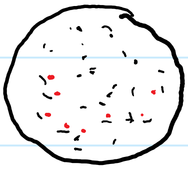
Динамика нулей полиномов при многократном дифференцировании

J. Hoskins
Z. Kabluchko
Dynamics of zeroes under repeated differentiation.
arxiv: 2010:14320

$X_1, X_2, \dots$ н.о.р. сл. вел. $\mathbb{C}$. $X_i \sim \mu_0$.

$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - X_k)$. $X_1, \dots, X_n$. $n \to \infty$.

Нули $P_n', P_n'', \dots$



(1) Нули P_n'. Pemantle, Rivin

Теор. [K] $\mu_0' = \frac{1}{n} \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ P_n'(z) = 0}} \delta_z$. случ. элем. в $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Тогда: $\mu_0' \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_0$. (в $\mathcal{M}(\mathbb{C})$).

Идея док-ва: $\log|z|$ гарм. функц.

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log|z| = \delta(z).$$

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log|z - z_0| = \delta(z - z_0),$$

Рац. функц $R(z)$: $\frac{1}{2\pi} \Delta \log|R(z)| = \sum_{\text{нули}} \delta_z - \sum_{\text{полюса}} \delta_z$.

$$\mu_0' - \mu_0 = \frac{1}{2\pi n} \Delta \log \overbrace{\left| \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} \right|}^{\approx n} \longrightarrow 0.$$

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \frac{d}{dz} \log P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - X_k} \overset{\text{ЗБЧ}}{\sim} n \underbrace{\int \frac{1}{z-x} \mu_0(dx)}_{G(z)} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Гип. Верно п.н. Гип. $\forall k \in \mathbb{N}$: верно для $P_n^{(k)}$. $\square$.

Замеч. Попытка обобщения:

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \underbrace{x_{k,n}}_{\text{неслуч.}}) \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_{k,n}} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu_0$$

Верно ли, что $\mu_0' \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu_0$?

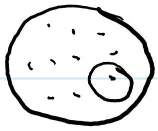
$\mu_0 = \mathrm{Unif}(\mathbb{T})$

Ответ: Нет. $P_n(z) = z^n - 1$

$$P_n'(z) = z^{n-1} \cdot n$$

② Сгущение. μ_0 имеет плотность $p(x)$.

Расстояние от нуля до ближ. нуля. $\approx 1/\sqrt{n}$



Расстояние от нуля P_n до нуля P_n' $\approx 1/n$.

Причина. Нуль в $X_1 = x$.

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = 0 \qquad \frac{1}{z - X_1} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{z - X_k} \underset{\text{ЗБЧ}}{\sim} -n \underbrace{\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-x}\,\mu_0(dx)}_{G(z)}$$

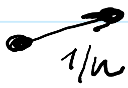
$$\approx -n\,G(X_1).$$

$$z = X_1 - \frac{1}{n\,G(X_1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

K, Seidel:

$$z = \boxed{X_1 - \frac{1}{n\,G(X_1)}} + \frac{\sqrt{\pi}\,p(X_1)\log n}{n^{3/2}\,|G^2(X_1)|}\cdot\left[N_{\mathbb{C}}(0,1) + o(1)\right]$$

③ Нули $P_n^{([tn])}(z)$ $\quad 0 \le t < 1$



$t = 1/2$.

скорость движения частиц в точке x: $-\frac{1}{G(x,t)}$

PDE Steinerberger, O'Rourke.

Плотность в момент t $\quad p(x,t)$. $\quad 0 \le t < 1$.

$$\vec{V}(x,t) = -1/G(x,t) \qquad \int_{\mathbb{C}} p(x,t)\,dx = 1-t.$$

$$= -\left(\mathrm{Re}\,\frac{1}{G(x,t)},\ \mathrm{Im}\,\frac{1}{G(x,t)}\right)$$

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{C}} \frac{p(y,t)}{x-y}\,dy$$

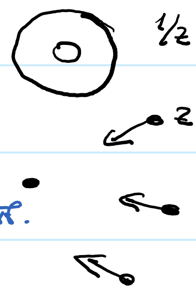
Уравнение конвекции: $$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\nabla\left(\vec{V}(x,t)\,p(x,t)\right)$$

$$p(x,0) = p_0(x).$$

Частный случай 1. μ_0 изотропна.

Плотность модулей: $\varphi(x,t) = 2\pi |x| p(x,t)$, $x \geq 0$, $0 \leq t < 1$.

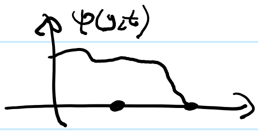
$$G(z,t) = \frac{1}{z} \int_0^{|z|} \varphi(y,t)\, dy$$



$$-\frac{1}{G(z,t)} = -z \frac{1}{\int_0^{|z|} \varphi(y,t)\, dy}$$ действ.

Скорость модулей в точке $x \geq 0$.

$$w(x,t) = -x \Big/ \int_0^x \varphi(y,t)\, dt.$$



$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[w(x,t) \cdot \varphi(x,t) \right]$$

$$= +\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varphi(x,t)}{\frac{1}{x}\int_0^x \varphi(y,t)\, dy} \right]$$

Гипотеза. Пусть $X_1, X_2, \ldots \sim p(x,0)$ н.о.р.

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ P^{(tn)}(z) = 0}} \delta_z \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_t$$ изотропна. $(0 < t < 1)$

4) Полиномы с незав. нулями $\longrightarrow$ полиномы с незав. коэфф.

Кац. $K_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k z^k$, $\xi_0, \xi_1, \ldots$ н.о.р. сл.в.

Теор. [Ибрагимов, Запорожец].

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ K_n(z) = 0}} \delta_z \xrightarrow{a.s.} \mathrm{Unif}(\mathbb{T}) \iff \mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty.$$

$\Uparrow$ Борель–Кант.

$\forall \varepsilon > 0: \ |\xi_n| = O(e^{\varepsilon n})$, $n \to \infty$.

Более того, без усл. на моменты: распр. аргументов изотропно.

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{n} e^{-nv(k/n)+o(n)} \xi_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

$v : [0,1] \to \mathbb{R}$ выпуклая функц. $\qquad \xi_0, \xi_1, \dots$ нор. $\mathbb{E}\log(1+|\xi_0|)<\infty$. [невырожд.!].

<u>Пр.</u> $v(k/n) = c \qquad G_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k \left(\frac{z}{e^c}\right)^n$ Unif на $e^c\mathbb{T}$.

<u>Теор.</u> [К, Заходжин]

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{z\in\mathbb{C} \\ G_n(z)=0}} \delta_z \xrightarrow[n\to\infty]{P} \text{изотропная мера } \mu_0, \text{ т.ч.}$$

$$\mu_0(\mathbb{D}_{e^{v'(s)}}) = s.$$

Модули нулей $G_n(z)$: образ меры Лебега на $[0,1]$ при

$$s \mapsto e^{v'(s)}.$$

Szegö: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(nz)^k \qquad e^z \neq 0.$ $\quad \| \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$

Нули $\longrightarrow$ распределению на

$$(|ze^{1-z}| = 1) \cap \mathbb{D}.$$

<u>Идея док-ва.</u>

$$\mu_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} \Delta \log|G_n(z)|$$

$$= \Delta/2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|G_n(z)|.$$

$$\frac{1}{n}\log|G_n(z)| = \frac{1}{n}\log\left|\sum_{k=0}^{n} \underset{\underset{O(e^{\varepsilon n})}{\|}}{\xi_k} z^k \cdot e^{-nv(\frac{k}{n})+o(n)}\right|$$

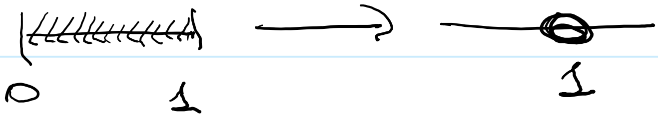
$$= \frac{1}{n}\log \sum_{k=0}^{n} \xi_k \cdot e^{n\left[\underbrace{\frac{k}{n}\log|z| - v(\frac{k}{n})}_{\to \max} + o(1)\right]}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \sup_{t\in[0,1]} \left(t\log|z| - v(t)\right) = I(\log|z|). \qquad \frac{k}{n} = t \in [0,1].$$

Лежандр: $I \qquad \square$.

Пр. $v(t)=0$. Кац.

$e^{v'(t)}=1$.



Пр. $v(t)=\frac{1}{2}\left[t\log t-t\right]$. $0\le t\le 1$.

$v'(t)=\frac{1}{2}\log t$

$e^{v'(t)}=\sqrt{t}$.

$\mu_0(\mathbb{D}_{\sqrt{x}})=x$ $\mu_0(\mathbb{D}_r)=r^2$, $0\le r\le 1$.

Unif на $\mathbb{D}_1$.

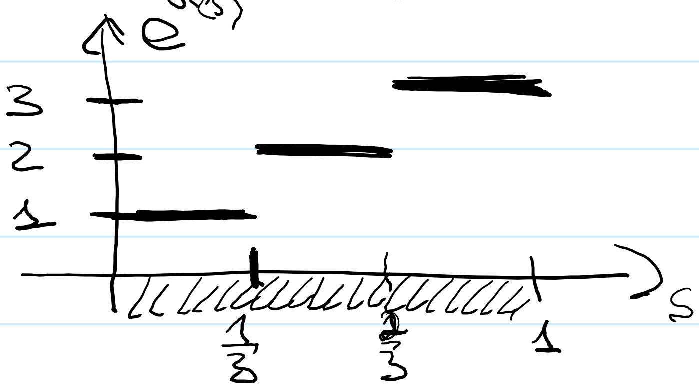
Конкретный пр: П. Вейля. $G_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\xi_k}{\sqrt{k!}}(\sqrt{n}z)^k$.

Пр. $v(t)=t\log t-t$.

$v'(t)=\log t$ $e^{v'(t)}=t$. $\mu_0(\mathbb{D}_x)=x$.

Модули корней: Unif $[0,1]$.

Пр. $\mu_0=\frac{1}{3}\,\mathrm{Unif}(\mathbb{T}_1)+\frac{1}{3}\,\mathrm{Unif}(\mathbb{T}_2)+\frac{1}{3}\,\mathrm{Unif}(\mathbb{T}_3)$.



Нули $P_n^{(tn)}(z)$.

- Найти v т.ч. G_n имеет распр. нулей μ_0.
- $P_n^{(tn)} \rightsquigarrow G_n^{(tn)}$
- $G_n^{(tn)}(z) = \sum_{k=nt}^{n} \xi_k e^{-nv(\frac{k}{n})} z^{k-nt} \cdot k(k-1)\dots(k-nt+1)$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-nt} \xi_{\ell+nt} e^{-v(t+\ell/n)} (\ell+nt)(\ell+nt-1)\dots(\ell+1) z^{\ell}.$$

$\ell = k-nt$ $\qquad e^{v'(0,t)} = 0.$

Новый профиль: $v(x,t) = v(x+t) + x\log x - (x+t)\log(x+t)$.

$0 \le x \le 1-t$.

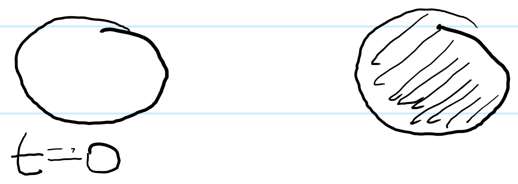
- Знаем профиль, вычисляем нули. $\quad 0 \le t < 1$.

Конечный результат. $\Psi(x,t) = \int_0^x \psi(y,t)\,dy$

$$\frac{\Psi_t^{-1}(x)}{x} = \frac{\Psi_0^{-1}(x+t)}{x+t}.$$

Пр. (Feng, Yao). $\psi(x,0) = \delta(x-1)$.

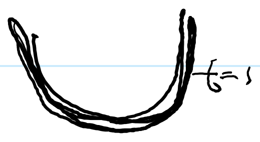
$\psi(x,t) = \frac{t}{(1-x)^2} \mathbb{1}_{0\le x\le 1-t}$. $\quad t>0$.



$t=0$

Пр. $\psi(x,0) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} \xi_k \frac{x^k}{k!}$

$\psi(x,t) = \mathbb{1}_{[0,1-t]}(x)$.



$t=1$

Пр. $\psi(x,0) = \sum_{i=1}^{m} \delta(x-r_i) p_i$.

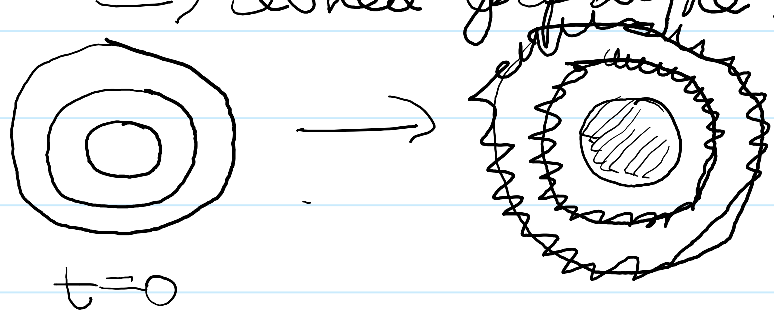
$-1 \qquad +1$

$\Longrightarrow$ явная формула.

Пр. $Q_n(x) = (x^2-1)^n$

$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} Q_n(x)$

$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$



$t=0$

S Действ. нули. $u(x,t)$. $\quad$ Steinerberger: PDE.

Теорема. Полиномы Q_n. Нули $\in [a,b]$ и $\frac{1}{n}\sum_{z:\,Q_n(z)=0} \delta_z \xrightarrow{w} \mu_0$ на $\mathbb{R}$.

Тогда: $\frac{1}{(1-t)n} \sum_{\substack{z\in\mathbb{R} \\ Q_n^{(tn)}(z)=0}} \delta_{\frac{z}{1-t}} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu_0^{\boxplus \frac{1}{1-t}}$. $\quad \forall t \in (0,1)$.

Van Assche, Fano, Ortolani

$\frac{1}{n}\log [x^{\alpha n}]\, Q_n(x) \to -v(\alpha)$,

$\alpha \in [0,1]$ $\qquad v$ выпуклая функция.