоречие. Если же $d_Q(a, c) < 2$, то есть всего 3 варианта (так как a и c это вершины Q): $d_Q(a, c) = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ (путь должен проходить внутри какого-то куба от вершины к вершине). В любом случае, длина геодезической между $q \in [a, b]$ и $v \in [c, b]$ в некоторой окрестности b будет больше, чем длина геодезической между соответствующими точками в треугольнике сравнения. □



Лемма 12. *Пусть Q — CAT(0) кубический комплекс. Тогда гиперплоскость делит медианный граф $\mathrm{sk}_1 Q$ на два полупространства и, обратно, любые два полупространства разделены некоторой гиперплоскостью.*

Доказательство. То, что гиперплоскость делит $G = \mathrm{sk}_1 Q$ на два полупространства мы доказали в лемме 6. Покажем обратное.

Пусть H_1 и H_2 — два взаимодополняющих полупространства в G. Они выпулы, поэтому гейтированы. Обозначим гейт функции за p_1 и p_2. Возьмём $x_1 \in p_1(H_2)$, $x_2 = p_2(x_1)$. По предыдущей лемме $x_1 = p_1(x_2)$, следовательно $I(x_1, x_2) = \{x_1, x_2\}$ и $d(x_1, x_2) = 1$.

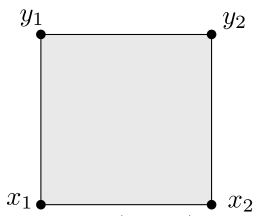
Следовательно, для любой $y \in H_1$ мы имеем $x_1 \in I(x_2, y)$, так что $d(x_1, y) < d(x_2, y)$. Аналогично для $y \in H_2$ имеем $d(x_1, y) > d(x_2, y)$. Получаем, что

$$H_1 = \{y \mid d(x_1, y) < d(x_2, y)\}$$
$$H_2 = \{y \mid d(x_1, y) > d(x_2, y)\}$$

Заметим, что любая пара (y_1, y_2), такая что $y_1 \in H_1$, $y_2 \in H_2$ и $d(y_1, y_2) = 1$ генерирует ту же пару полупространств, так как $I(y_1, y_2) = \{y_1, y_2\}$ и $p_1(y_2) = y_1$, $p_2(y_1) = y_2$. Следовательно, мы можем ввести отношение эквивалетности: $(x_1, x_2) \sim_A (y_1, y_2)$ если (x_1, x_2) генерирует полупространств H_1 и H_2, и выполнено $y_1 \in H_1$, $y_2 \in H_2$, $d(y_1, y_2) = 1$. Очевидно, классы эквивалетности ориентированных рёбер относительно $\sim_A$ это в точности упорядоченные пары взаимодополняющих полупространств.

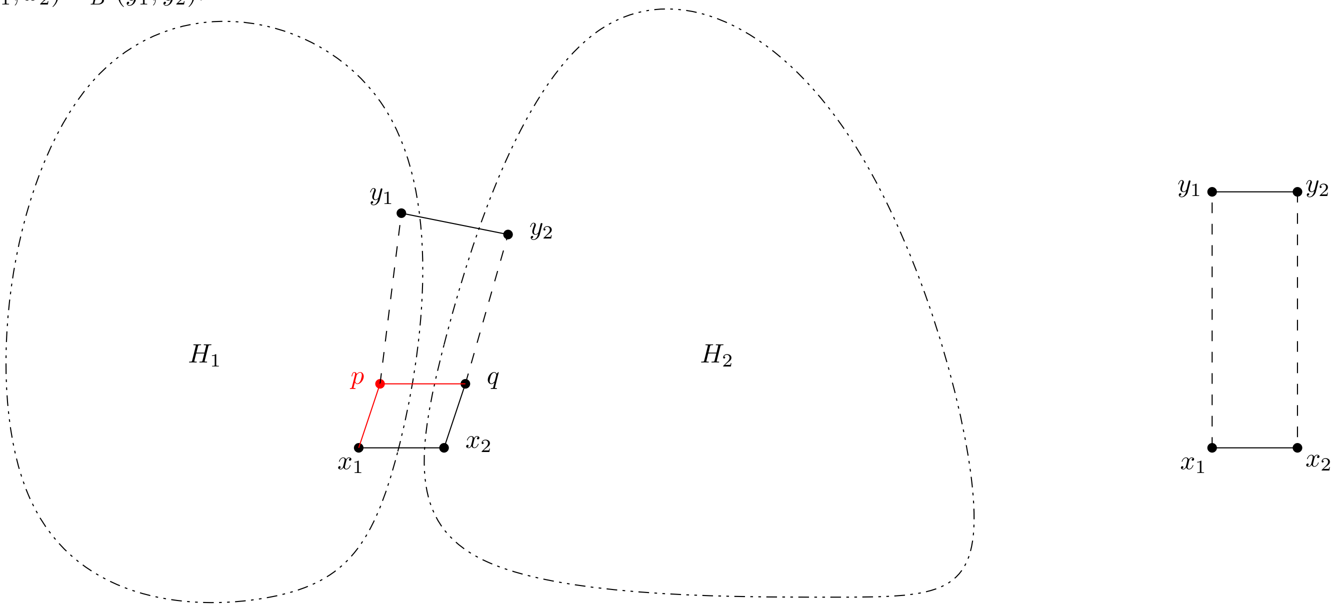
В данном случае нам удобно будет считать, что гиперплоскости также ориентированные, то есть мы определяем гиперплоскость как класс эквивалентности ориентированных рёбер $\mathrm{sk}_1 Q$ (для каждого ребра мы заводим два ориентированных ребра). Таким образом, пара компонент связности, на которые разделится Q любой гиперплоскостью, также будет упорядоченна. Напомним, эквивалентность $\sim_B$, определяющая гиперплоскость, задаётся так: $(x_1, x_2) \sim_B (y_1, y_2)$ если и только если существует путь от ребра (x_1, x_2) до ребра (y_1, y_2) в квадратах через противоположные рёбра. Покажем, что $\sim_A = \sim_B$. То, что $\sim_B \implies \sim_A$ уже было доказано (если $(x_1, x_2) \sim_B (y_1, y_2)$ то пары $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$ это пары гейтов друг для друга относительно выпуклых полупространств, на которые делит G гиперплоскость). □

Покажем, что $(x_1, x_2) \sim_A (y_1, y_2) \implies (x_1, x_2) \sim_B (y_1, y_2)$ индукцией по $D = \max(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2))$. При $D = 1$ мы имеем квадрат (x_1, x_2, y_1, y_2), и по определению $(x_1, x_2) \sim_B (y_1, y_2)$. Пусть $D > 1$.



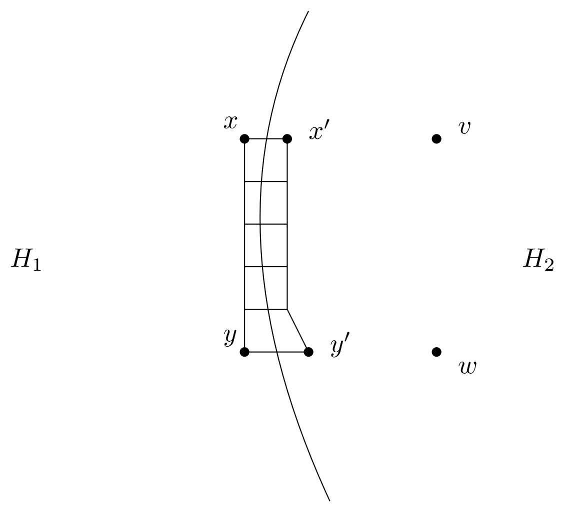
Пусть $x_1, y_1 \in H_1$ и $x_2, y_2 \in H_2$. Заметим, что $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2) \pm 1$, так как из-за выпуклости H_1 и H_2 мы имеем $d(x_1, y_1) < d(x_2, y_2) + 2$ и $d(x_2, y_2) < d(x_1, y_1) + 2$.

Возьмём геодезическую между x_2 и y_2 (она, естественно, будет лежать в H_2) и точку q на ней, такую что $d(x_2, q) = 1$, $d(q, y_2) = d(x_2, y_2) - 1$. Пусть $p = m(q, x_1, y_1)$. Так как $p \in I(x_1, y_1)$, $p \in H_1$. Если $p = x_1$, то $d(q, y_1) = d(q, x_1) + d(x_1, y_1) = 2 + d(x_1, y_1)$. С другой стороны, $d(q, y_1) \leq d(x_2, y_2) - 1 + 1 \leq d(x_1, y_1) + 1$. Следовательно, $p \neq x_1$ и $d(x_1, p) = d(q, p) = 1$ и $d(p, y_1) = d(x_1, y_1) - 1$. Квадрат $(p, q, x_1, x_2) \in Q$, поэтому $(x_1, x_2) \sim_B (p, q)$, а $(p, q) \sim_B (y_1, y_2)$ по предположению индукции. Следовательно, $(x_1, x_2) \sim_B (y_1, y_2)$.



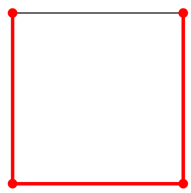
Лемма 13. *Пусть Q — кубический CAT(0) комплекс, H_1 и H_2 — полупространства, p_1, p_2 — гейт функции. Тогда $p_1(H_2)$ и $p_2(H_1)$ выпуклы.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать выпуклость $p_1(H_2)$. Пусть $x = p_1(v)$ и $y = p_1(w)$. Обозначим $x' = p_2(x)$ и $y' = p_2(y)$. По теореме 6 существует путь $\gamma \subset H_1$ между x и y и сопряжённый ему пусть $\gamma' \subset H_2$ между x' и y'. Очевидно, $p_1(\gamma') = \gamma$, так что $\gamma \subset p_1(H_2)$. $\square$



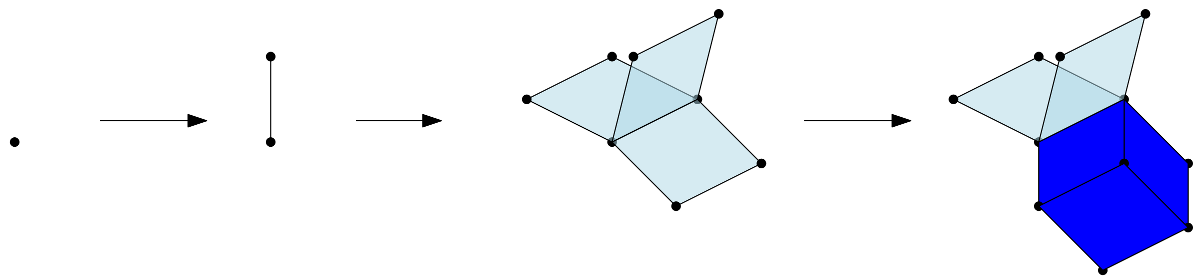
Необходимые условия сдавливаемости кубических CAT(0) комплексов

Определение. *Связный подкомплекс K кубического комплекса Q называется кубоидом, если для любого куба $C \in Q$ или $K \cap C = \varnothing$, или $K \cap C = F < C$.*



Нерегулярный подкомплекс

Определение. *Кубический комплекс Q называется регулярно кубически сдавливаемым, если существует последовательность подкомплексов $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$, где $Q_n = Q$, а Q_0 это точка, и для каждого $k = 0, \dots, n-1$ существует набор подкомплексов-кубоидов $S_{k,j}$, $j \in J_k$ подкомплекса Q_k, такой что $Q_{k+1} = Q_k \cup \bigcup_j (S_{k,j} \times I)$. Здесь у I берётся кубизация $\{0, 1, [0,1]\}$ и $S_{k,j} \times 0$ идентифицируется с $S_{k,j}$.*

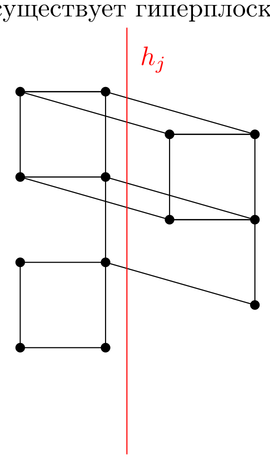


Определение. *Гиперплоскость h в кубическом CAT(0) комплексе Q называется экстремальной, если одно из полупространств, на которые она делит Q, минимально по включению (среди полупространств). Очевидно, в этом случае другое максимально.*

Лемма 14. *Пусть Q — кубический CAT(0) комплекс, $\{L_j,\ j \in J\}$ — набор его связных подкомплексов. Тогда множество гиперплоскостей H комплекса $Q' = Q \cup \bigcup_{j \in J} S_j \times I$ состоит из гиперплоскостей комплекса Q и набора попарно непересекающихся экстремальных гиперплоскостей $\{h_j,\ j \in J\}$.*

Доказательство. Заметим, что в Q' относительно Q добавились только рёбра вида $v \times [0,1]$ и $e \times 1$ для вершин $v \in S_j$ и рёбер $e \in S_j$ Обозначим за $\sim$ эквивалетность на рёбрах, определяющую гиперплоскости. Ясно, что $e \times 1 \sim e \times 0$, и рёбра вида $v \times [0,1]$ могут быть эквивалентны только рёбрам этого же вида. Также понятно, что $e_1 \sim e_2$ в Q тогда и только тогда, когда $e_1 \sim e_2$ в Q': любую цепочку эквивалетностей в Q', содержащую рёбра вида $e \times 1$ можно «опустить», заменив их на $e \times 0 = e$. Следовательно, среди «старых» рёбер и «новых» рёбер вида $e \times 1$ новых гиперплоскостей не появится.

С другой стороны, так как S_j связны, $v \times [0,1] \sim w \times [0,1]$ при $v, w \in S_j$. Очевидно, что $v \times [0,1] \not\sim w \times [0,1]$ если $v \in S_j$, $w \in S_k$ и $j \neq k$. Это даёт набор новых гиперплоскостей $\{h_j,\ j \in J\}$. Ясно, что они не пересекаются. Также ясно, что они будут экстремальными, так как не существует гиперплоскостей в $S_j \times 1 = H_j$, не пересекающих h_j. □



Определение. *Шириной кубического CAT(0) комплекса называется максимальная длина цепочки вложеных полупространств.*

Определение. *n-раскраской набора гиперплоскостей H комплекса Q называется отображение $c : H \to \{1, \dots, n\}$, такое что если h_1 и h_2 пересекаются, то $c(h_1) \neq c(h_2)$. H допускает конечную раскраску если для некоторого n существует n-раскраска H.*

Теорема 10. *Если кубический CAT(0) комплекс Q сдавливаем, то он имеет конечную ширину, и набор его гиперплоскостей допускает конечную раскраску.*

Доказательство. Покажем по индукции по количеству шагов сдавливания. Для точки это очевидно. Пусть для Q это верно. Покажем, что и для $Q' = Q \cup \bigcup_{j\in J} S_j$ это верно.

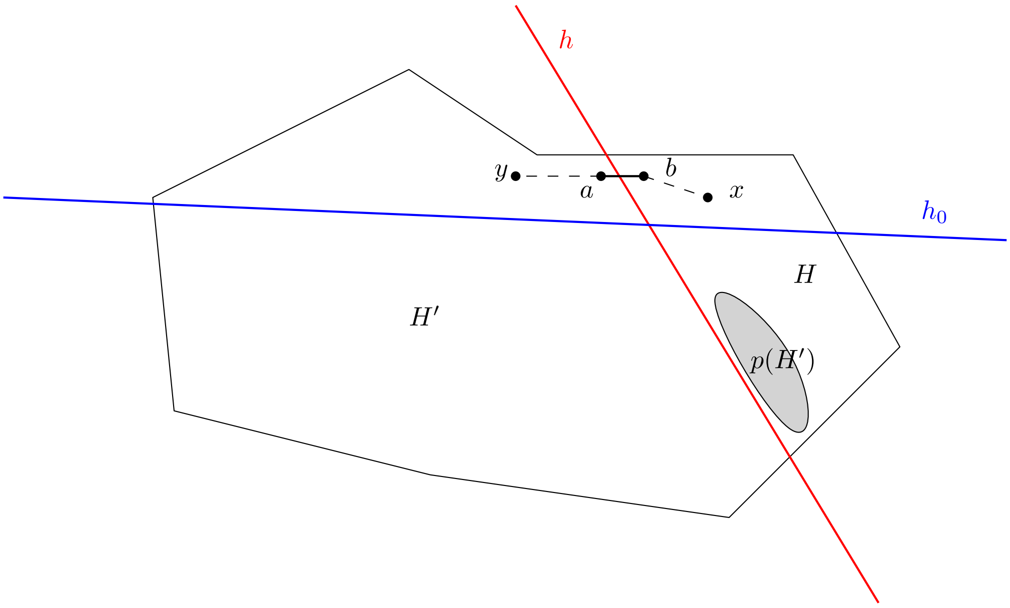
По предыдущей лемме все новые гиперплоскости в Q' экстремальны. Следовательно, все новые полупространства максимальны или минимальны. Значит, они могут появляться только в конце или в начале цепочек вложеных полупространств. Следовательно, $\operatorname{width}(Q') \le \operatorname{width}(Q) + 2$.

По предыдущей лемме все новые гиперплоскости в Q' попарно не пересекаются, так что их можно покрасить в один цвет. По предположению индукции, гиперплоскости Q были раскрашиваемы в n цветов, следовательно, гиперплоскости Q' можно раскрасить в $n+1$ цвет. $\square$

Достаточные условия сдавливаемости кубических CAT(0) комплексов

Лемма 15. *Пусть Q — кубический CAT(0) комплекс, $G = \operatorname{sk}_1 Q$, h — экстремальная гиперплоскость, которая делит G на два полупространства: минимальное H и максимальное H'. Пусть $p' : G \to H'$ — гейт функция. Тогда имеет место изоморфизм $G \cong (G \setminus H) \cup (p'(H) \times \{0,1\})$ который индуцирует изоморфизм $Q \cong (Q \setminus H) \cup (|p'(H)| \times [0,1])$.*

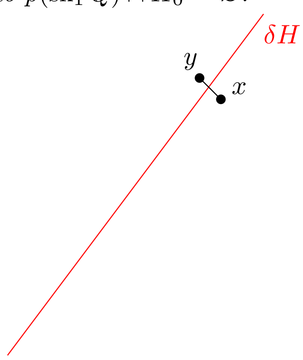
Доказательство. Пусть $p : G \to H$ — гейт функция для H. Покажем сначала, что $p(H') = H$. Пусть это не так. Возьмём $x \in H \setminus p(H')$. Так как $p(H')$ выпукло, можно взять гиперплоскость h_0, отделяющую x от $p(H')$ (достаточно взять гейт x в $p(H')$ и отделить x от гейта). Обозначим за H_0 полупространство относительно h_0, содержащее x. H_0 не содержится в H, так как H минимально. Возьмём тогда $y \in H_0 \cap H'$. Геодезическая из x в y пересечёт h по некоторому ребру (a, b), $a \in H'$, $b \in H$. Ясно, что $b = p(a) \in p(H')$, а это противоречит выбору h_0 (так как $b \in H_0$). $\square$



По лемме 11 $p(p'(p(H'))) = p(p'(H)) = p(H') = H$, следовательно p — это изоморфизм графов $p'(H)$ и H (то, что это изоморфизм графов следует, например, из теоремы 6). Так как между $y \in p'(H)$ и $x = p(y)$ всегда есть ребро, $p'(H) \cup H \cong H \times \{0,1\}$, откуда получаем изоморфизм $G \cong (G \setminus H) \cup (p'(H) \times \{0,1\})$. Учитывая, что кубуляция медианного графа даст исходный комплекс (теорема 8), линейное продолжение этого изоморфизма даст изоморфизм $Q \cong (Q \setminus H) \cup (|p'(H)| \times [0,1])$.

Лемма 16. *Пусть Q — кубический CAT(0) комплекс, h_j, $j \in J$ — набор попарно непересекающихся экстремальных гиперплоскостей Q. Обозначим за H_j минимальное полупространство, соответствующее h_j, а за p_j — гейт фунцию $(\operatorname{sk}_1 Q) \setminus H_j$. Пусть $Q' = Q \setminus \bigcup_{j\in J} H_j$. Тогда $Q \cong Q' \cup \bigcup_{j\in J} (|p_j(H_j)| \times I)$*

Утверждение. *Пусть $p : \operatorname{sk}_1 Q \to H$ — гейт функция некоторого полупространства H, H_0 — некоторое минимальное полупространство. Обозначим за δH и δH_0 гиперплоскости, соответствующие этим полупространствам. Тогда если $\delta H \cap \delta H_0 = \varnothing$, то $p(\operatorname{sk}_1 Q) \cap H_0 = \varnothing$.*



Пусть $x \in p(\operatorname{sk}_1 Q)$ и $x \in H_0$. Первое означает, что из x выходит ребро (x, y), ортонональное δH. Так как δH_0 не ортогональна (x, y), $y \in H_0$. Следовательно, H_0 не содержится целиком ни в H, ни в $H' = \operatorname{sk}_1 Q \setminus H$. Так как H_0 минимальное, $H_0 \cap H \ne \varnothing$, $H_0 \cap H' \ne \varnothing$, $H_0' \cap H' \ne \varnothing$ и $H_0' \cap H' \ne \varnothing$ (где $H_0' = \operatorname{sk}_1 Q \setminus H_0$). Но отсюда следует, что $\delta H \cap \delta H_0 \ne \varnothing$, противоречие.

Пусть $G = \mathrm{sk}_1 Q$, а $H'_j = G \setminus H_j$ и p'_j это гейт функции $G \to H_j$. В предыдущей лемме мы показали, что $H_j = p'_j(H'_j)$. Так как $(\delta H'_j = h_j) \cap (h_k = \delta H_k) = \varnothing$ для $j \neq k$, то $H_j \cap H_k = \varnothing$. Аналогично $p(H_j) \cap H_k = \varnothing$ для любых i, k. Следовательно, $p(H_j) \subset Q'$ для любых j. По лемме 15 у нас есть набор изоморфизмов, которые легко можно склеить друг с другом (изоморфизм ϕ будет тождественным на Q' и ϕ_j на каждом H_j).

Теорема 11. *Пусть Q — кубический CAT(0) комплекс. Если Q конечной ширины и множество гиперплоскостей Q допускает конечную раскраску, то Q регулярно кубически сдавливаем.*

Доказательство. Докажем по индукции по ширине Q. Кубический комплекс ширины 0 это точка. Пусть Q имеет конечную ширину.

Мы также знаем, что существует некоторая n-раскраска гиперплоскостей Q, то есть отображение $c : P \to \{1, \ldots, n\}$, где P — множество гиперплоскостей.

Рассмотрим $P_1 = c^{-1}(1)$. Гиперплоскости из P_1 попарно не пересекаются. Выделим из них подмножество P'_1 экстремальных. По предыдущей лемме, Q сдавливается на подкомплекс $Q_1 = Q \setminus \bigcap_{h \in P'_1} H_h$, где H_h — минимальное полупространство, соответствующее h. Так как ни одна гиперплоскость не может содержаться целиком в каком-то H_h, множество гиперплоскостей у Q_1 это $P \setminus P'_1$. Следовательно, мы можем повторить процедуру с подмножеством экстремальных гиперплоскостей в $c^{-1}(2)$ и так далее до n. В конце мы получим Q_n.

Осталось показать, что ширина Q_n меньше ширины Q. Но, очевидно, гиперплоскости Q_n это в точности ограничения некоторых полупространств в Q. Любая максимальная цепочка вложеных полупространств в Q оканчивается минимальным, а все минимальные в Q_n исчезли. Следовательно, ширина Q_n строго меньше ширины Q. □

Теорема 12. *CAT(0) кубический комплекс регулярно кубически сдавливается тогда и только тогда, когда он конечной ширины и множество его гиперплоскостей допускает конечную раскраску.*

Доказательство. Теорема 10 и теорема 11. □