УДК 51(09)

ИЗ ИСТОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)
Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»

Работа посвящена истории развития теории нелинейных интегральных уравнений, охватывая период до начала 1930-х годов. Анализируя особенности начального периода, авторы акцентируют внимание на том, что интегральные уравнения (в частности, нелинейные) представляют самостоятельный объект исследований со своими задачами, требующий своей системы определений и своего языка. В качестве отправной точки здесь были взяты работы А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре по фигурам равновесия вращающихся жидкостей, в которых впервые появились нелинейные интегральные уравнения и зародились качественные методы их решения, а также возникло одно из ключевых понятий нелинейной динамики – понятие бифуркации. В этой связи внимание также уделяется результатам, полученным их последователями – Э. Шмидтом, Т. Лалеску и Г. Брату. Отмечается, что к концу 1920-х годов старая идейная основа, доминировавшая в математике XVIII–XIX веков, – «уравнение–решение» себя исчерпала; для дальнейшего развития требовались новые идеи и новые подходы. Авторы относят этот период к следующему этапу научной эволюции, когда для описания поведения нелинейных систем стали привлекаться топологические и функционально-аналитические методы и начала строиться последовательная дедуктивная теория, основанная на строгих определениях и общих конструкциях. В данном контексте анализируется вклад в развитие теории нелинейных интегральных уравнений европейских математиков – Л. Лихтенштейна и А. Гаммерштейна. Большое внимание, в свою очередь, уделяется работам отечественных математиков – П.С. Урысона и А.И. Некрасова с учётом прикладного характера их исследований. Оценивается влияние развития теории нелинейных интегральных уравнений на создание и становление функционального анализа.

Ключевые слова: История функционального анализа, нелинейные интегральные уравнения, уравнение Урысона, уравнение Хаммерштейна, А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Д. Гильберт, Э Шмидт, Брату, уравнение Лалеску, Л. Лихтенштейн, А.И. Некрасов, равновесные фигуры вращающейся жидкости, качественные методы.

DOI:10/18500/0869-6632-2016-24-2-?-?

Ссылка на статью: Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Из истории нелинейных интегральных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С.?

Интегральные уравнения занимают весьма значительное место в математике и её приложениях. При построении теории интегральных уравнений был сформирован целый ряд идей, понятий и методов, вошедших в фундамент функционального анализа. В свою очередь, методы функционального анализа оказали мощное воздействие на развитие теории интегральных уравнений, в особенности нелинейных.

В данной работе рассмотривается история нелинейных интегральных уравнений на первом этапе их развития, к которому с определённой долей условности относится период с конца XIX века до начала 30-х годов XX века. Сколько-нибудь систематическое рассмотрение этого вопроса в литературе, по нашим сведениям, отсутствует.

1. Предварительные замечания

Функциональный анализ является одним из тех оснований, которые придали математике её современный облик. Интегральные уравнения в построении здания функционального анализа заняли выдающееся место. И обратно – воздействие методов функционального анализа на развитие теории интегральных уравнений столь значительно, что последнее нередко относят к одной из глав современного функционального анализа.

Хотя в зарождении и становлении функционального анализа на переднем плане находились линейные интегральные уравнения, свою роль сыграли и нелинейные уравнения. История развития теории последних представляет самостоятельный интерес, особенно в последние десятилетия, когда в разных областях науки нелинейные явления и сопутствующий им математический аппарат стали привлекать пристальное внимание. Изучаемая область оказалась столь обширной, что в настоящей работе оказалось возможным рассмотреть только первый этап развития теории нелинейных интегральных уравнений. С некоторой долей условности к этому этапу отнесём период с конца XIX века до начала 30-х годов XX века. Основанием для такой хронологии является наличие ясно прослеживаемых черт – от отдельных уравнений, стимулированных прикладными задачами, до осознания того, что нелинейные интегральные уравнения представляют самостоятельную область со своими особенностями и методами исследования. Для последующих этапов характерно признание «автономности» в этой области, входящей составной частью в общность более высокого таксономического уровня – нелинейных операторных уравнений – и широкое использование функционально-аналитических, топологических и других методов из разных областей современной математики.

Традиция связывает появление интегральных уравнений с формулами обращения Ж. Фурье и работой Н. Абеля о таутохроне. Однако реальная история более ранняя, она начинается в XVIII веке и восходит к Л. Эйлеру и П.С. Лапласу. Эйлеру принадлежит идея представления решения дифференциальных уравнений в виде определённых интегралов (1741, 1763). Эти более ранние результаты были систематизированы Эйлером во втором томе его «Интегрального исчисления». Глава X этого труда носит название «О построении дифференциальных уравнений с помощью квадратур кривых». В частности, Эйлером было найдено четыре разных решения уравнения

$$x^2(a+bx^n)d^2z + x(c+lx^n)dxdz + (f+gx^n)zdx^2 = 0$$

в виде определённого интеграла. Частным случаем этого уравнения является гипергеометрическое уравнение

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\,\frac{dz}{dx}-\alpha\beta z=0.$$

Заметим, что Эйлер не переходил в комплексную плоскость. Используя идеи Эйлера, Лаплас создал свой знаменитый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, носящий его имя [1, гл. X], [2, с. 181–182; 193–195], [3, с. 96–112].

Работа Н. Абеля о таутохроне была поначалу опубликована в 1823 году в «Magazin for Naturvidenskaberne» в Христиании (Осло), а затем вошла в его собрание сочинений. Эту работу Абеля не относят к числу его главных достижений, но в ней была (видимо, впервые) рассмотрена задача, *непосредственно* приведшая к интегральному уравнению, в отличие от использования последнего, как вспомогательного средства для решения дифференциальных уравнений. Абель изучал движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. При этом он получил и решил интегральное уравнение

$$f(x)=\int\limits_0^x \frac{\varphi(u)du}{\sqrt{x-u}},$$

где $f(x)$ – известная функция, $\varphi(x)$ – искомая функция. Абель рассматривал также и более общие уравнения

$$f(x)=\int\limits_a^x \frac{\varphi(u)du}{(x-u)^{\alpha}},$$

где $a>0,\ 0<\alpha<1$ – заданные постоянные [4]. В этой же работе Абель анонсирует решение более общего уравнения

$$\psi_\alpha=\int\limits_a^b \varphi(x,\alpha)f_x dx, \qquad (1)$$

где через ψ и f обозначены известные функции, а через φ – искомая функция. Решение уравнения (1) было опубликовано в 1826 году в журнале Крелле «Journal $f\ddot{u}r$ die reine und angewandte Mathematik» и затем вошло в собрание сочинений Абеля [5]. Работы Абеля не оказали значительное воздействие на развитие теории интегральных уравнений в последующие десятилетия. Подлинное их признание произошло уже в XX веке.

До самого конца XIX века отдельные частные, нередко несвязанные между собой задачи из различных разделов математики, таких как теория рядов и теория чисел приводили к интегральным уравнениям. Ещё не были созданы общие подходы и для каждой задачи приходилось разрабатывать свои приёмы. В связи с интегральными уравнениями мы встречаем имена многих выдающихся математиков: С.Д. Пуассон, О.Л. Коши, Ж. Лиувилль, Б. Риман, Т.И. Стилтьес, Э. Бельтрами, Н.Я. Сонин, В.А. Стеклов, К. Нейман, Ш.Э. Пикар, А. Пуанкаре, Г.А. Шварц и др. [6–9]. Первым, кто осознал необходимость создания общей теориии интегральных уравнений, был, по-видимому, профессор Высшей технической школы в Берлине Пауль Дюбуа–Реймон. Ему же и принадлежит сам термин «интегральные уравнения», предложенный в 1888 году в его работе [10], посвящённой теории потенциала. Задачи математической физики, в частности, теория потенциала, также явились одним из истоков теории интегральных уравнений. А. Пуанкаре в своей известной работе по теории потенциала сделал очень важный шаг, введя в интегральное уравнение параметр λ

$$u(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x).$$

Этот шаг Пуанкаре явился логическим продолжением его бифуркационной тематики и оказался весьма существенным при исследовании нелинейных уравнений, когда несколько десятилетий спустя нелинейная тематика, в частности, бифуркационные задачи стали привлекать пристальное внимание.

Прорыв в теории *линейных* интегральных уравнений произошёл в конце XIX – начале XX века в связи с классическими работами В. Вольтерры [11–14], Э.И. Фредгольма [15], Д. Гильберта [16], Э. Шмидта [17]– [19]. Эта глава истории математики хорошо описана в литературе (см., например, [6] – [9], [20], [21]) и в дальнейшем мы будем обращаться к ней в той степени, в которой она касается нелинейных интегральных уравнений и функционального анализа.

Работы по теории интегральных уравнений можно поделить на две группы. К одной из них отнесём те работы, в которых рассматривается какая-либо конкретная проблема, обычно из механики или физики, и ищется её решение. Ничего принципиально нового в этом подходе нет – подобного рода задачи вставали перед анализом с самого начала его зарождения. Вторая группа работ (она могла частично пересекаться с первой) ставила принципиально иные вопросы: рассматривать задачи в их предельной общности, наметить подходы не к одной конкретной задаче, а к целому классу задач. При этом формировались новые концептуальные понятия и методы.

Обратим внимание на время, *когда* произошли указанные выше события и зададимся вопросом: чем это было обусловлено? В математике XVIII–начале XIX века и в конце XIX века имели место концептуальные отличия в трактовке основных понятий и принципов математического анализа. В указанный период произошёл крутой поворот от формальных методов для решения задач – к последовательной дедуктивной теории, основанной на строгих определениях и понятиях. В начале XIX века вследствие запросов естествознания (в первую очередь, теории теплоты и гидродинамики) были поставлены новые проблемы, для решения которых прежний аппарат анализа был уже недостаточен. Разработка соответствующего нового математического аппарата потребовала коренной перестройки традиционных систем анализа и переработки его методологии, что явилось одной из характерных черт всей математики XIX века. Зародилось новое направление, наиболее яркими представителями которого были Б. Больцано, О.Л. Коши, Б. Риман, К. Вейерштрасс. Была поставлена задача глубокого анализа основных положений математики, достижения большей ясности и определённости [22]. Утверждалась идеология, направленная на выявление условий и границ истинности каждого утверждения. Особое значение получили теоремы существования и единственности решений уравнений и чёткое различие необходимых и достаточных условий. Анализ основных понятий сопровождался построением «парадоксальных» с первого взгляда примеров, что относили к «музею математических ужасов» [23, с. 146]. К таким «экспонатам» можно отнести построенные Больцано и Вейерштрассом примеры непрерывных и нигде не дифференцируемых функций. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о *неразрешимости* той или иной задачи. В это время Н. Абелем была доказана неразрешимость общего алгебраического уравнения пятой степени, П. Вантцелем – невозможность с помощью циркуля и линейки решения, восходящих ещё к античности, задач об удвоении куба и трисекции угла. Сюда же примыкает работа Ж. Лиувилля, в которой была доказана невозможность в общем случае интегрирования в квадратурах уравнения Риккати [24, с. 4].

Грандиозная перестройка анализа в XIX веке явилась той основой, которая позволила гармонически сочетать исследования отдельных конкретных проблем с разработкой общих абстрактных понятий и методов. В русле новых тенденций сформировались различные формы предельного перехода, сходимости, концепции интегрируемости и т.п. Всё это явилось тем фундаментом, на котором была построена теория интегральных уравнений и функционального анализа; при этом создалась возможность для сочетания исследований отдельных проблем с разработкой общих абстрактных понятий и методов (Д. Гильберт, Ф. Рисс, С. Банах). Поворотным пунктом здесь явились работы Д. Гильберта. Л.А. Люстерник отмечал, что имеются разные стороны математического дарования [25, с. 153]. Есть интуиция, позволяющая видеть и угадывать новые факты и ставить новые задачи. Есть умение находить связи между, казалось бы, далёкими фактами и разными областями математики. Есть математическая фантазия, есть сравнительно редко встречающееся философско-математическое творчество, приводящее к новым точкам зрения на основные математические факты и открывающее новые перспективы. Все эти формы математической одарённости были присущи Гильберту. Они ярко проявились в его исследованиях интегральных уравнений. Результаты Гильберта по интегральным уравнениям были опубликованы в шести статьях в 1904–1910 годах в журнале «$Göttingen$ Nachrichten», и затем в 1912 году сведены в единое целое в известной книге [16]. О значении этих работ Гильберта для развития функционального анализа имеется обширная литература (см., например, [26], [8], [20]– [21], [27]– [30]), но его результаты вышли далеко за рамки первоначальной задачи, они относятся к крупнейшим достижениям математики XX века. Эти результаты послужили основой теории гильбертовых и банаховых пространств, теории линейных операторов и предмета нашего рассмотрения – теории нелинейных интегральных уравнений. Поэтому невозможно не коснуться хотя бы некоторых его важнейших достижений.

Но сначала несколько слов, в какой атмосфере создавалось творение Гильберта. В начале прошлого века Гёттинген, наряду с Парижем, являлся математической столицей мира. Кроме Гильберта, в Гёттингене тогда работали Ф. Клейн, Г. Минковский, Э. Цермело; учились Г. Вейль и Р. Курант. Ещё одним студентом, оставившим Берлин ради Гёттингена, был Э. Шмидт, о котором ещё будет идти речь. Минковсий так писал о Гёттингене: «Даже простое пребывание в таком воздухе вызывает всё возрастающее желание делать великие вещи» (цит. по [31, с. 80]). Путь, выбранный Гильбертом в его исследованиях интегральных уравнений явился логическим продолжением его приверженности аксиоматическому методу, стремлением проводить в анализе, как указывается в [31, с. 114] линию объединять, упорядочивать и прояснять. Ф. Клейн в своей книге [32] обсуждает вопрос о том, что имеются две линии в развитии математики, *A* и *B*, которые то сменяются, то выступают одновременно и независимо, то взаимно переплетаются. В основе линии *A* лежит тендеция к дроблению, каждая часть отграничена от другой, в каждой стремятся избежать заимствований из соседних областей. Идеалом здесь является выкристаллизованное, логически замкнутое в себе построение каждой отдельной области. Другое направление, *B*, главное значение придаёт органической связи между отдельными областями, соответственно отдаются предпочтения тем методам, которые дают понимание многих областей с одной и той же точки зрения. Идеал такого синтеза заключается в том, чтобы объять всю математическую науку, как единое целое. Если предшественники Гильберта Вольтерра и Фредгольм в своих исследованиях интегральных уравнений видели аналогию задач алгебры и анализа, то у Гильберта органический синтез этих областей математики проведён совершенно строго и последовательно.

Гильберт рассмотрел интегральное уравнение, к которому сводится решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на отрезке $[a, b]$,

$$u(x) + \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x), \tag{2}$$

где *u* – неизвестная функция. Он показал, что решение уравнения (2) эквивалентно решению бесконечной системы линейных уравнений

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}x_q = b_p, \quad (p = 1, 2, ...). \tag{3}$$

Гильберт поставил задачу отыскать условия, когда квадратичную форму бесконечно многих переменных можно представить с помощью ортогонального преобразования в каноническом виде суммы квадратов

$$K = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + ... + k_nx_n^2 + ... \tag{4}$$

Эта задача привела Гильберта к понятию *вполне непрерывной функции* и он показал, что условие полной непрерывности является достаточным для представимости квадратичной формы в каноническом виде (4). Понятие вполне непрерывной функции изложено в части 4 «Теория квадратичных форм бесконечно многих переменных» его труда [16]. Гильберт называет функцию (форму) $F(x_1, x_2, ...)$ бесконечно многих переменных вполне непрерывной при данном наборе значений переменных $x_1, x_2, ...$, если [33, с. 234]

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0, \varepsilon_2\to 0, ...} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, ...) = F(x_1, x_2, ...).$$

Обобщение понятия вполне непрерывной функции привело к понятию *вполне непрерывного оператора*, играющего фундаментальную роль в функциональном анализе, в частности, в теории нелинейных интегральных уравнений.

Вернёмся к системе (3). «Коэффициенты Фурье» функции *u* по отношению к данной ортонормированной системе (ω_k) даются выражениями

$$x_p = \int\limits_a^b u(t)\omega_p(t)dt.$$

При этом Гильберт ограничивается таким типом решений системы (3), когда

$$\sum_n x_n^2 < +\infty. \tag{5}$$

Таким образом, в основе всей теории находится пространство последовательностей (x_n) действительных чисел, удовлетворяющих условию (5). Это пространство, названное позднее пространством Гильберта, возникает в результате «предельного перехода» от евклидова пространства конечной размерности. Реализация описанных идей оказалась весьма сложной и трудоёмкой. Гильберту пришлось ввести два разных понятия сходимости (соответствие тому, что впоследствии получило название сильной и слабой топологии) [34, с. 129–130]. Основным классом рассматриваемых функций, вместо непрерывных, теперь выступили функции с интегрируемым квадратом, что явилось одним из поворотных пунктов всего дальнейшего развития математики [29, с. 222–223]. Было уже давно известно, что для всякой функции *f(x)*, интегруемой с квадратом в смысле Римана, её коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенству (5). Но теперь вопрос был поставлен иначе: задана последовательность констант (x_n) со сходящейся суммой квадратов; существует ли такая интегрируемая с квадратом функция $f(x)$, чтобы её коэффициенты Фурье по заданной ортонормированной системе были равны членам этой последовательности? Иначе говоря, можно ли говорить об изоморфизме пространства последовательностей со сходящейся суммой квадратов l^2 и пространства функций с интегрируемым квадратом L^2? Положительный ответ на этот вопрос был получен с использованием интегрирования по Лебегу независимо Ф. Риссом [35]– [36] и Э. Фишером [37]. Это ключевой момент теории и вопрос первостепенной важности для исследования интегральных уравнений. Связь между интегральными уравнениями и линейными формами устанавливается с помощью полной ортогональной системы функций, отсюда фундаментальное значение установления изоморфности между пространствами l^2 и L^2.

Фридьеш Рисс – венгерский математик, учился в Цюрихском политехническом институте, университетах Будапешта и Гёттингена. Он внёс фундаментальный вклад в функциональный анализ и топологию. Рисс, используя идею Гильберта о вполне непрерывных функциях, осуществил дальнейшее развитие и обобщение теории. При этом он отошёл от квадратичных форм и провёл рассмотрение на языке преобразований, взяв за основу понятие компактной последовательности, введённое М. Фреше. Сначала Рисс исходил из определений слабой и сильной сходимости, а именно: *линейное вполне непрерывное преобразование в пространстве l^p, воздействуя на слабо сходящуюся последовательность, преобразует её в сильно сходящуюся последовательность* [38, с. 96]. Впоследствии он отказался от идеи использования слабой и сильной сходимости и в своей фундаментальной работе 1918 года [39] положил в основу понятие *компактности*. Рисс определяет линейное преобразование, как вполне непрерывное, если *оно переводит любую ограниченную последовательность в компактную*. Затем он устанавливает целый ряд свойств вполне непрерывных преобразований и акцентирует внимание на решении функционального уравнения $B[\varphi] = 0$, где $B = E - A$, E – тождественное, B – вполне непрерывное преобразование рассматриваемого множества (непрерывных) функций. Результаты Рисса можно без труда сформулировать на современном языке, заменяя термин «преобразование» на «оператор». Тот факт, что Рисс ограничивается рассмотрением непрерывных функций, совершенно несущественен. Он указывает на то, что «… построенный здесь метод может быть применён более общим образом… Рассматриваемое здесь пространство, которое кажется на первый взгляд более простым, служит как бы пробным камнем для применимости этого метода в общем виде» [39, с. 175]. Полученные результаты Рисс применил к интегральным уравнениям. Он, в частности, показал, что интегральный оператор Фредгольма

$$K[f] = \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy$$

является вполне непрерывным оператором. Как отмечает Бурбаки, метод Фредгольма обязан своим успехом понятию «вполне непрерывности», которое сформулировал для билинейных форм и подверг глубокому изучению Гильберт.

Рисс построил в значительной степени полную теорию линейных операторных уравнений с вполне непрерывными операторами. Его результаты можно распространить на любое линейное нормированное множество. Очень важная сторона данной работы Рисса заключается в том, что он рассматривает общий случай – *операторные уравнения*, частным случаем которых являются интегральные уравнения. Но именно работы Гильберта по интегральным уравнениям сделали совершенно прозрачной необходимость указанного обобщения – от теории интегральных уравнений к теории операторов.

Теория интегральных уравнений Гильберта получила дальнейшее развитие в трудах Э. Шмидта, который рассмотрел их в значительно более общей и абстрактной форме [17]. Эрхард Шмидт учился в Берлинском университете у Г. Шварца, но его настолько привлёк Гёттинген, что он покинул Берлин и стал учеником Гильберта. Подход Шмидта к интегральным уравнениям основывался на понятии полной ортонормированной системе функций, восходящей к работам П.Л. Чебышева, П. Грама, В.А. Стеклова, А. Гурвица. Сам термин «полная ортонормированная система функций» принадлежит Шмидту [8]. Работа Шмидта [17] имела концептуальное значение в теории интегральных уравнений и после её появления Гильберт уже сам исходит из указанного понятия. Раздел 5 труда Шмидта называется «Новое обобщение теории линейных интегральных уравнений», и Гильберт отмечает: «В качестве связующего звена между теорией функций *бесконечно многих* переменных и уравнений с *бесконечно многими* переменными (изложенной в разделе 4), с одной стороны, и теорией интегральных уравнений, представляющих соотношения между функциями одной переменной s, с другой стороны, может служить *бесконечная система непрерывных функций*

$$\Phi_1(s),\ \Phi_2(s), ...$$

переменной s на интервале от $s = a$ до $s = b$, обладающих следующими свойствами:

I. Так называемым *свойством ортогональности*

$$\begin{cases} \int\limits_a^b \Phi_p(s)\cdot\Phi_q(s)ds = 0; \quad (p \neq q) \\ \int\limits_a^b (\Phi_p(s))^2\, ds = 1. \end{cases}$$

II. *Свойством полноты*, состоящим в том, что для любой пары непрерывных функций $u(s)$, $v(s)$ переменной s справедливо

$$\int\limits_a^b u(s)v(s)ds = \int\limits_a^b u(s)\Phi_1(s)ds \cdot \int\limits_a^b v(s)\Phi_1(s)ds + \int\limits_a^b u(s)\Phi_2(s)ds \cdot \int\limits_a^b v(s)\Phi_2(s)ds + \ldots$$

Такая система функций $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... называется *полной ортогональной системой функций* на интервале от $s = a$ до $s = b$. Если $u(s)$ – произвольная непрерывная на интервале от $s = a$ до $s = b$ функция от s, то интегралы

$$\int\limits_a^b u(s)\Phi_1(s)ds, \int\limits_a^b u(s)\Phi_2(s)ds\ldots$$

естественно назвать *коэффициентами Фурье* функции $u(s)$ по полной ортоногональной системе функций $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ...» [33, с. 262–263]. В приведённой выдержке, с одной стороны, отчётливо проступают главные черты нового подхода к теории интегральных уравнений, а с другой – осуществляется значительный шаг к замечательному обобщению – бесконечномерным функциональным пространствам.

Гильберт до конца своей деятельности являлся поборником аксиоматического метода, который заключается в логическом выводе всех фактов какой-либо области из небольшого количества заранее установленных аксиом. Такая программа играет не только цементирующую роль в данной области (в геометрии). Рассмотрим, например, исходящие ещё из аналитической геометрии средства для обоснования её конструкций – поле действительных чисел. И Гильберт при аксиоматизации геометрии ясно высказался о том, что любое противоречие в евклидовой геометрии должно обязательно проявиться как противоречие в аксиомах арифметики, на которых основаны наши действия с действительными числами [30, с. 640]. Идеи синтеза различных разделов исходят из понимания Гильбертом математики как науки, из его «философии», если можно так выразиться. Представляется, что Гильберт был убеждён в единстве математики, наличии глубоких внутренних связей между её различными разделами.

Гильберт совершенно отчётливо высказал такие идеи в своей работе «Сущность и цели анализа бесконечно многих независимых переменных» [40], которую он предполагал представить в качестве доклада на IV международном конгрессе математиков в Риме в 1908 году. По каким-то причинам выступление Гильберта не состоялось, и эта работа была опубликована в итальянском математическом журнале в 1909 году. В какой-то степени допустимы объединительные начала, синтез различных разделов. Здесь, по словам Вейля, единственным критерием является плодотворность, и «если отдельный исследователь должным образом систематизирует этот критерий, применяя процедуру, разработанную им с большей или меньшей изобретательностью и чутьём, и использует все аналогии, почерпнутые им из опыта, то получится не что иное, как *аксиоматика*» [41, с. 25].

Вернёмся к работе Гильберта [40]. Он исходит из алгебры и анализа, указывая, что в алгебре в качестве неизвестных рассматривают конечное число величин и соотношений между ними, а в анализе – функций, также удовлетворяющих определённым соотношениям. В таком варианте алгебра и анализ являются частными случаями более общей постановки, где рассматриваются бесконечно много неизвестных, удовлетворяющих бесконечно многим соотношениям. И далее Гильберт говорит: «Описанная проблема нахождения бесконечно многих неизвестных из бесконечного числа уравнений из-за своей общности может представляться неблагодарной и неприступной. При занятии ею нам угрожает опасность потеряться в слишком трудных или многословных и туманных рассуждениях безо всякой пользы для более глубоких проблем. Но если подобные соображения не собьют нас с пути, то мы уподобимся Зигфриду, перед которым огненный вал расступается сам собою, и тогда нас ждёт чудесная награда – методически единое построение алгебры и анализа» [40, с. 35–36]. Сформулированную программу Гильберт блестяще реализует в построении общей теории линейных интегральных уравнений. Он исходит из перенесения понятий для случая конечного числа на бесконечное число переменных, определяет линейную функцию бесконечно многих переменных с учётом сходимости, вводит целый ряд новых понятий, разрабатывает теорию билинейных и квадратичных форм. В итоге получилась новая область математики, «находящаяся в некотором смысле между алгеброй и анализом, опирающаяся своими методами на алгебру, но напротив, принадлежащая анализу по трансцендентной природе своих результатов» [40, с. 38], то, что впоследствии получило название «функциональный анализ» [42, с. 529]. Главная цель, которую ставит Гильберт при создании теории функций бесконечно многих переменных – нахождение общей точки зрения и единых методов решения уравнений относительно функций. Любое разумное обобщение упрощает рассмотрение, поскольку сокращаются исходные допущения. И Гильберт обращается к одному из наиболее простых и в то же время общих типов таких задач – к линейному интегральному уравнению. Результаты Гильберта по своей значительности далеко выходят за рамки построенной им общей теории линейных интегральных уравнений. Утверждение Вейля о том, что работы Гильберта строго делятся на различные периоды, в каждый из которых он был всецело поглощен проблемами из одной конкретной области [30, с. 612], не следует воспринимать слишком буквально. Гильберт говорит о возможности изучения с новых позиций дифференциальных уравнений, проблем вариационного исчисления, аналитических функций бесконечно многих переменных. Многие вопросы оказываются связанными, и на всё можно взглянуть с новой точки зрения.

Гильберт (и, по-видимому, Пуанкаре) как никто другой из математиков того времени осознавали силу и мощь объединения, казалось бы малосвязанных, разделов математики. Гильберт писал, что плодотворность новой математической теории заключается в её способности давать ответы на такие вопросы, которые при создании теории перед ней не ставились, и заканчивает евангельскими словами: «По плодам их узнаете их» [43, с. 180].

2. А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре

Согласно внутренней логике развития, рассмотренню нелинейных задач, как более сложных, должно предшествовать исследование линейных случаев. Но реальность гораздо многообразнее и не всегда логика развития и хронология согласуются друг с другом. По поводу трудов Гильберта по теории линейных интегральных уравнений Г. Вейль писал: «На территории анализа была открыта золотая жила, которая сравнительно легко поддавалась разработке и которая не скоро должна была истощиться... Самые настойчивые приступили к атаке на нелинейные интегральные уравнения» [30, с. 648–649]. Вейль, конечно, имел в виду в первую очередь Э. Шмидта, который в своих трудах [17]– [18], опубликованных в 1907 году, затронул и нелинейные интегральные уравнения. Вейль здесь не совсем прав. Нелинейные интегральные уравнения стали привлекать внимание в то же время, когда создавалась теория линейных интегральных уравнений – на рубеже веков, и интерес к ним был вызван прикладными задачами.

Насущной задачей в течение столетий для мореплавания, теснейшим образом связанной со всей экономической жизнью, было определение долготы местонахождения судна. Широко используемым методом для этого являлось сравнение местонахождения Луны среди звёзд с вычисленным наперёд его положением [44, с. 64]. На движение Луны, помимо воздействия Земли, возмущающее действие оказывают Солнце и планеты. Кроме того, следует учитывать отличие формы поверхности притягивающихся тел от сферической. Таким образом, важное значение приобретает определение формы поверхности Земли и Луны. Эта задача имеет и самостоятельное значение, являясь актуальной и для других приложений (в геодезии и др.)

В связи со сказанным, ещё И. Ньютоном была поставлена следующая проблема: может ли жидкая однородная масса, не зависящая ни от каких внешних сил, двигаться как твёрдое тело так, чтобы взаимные расстояния всех её частиц оставались неизменными? Если такое движение существует, то какова будет форма жидкости?

Ответ на вопрос о характере движения прост: центр масс жидкости движется равномерно и прямолинейно, а вся масса вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс и имеющей постоянное направление, причём эта ось будет одной из главных осей инерции массы жидкости. Что касается задачи определения возможных форм массы жидкости, то она, несмотря на усилия крупнейших математиков, до настоящего времени полностью не решена. Видимо, проблема относится к числу тех, для которых не существует общего решения. О сложности задач, связанных с фигурами равновесия вращающихся жидкостей, даёт представление перечисление учёных, занимавшихся этими вопросами: И. Ньютон, К. Маклорен, А. Клеро, Т. Симпсон, П.С. Лаплас, Ж.Л. Лагранж, Ж. Даламбер, А.М. Лежандр, С.Д. Пуассон, Ж. Лиувилль, К.Г. Якоби, П. Дирихле, Б. Риман, В. Томпсон (Кельвин), П. Тэт, П.Л. Чебышев, С.В. Ковалевская, Дж. К. Максвелл, П. Аппель, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, Дж. Дарвин, Дж. Джинс, К. Шварцшильд и др. [45, с. 49–50].

Из всей длинной и сложной истории проблемы фигур равновесия вращающихся жидкостей нас будет интересовать лишь небольшая её часть, касающаяся нелинейных интегральных уравнений и связанная с именами А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Для формы вращающейся массы жидкости основную роль играют два значения скорости ω_1 и ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$). Ещё в 1742 году К. Маклорен установил существование фигур равновесия, представляющих собой эллипсоиды вращения (эллипсоиды Маклорена), в этом случае $\omega < \omega_2$. Совершенно новое и неожиданное решение задачи дал в 1834 году К.Г. Якоби, показав, что имеются фигуры равновесия, являющиеся трёхосными эллипсоидами (эллипсоиды Якоби) и вращающиеся вокруг малой оси $\omega < \omega_1$. При $\omega > \omega_2$ происходит разрушение эллипсоидальных фигур равновесия. В. Томпсон и П. Тэт указали в третьем издании своей известной книги «Treatise on natural phylosophy» (1883), что при последовательном увеличении момента вращения получается ряд устойчивых фигур, которые начинаются от сферы, проходят через эллипсоиды Маклорена вплоть до особого эллипсоида, от которого начинается последовательность трёхосных эллипсоидов Якоби. Они, в свою очередь, всё удлинняясь, должны в конце концов разделиться на две отдельные массы. Однако ничего не было известно о фигуре, промежуточной между эллипсоидами

Якоби и фигурой разрыва, на что указывали Томпсон и Тэт. П.Л. Чебышев пытался разрешить вопрос о том, что произойдёт с эллипсоидами Маклорена, когда он достигнет максимальной, критической скорости вращения. Образуется ли разрыв или произойдёт переход к другим фигурам равновесия? Здесь оказался исходный пункт исследований Ляпунова по фигурам равновесия вращающихся жидкостей.

Вот что по этому поводу говорит сам Ляпунов во вступительной лекции курса «О форме небесных тел», читавшегося им осенью 1918 года в Новороссийском (Одесском) университете незадолго до смерти. «В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причём Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься лёгкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами не стоит, и что всякий молодой учёный, если он уже приобрёл некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьёзном вопросе, представляющем известные математические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос:

"Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов?" При этом он прибавил: "Вот если бы вы разрешили этот вопрос, на вашу работу сразу бы обратили внимание...". Я сильно заинтересовался вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас принялся за работу. Однако при тех ничтожных математических ресурсах, которыми я обладал тогда, лишь два года спустя после окончания курса, я встретил непреодолимые затруднения» [46, с. 113].

Ляпунов довольно быстро решил задачу в первом приближении и пришёл к следующим заключениям. С ростом момента импульса при некотором критическом значении J_1 эллипсоиды Маклорена теряли устойчивость и переходили в эллипсоиды Якоби. С дальнейшим ростом J при $J = J_2$ эллипсоиды Якоби становились неустойчивыми и переходили в какие-то новые фигуры равновесия, представляющие алгебраические поверхности третьего порядка. Эти фигуры впоследствии были названы грушевидными. Полученные результаты вошли в магистерсую диссертацию Ляпунова и были опубликованы в 1884 году [47]. О новых фигурах равновесия, о которых можно было судить по первому приближению и существование которых осталось недоказанным, Ляпунов лишь упомянул в своей диссертации. Главная трудность, с которой он столкнулся, состояла в получении следующих приближений. Эту трудность тогда ему преодолеть не удалось.

Работа Ляпунова [47] вместе с последующими его работами была написана по-русски, но стала известна во Франции благодаря рефератам во французских журналах. Она быстро привлекла внимание крупнейших учёных. Реферат работы [47] повлёк за собой переписку между Ляпуновым и Пуанкаре [48], [49]. Работа [47] была опубликована в 1904 году на французском языке [50]. Начиная с 1903 года, в течение более чем десятилетия Ляпунов в цикле статей дал решение ряда сложнейших вопросов о фигурах равновесия вращающейся жидкости [51]– [56]. По словам самого Ляпунова, основные трудности были преодолены в работе [56]. О значении трудов Ляпунова по теории устойчивости и фигурам равновесия можно судить по тому факту, что ещё в 1904 года его стали выдвигать в члены-корреспонденты Академии наук, входящей в состав Института Франции. Однако в 1904 году избрание Ляпунова не состоялось. На следующих выборах его соперником был Гильберт, который и был избран. Ляпунов был избран в 1916 году, его заслуги получили официальное признание [57].

Для определения формы поверхности жидкости Ляпуновым было получено нелинейное интегральное уравнение, лежащее в основе всей теории. Поместив начало координат в центр масс, Ляпунов представляет координаты поверхности фигур равновесия в виде

$$x = a(1+\zeta)\cos\theta,$$

$$y = a(1+\zeta)\sin\theta\cos\varphi,$$

$$z = a(1+\zeta)\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x^2+y^2+z^2 = a^2(1+\zeta)^2,$$

где $\zeta(a,\theta,\varphi)$ – искомая функция, характеризующая отклонение поверхности фигуры равновесия от исходного эллипсоида E_0, соответствующего $\zeta = 0$. Величина ζ находится из решения фундаментального нелинейного уравнения

$$R\zeta - \int\limits_S \frac{\zeta' d\sigma'}{D} = W(\zeta,\rho), \qquad (6)$$

где *R* – заданная функция плотности ρ и параметров *p, q* эллипсоида E_0; *D* – расстояние между точками $\zeta(\theta,\varphi)$ и $\zeta'(\theta',\varphi')$ на эллипсоиде E_0; *S* – поверхность единичной сферы; $d\sigma'$ – элемент её площади. $W = \sum\limits_n W_n(\zeta)$ – интегростепенной ряд, члены которого W_n состоят из *n* слагаемых, каждое из них содержит n-ю итерацию нелинейного оператора $\mathcal{A}$ вида

$$\mathcal{A}\zeta = \int\limits_a^b K(s,t)\zeta^\alpha(t)dt.$$

Решение уравнения (6) представляет исключительные трудности. Оно было найдено в виде ряда по функциям Ламэ, представляющим полную ортогональную систему (предельный случай сферических функций), что дало возможность свести задачу к системе рекуррентных линейных интегральных уравнений. Сходимость полученных рядов доказывалась построением соответствующих мажорант. Отметим, что Ляпунов получил свои результаты ещё до того, как теория *линейных интегральных уравнений* обрела более или менее сложившуюся форму.

А. Пуанкаре, такой же универсальный гений, как и Д. Гильберт, конечно, не мог пройти мимо проблемы, в течение двух столетий занимавший умы многих его великих предшественников. Непосредственным поводом обращения А. Пуанкаре к проблеме фигур равновесия явилась работа С. Ковалевской о кольцах Сатурна, представленная в 1874 году в Гёттингенский университет и опубликованная в 1885 году [58]. В этой работе Ковалевская строго доказала, что кольцо есть фигура равновесия. Пуанкаре обратился к задаче о кольце, а затем к уже упоминавшейся выше общей задаче Томпсона и Тэта [59, с.13]. Предварительные результаты Пуанкаре были опубликованы в двух статьях [60], [61]. В том же 1885 году появился большой мемуар Пуанкаре [62] в журнале «Acta Mathematica», по словам Аппеля, «совершенно исключительная работа, шедевр аналитической механики» [59, с.13]. Результаты, полученные в этом мемуаре, являются одной из вершин всего творчества Пуанкаре. Но прежде несколько слов о нелинейных системах вообще.

Делавшийся поначалу упор на линейные системы является общим положением, поскольку вследствие их простоты они значительно легче поддаются анализу. Нелинейные задачи в основном были вызваны потребностями приложений, таких как гидродинамика и небесная механика. Однако в математике XVIII–XIX веков не существовало адекватных математических инструментов для последовательного и систематического анализа таких задач. И кроме того, в целом не имелось достаточно мощных стимулов для привлечения значительного внимания к нелинейным задачам. Нелинейность ещё не заняла своего места среди «первых принципов». Среди большинства физиков доминировала идеология линейного подхода для понимания основных закономерностей окружающего мира. Для нелинейности в большинстве случаев отводилась роль довеска, уточняющего детали. И в самом деле, линейный подход достиг огромных успехов, его вершиной можно считать теорию линейных колебаний. Доведённый до совершенства линейный математический аппарат стал неотъемлемым элементом инструментария физики. Его наглядные, наполненные физическим содержанием образы позволяли предвидеть результат, почти не проводя вычислений. В самом термине «нелинейность» отражено главенствующее место линейных представлений, когда нелинейности отводится вторичная роль. Доминировавшая идеология подпитывала взгляды о возможности перенесения привычных методов линейной теории на новую область. Действие нелинейных эффектов предполагалось учитывать либо с помощью поправок, либо за счёт медленного изменения параметров линейной задачи. На этом пути были созданы расчётные методы, такие как теория возмущений и теория адиабатических инвариантов, играющих столь значительную роль в небесной механике и квантовой физике. При всей важности этих методов они мало применимы для анализа сильно нелинейных систем. Работы Пуанкаре и Ляпунова явились поворотным пунктом не только в указанном отношении, но также повлияли на математическое мировоззрение. В недрах прикладных задач зарождались идеи, которые воплотились в подходы и методы, имеющие концептуальное значение. На рубеже XIX и XX веков происходил глубокий и плодотворный синтез анализа, алгебраических и геометрических методов. В русле этих идей родились качественные методы исследования. Речь идёт о первых шагах качественной теории.

Сущность качественных методов заключается в изучении свойств решений (в общем случае) операторных уравнений без нахождения самих решений (точных или приближённых). Для случая дифференциальных уравнений (с которых начинались качественные методы) без интегрирования, исходя из их правой части требовалось определить вид и расположение кривых, удовлетворяющих этим уравнениям, во всей области их существования [57]. В качественных методах упор делается не на решение, как таковое, а на качественные характеристики системы, её поведение и эволюцию, дополненные количественными исследованиями. Главное внимание уделяется не свойствам отдельных кривых, отдельных функций, а свойствам, присущим всему расматриваемому классу функций, которые представляются уже в качестве единого объекта. Следующее обобщение имеет принципиальное значение – происходит переход от конечного числа элементов к бесконечному, от дискретного к непрерывному, формируются понятия функциональных пространств (С. Пинкерле, Дж. Пеано, М. Фреше, Ж. Адамар, Д. Гильберт, Ф. Рисс, Х. Хан, С. Банах, Н. Винер). Такой подход позволяет строить в данном пространстве различные математические структуры – топологические, групповые и т.п. В функциональных пространствах широко используются геометрические представления и геометрический язык, поскольку в эти пространства можно ввести соотношения, обобщающие соответствующие связи и отношения, характерные для обычного пространства. Качественные методы и функциональные пространства имеют одну и ту же идейную основу.

В нелинейных системах не работает принцип суперпозиции, комбинация двух решений не приводит к новому решению. Нелинейную систему не удаётся представить в виде суммы независимых частей, её необходимо рассматривать во всей её целостности и сложности. Отсюда ясно, что для нелинейных систем адекватным является глобальное рассмотрение. Эволюция нелинейных систем может осуществляться разными путями, на смену однозначности приходит возможность множественности путей развития, многообразие в поведении описываемых объектов.

Представления о качественных методах издавна вызревали в недрах математики. В постановке задачи и разработке методов качественного изучения решений дифференциальных уравнений у Пуанкаре не было предшественников. Такое положение вещей можно объяснить господством аналитических методов; решения задач носили локальный характер. Пуанкаре поставил вопрос о переходе от локального рассмотрения решений к глобальному их описанию на всей комплексной плоскости, для чего подходит удобный и наглядный язык геометрии. С геометрической точки зрения удобно изучать общие свойства решений уравнений, особые точки, поведение всего семейства решений.

Сложность и деликатность нелинейных задач проиллюстрируем следующим примером, к тому же имеющим отношение к предмету нашего исследования. Английским астрономом Дж. Дарвиным (сыном Чарльза Дарвина) был развита стройная космогоническая теория об эволюции и распаде грушевидных фигур равновесия вращающейся жидкой массы, существование которых следовало из работ Пуанкаре [60], [62] и Ляпунова [47]. Отсюда можно было объяснить существование двойных звёзд и планетных систем. Устойчивость грушевидных фигур составляла краеугольный камень теории Дарвина. В указанных работах Ляпунова [47] и Пуанкаре [60] получены результаты «в первом приближении». В своих работах [63], опубликованных в 1901–1902 годы, Пуанкаре дал общие формулы второго приближения. Для получения конкретных результатов требовались сложные расчёты. Эти расчёты были проведены Дарвиным, который пришёл к выводу об *устойчивости* грушевидных фигур равновесия. Ляпунов пришёл к противоположному заключению о *неустойчивости* всех грушевидных фигур данной последовательности. Предварительные результаты он опубликовал в мемуаре «Об одной задаче Чебышева» [51]. Разгорелась полемика, которая продолжалась несколько лет. Работа была весьма сложной и требовала большого объёма вычислений. Ляпунов публиковал свои результаты частями в серии мемуаров (1906–1914) [47], [52]– [55] и дал совершенно строгое решение задачи. Ляпунов писал, что получил точную алгебраическую функцию, на которой и основывалось его заключение. Дарвин же использовал бесконечный ряд, содержавший бесконечное число эллиптических интегралов, и ограничился конечным числом слагаемых, не сделав полной оценки отброшенных членов [51, с. 31–32]. Полемика утихла лишь после того, как Дж. Джинс повторил вычисления Дарвина с учётом третьего приближения и показал, что в этом случае грушевидные фигуры равновесия неустойчивы, что соответствует результатам Ляпунова [64].

В упомянутой выше фундаментальной работе [61] Пуанкаре ввёл понятие *бифуркации* – ключевое понятие теории нелинейных уравнений, которое сейчас приобрело общенаучное значение. Семейство эллипсоидов Маклорена и Якоби зависят от одного параметра, угловой скорости, и при её изменении образуют линейные ряды фигур равновесия. С каждой фигурой равновесия Пуанкаре связал бесконечную последовательность коэффициентов, названных им коэффициентами устойчивости, и условие устойчивости, заключающееся в положительности этих коэффициентов. При обращении одного из коэффициентов в нуль возникает фигура бифуркации. В точке бифуркации при малом изменении параметра происходит качественная перестройка системы. Пуанкаре установил, что значение угловой скорости ω_2 является максимальным. При достижении ω_2 существует эллипсоид равновесия, общий семействам эллипсоидов Маклорена и Якоби. При $\omega < \omega_2$ имеются два ряда фигур равновесия, таким образом ω_2 является бифуркационным значением параметра.

3. Э. Шмидт

Одним из первых к исследованию нелинейных интегральных уравнений приступил Эрхард Шмидт. В последней части своей фундаментальной работы [17]–[18], [65], явившейся дальнейшим развитием исследований Гильберта по интегральным уравнениям, Шмидт переходит к рассмотрению нелинейных уравнений. Отметим, что нередко, обращаясь к этой работе Шмидта, математики и историки математики незаслуженно обходят вниманием её третью часть. Так, к примеру, Дж. Стюарт в своём переводе на английский язык трёх основополагающих трудов Фредгольма, Гильберта и Шмидта по интегральным уравнениям, сопровождённая их комментариями, ограничивается лишь первой частью работы Шмидта [66].

Во введении к своей работе Шмидт упоминает проблему фигур равновесия вращающейся жидкости и приводит пример бифуркации. Неизвестно, был ли Шмидт знаком с работами Ляпунова, который весьма обстоятельно исследовал бифуркации в таких задачах, но так или иначе он на них не ссылается. Шмидт рассмотрел в более общем виде те же уравнения, что и Ляпунов. Такого типа интегральные уравнения получили впоследствии название *уравнений Ляпунова–Шмидта* [67]

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} K(x,s)u(s)ds = f(x) + \int\limits_{\Omega} K_1(x,s)v(s)ds + \sum_{m+n\geq 2} U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u,v \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где $x \in \Omega$,

$$U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u,v \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n_i} \int\limits_{\Omega} \dots \int\limits_{\Omega} K^{(\nu)}(x, s_1, \dots, s_i) u^{\alpha_0}(x) u^{\alpha_1}(s_1) \dots u^{\alpha_i}(s_i) \times \\ \times v^{\beta_0}(x) v^{\beta_1}(s_1) \dots v^{\beta_i}(s_i) ds_1 \dots ds_i. \qquad (8)$$

Здесь $\alpha_j,\ \beta_j,\ j = 0, \dots, i$ – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i = m,\ \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_i = n;\ \Omega$ – ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства; f, v, K, K_1, $K^{(\nu)}$ – заданные непрерывные функции, u – искомая функция.

Слагаемые, входящие в правую часть (8), называются *интегро-степенными членами*. Их сумма $U_{mn}\binom{x}{u,v}$ может быть конечной, в этом случае имеем дело с *интегростепенной формой*, или бесконечной, тогда имеет место *интегро-степенной ряд*. Предполагается, что интегро-степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.

Шмидт ставит задачу о существовании и поиске малых решений обширного класса нелинейных интегральных уравнений (7) при малых значениях функции *v(x)*. Он провёл систематическое и довольно полное исследование поставленной задачи.

Шмидт, в частности, показал, что решение (7) представимо в виде интегростепенного ряда, который в самом простом случае, когда кратность единицы как собственного значения оператора, сопряжённого к оператору $A = \int_\Omega K(x,s)u(s)ds$[1], равна одному, имеет вид

$$u(s) = \sum_{m+n\geq 1} \xi^m V_n^{(m)}\binom{s}{v}.$$

При этом возможные значения ξ определяются из нелинейной системы *уравнений разветвления*

$$\xi = \sum_{m=2}^{\infty} L_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \psi(t) V_n^{(m)}\binom{t}{v} dt, \tag{9}$$

где $L_m = \int_\Omega \psi(t) V_0^{(m)}\binom{t}{v} dt$ – постоянные [65, с. 390–391]. Система вида (9) стала называться впоследствии *уравнением разветвления Ляпунова–Шмидта*.

Явления ветвлений решений в данном случае являются бифуркациями, которые, как было выше уже упомянуто, были детально изучены Ляпуновым в его исследованиях по фигурам равновесия вращающихся жидкостей [52]– [55]. Подчеркнём, что Шмидт существенным образом использовал факты теории линейных интегральных уравнений, созданную Фредгольмом и Гильбертом, в то время, как Ляпунов доказывал существование решений уравнения вида (7) практически «с нуля». Но его аналитическое, совершенно строгое изложение очень сложно и трудно для восприятия, поэтому результаты Шмидта не теряют своей ценности. И в области малых значений входящих в уравнение искомой и известной функций нелинейные интегральные уравнения могут иметь более одного решения. Бифуркации являются яркой иллюстрацией того свойства нелинейных систем, что их эволюция может осуществляться многообразными путями; для их поведения характерна неоднозначность.

4. Э. Пикар, Т. Лалеску, Г. Брату

Ещё одним истоком нелинейных интегральных уравнений являлись нелинейные *дифференциальные* уравнения. Одним из тех математиков, кто при решении дифференциальных уравнений обратился к интегральным уравнениям, был Эмиль

[1]В формулировке Шмидта это звучало так: существует только одна собственная функция $\psi(t)$ из семейства ортогональных решений уравнения, двойственного к уравнению $u(x) - \int_\Omega K(x,s)u(s)ds = 0$ [65, с. 389]

Пикар, ученик Ш. Эрмита, широко известный своими работами по теории функций и теории дифференциальных уравнений. При этом метод доказательства теорем существования, разработанный им в 1880-х годах для дифференциальных уравнений и получивший известность как метод последовательных приближений, оказался (как это стало ясно впоследствии) пригодным и для интегральный уравнений [68]– [69].

Например, если рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), x(0)),$$

то для его решения при определённых предположениях достаточно найти предел рекуррентной последовательности

$$x_n(t) = \int_0^t f(\tau, x_n(\tau))d\tau. \tag{10}$$

Соотношение (10) естественным образом наводит на мысль о непосредственном решении нелинейного уравнения Вольтерры

$$x(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{11}$$

методом последовательных приближений.

Нелинейное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x,s)F(s,\varphi(s))ds = 0, \tag{12}$$

в свою очередь, можно получить интегрированием дифференциального уравнения Пикара 2-го порядка [70, с. 100]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x,y) = 0.$$

В более общем виде уравнения (11) и (12) были исследованы учениками Э. Пикара – румынскими математиками Георгом Брату и Траяном Лалеску. Оба они начинали свое обучение в Ясском университете (Румыния), а затем продолжили образование в Парижском университете: Лалеску – с 1905 по 1908 год, Брату – с 1908 по 1911 год. Результатом их исследований явились диссертации по теории нелинейных интегральных уравнений, защищенные в Сорбонне.

Лалеску рассматривал нелинейное интегральное уравнение Вольтерры

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)]ds = F(x). \tag{13}$$

Основное внимание он уделял частному случаю (13), имеющему вид[2]

$$\varphi(x) + \int\limits_0^x [f_0(x,s) + f_1(x,s)\varphi(s) + ... + f_n(x,s)\varphi^n(s)]ds = F(x) \tag{14}$$

с дифференцируемыми по x функциями $f_i(x,s)$.

Для доказательства существования (13) Лалеску применяет метод последовательных приближений Пикара в предположении о непрерывности функции $\Phi(x,s,t)$ по совокупности переменных и выполнении условия типа Лифшица для $F(x)$.

Лалеску установил наличие ветвления в решении нелинейного уравнения (13). При отсутствии функции $\varphi(x)$ в уравнении (14), применяя к обеим его частям операцию дифференцирования

$$\begin{gathered} f_0(x,x) + f_1(x,x)\varphi(x) + ... + f_n(x,x)\varphi^n(x) + \\ + \int\limits_0^x \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x}\varphi^n(s)\right] ds = F'(x), \end{gathered} \tag{15}$$

можно использовать метод последовательных приближений Пикара. Рекуррентное определение $\varphi_p(x)$ на основе (15) приводит к алгебраическому уравнению степени *n*, что и даёт ветвление решений [72, с.168].

Основным объектом исследования Брату были нелинейные уравнения Фредгольма вида

$$\Phi(x,\varphi(x)) + \lambda \int\limits_a^b F(x,y,\varphi(y))dy = 0 \tag{16}$$

и

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)F(y,\varphi(y))dy + f(x), \tag{17}$$

где $F(x,y,z)$ – аналитическая по z функция.

Свои исследования в данной области Брату начал публиковать в 1910 году [73], а подытожил в 1914 году в работе «Нелинейные интегральные уравнения» [74]. В ней Брату рассмотрел различные методы поиска малых решений уравнений (16)–(17) с нелинейностями типа Лалеску

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)(b_0 + b_1\varphi + ... + b_n\varphi^n + ...)dy, \tag{18}$$

где $b_i = b_i(y)$ – конечные интегрируемые функции, а также с трансцендентными нелинейностями вида[3]

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)e^{\varphi(y)}dy. \tag{19}$$

[2]Это уравнение впоследствии стало носить его имя (см., например, [71, с. 414]).

[3]Уравнение вида (19) стали впоследствии называть уравнением Брату (см., например, [71, с. 415]).

Основной метод решения уравнений (16)–(19), заключался в разложении искомой функции в ряд по степеням параметра λ и доказательстве его сходимости путём линеаризации исходного уравнения в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, соответствующей $\varphi = \varphi_0(x)$ с использованием формулы Тейлора. При этом, если линеаризованное уравнение

$$\Phi'_{\varphi}(x, \varphi_0)\psi(x) - \lambda_0 \int\limits_a^b K(x, y)F'(y, \varphi_0)\psi(y)dy = 0$$

имеет определитель Фредгольма $D(\lambda)$, равный нулю в точке $\lambda = \lambda_0$, то решение уравнения (16) (и всех его частных случаев) по утверждению Брату, имеет, по крайней мере, две ветви, выходящие из этой точки. Если же $D(\lambda) \neq 0$, то решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (16) единственно и голоморфно по λ в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, соответствующей $\varphi = \varphi_0(x)$ [74, с. 121–122].

5. П.С. Урысон, А.И. Некрасов

Примечательным событием в исследовании нелинейных систем явилась работа Павла Самуиловича Урысона [75] – первая в нашей стране работа по теории нелинейных уравнений в бесконечномерном пространстве. Но сначала несколько слов о математическом сообществе Москвы того времени. По словам П.С. Александрова [76, с. 140]: «Мало найдётся в истории математической науки периодов столь горячего энтузиазма, как начало двадцатых годов в Московском университете, когда в столь краткий срок, буквально в несколько лет возникла целая большая научная школа, в значительной степени определившая дальнейшее развитие математики в нашей стране и сразу выдвинувшая целый ряд новых выдающихся учёных. ... П.С. Урысон сразу же попал в самый центр этого содружества молодых математиков – в первую очередь, конечно, вследствие необычайно яркого своего математического таланта и своей увлечённости наукой, но также и вследствие своего кипучего темперамента и обаятельных свойств своего характера».

Доклад Урысона в ММО «Об одном типе нелинейных интегральных уравнений» состоялся 20 февраля 1919 года [25, с. 154], [77, с. 97–98]. Эта работа была начата Урысоном в 1918 году, когда он был ещё 20-летним студентом, и опубликована лишь в 1923 году. Тогда она осталась малоизвестной и не была оценена по достоинству даже у себя на родине. Так, в сборнике «Наука в СССР за пятнадцать лет. Математика» в главе «Анализ» в параграфе об интегральных уравнениях указанная работа Урысона не упоминается [78, с. 110–114]. Урысон, как и Брату, исходил из уравнения Пикара и рассматривал уравнение[4]

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, s, y(s))ds + f(x), \tag{20}$$

где *y(x)* – искомая функция. В основу его изучения Урысон положил метод последовательных приближений. Он показал, что при $f(x) \geq 0$ и некоторых простых усло-

[4]В СССР уравнение (20) принято называть уравнением Урысона, хотя справедливее было бы называть его уравнением Брату–Урысона.

виях, налагаемых на *K(x,s,y)*, существует интервал значений величины $\lambda, \alpha < \lambda < \beta$, когда при каждом λ из этого интервала уравнение (20) имеет единственное положительное решение $y(x, \lambda)$, монотонно возрастающее с ростом λ. При этом

$$\lim_{\lambda \to \alpha} y(x, \lambda) = 0, \lim_{\lambda \to \beta} y(x, \lambda) = \infty.$$

Полученные результаты полностью описывают множество положительных решений уравнения (20).

Впоследствии А.Н. Тихонов дал свою физическую интерпретацию уравнению Урысона (20) [79, с. 76–77]. Он указал на задачу о поперечном смещении оси вала u, вращающегося с угловой скоростью ω, которое удовлетворяет уравнению

$$u'' + \lambda \rho f(u) = 0, \tag{21}$$

где $f(u)$ – сила инерции вала, ρ – его плотность; $\lambda = \omega^2/T$, T – напряжение вала. Задача (21) также сводится к уравнению (20).

Работа Урысона по интегральным уравнениям представляет не только исторический интерес. Она опередила своё время и привлекла внимание через несколько десятилетий. В ней оказалась заложена теория положительных операторов. Эта работа относится к ещё не родившемуся, а только формирующемуся функциональному анализу (причём нелинейному). Исследования Урысона были продолжены в двух школах функционального анализа Советского Союза – одесской школе М.Г. Крейна и воронежской школе М.А. Красносельского [80, с. 7]. Будучи математиком очень широкого кругозора, Урысон проявлял значительный интерес и к нелинейным системам. По словам А.Н. Колмогорова: «П.С. Урысон неслучайно был зачинателем того подхода за расширение тематики, которому суждено было превратить московскую математическую школу «узкого профиля» в универсальную математическую (школу)» [81, с. 167]. П.С. Алескандров вспоминал, что что как-то «Павел Самуилович жадно накинулся на новую литературу и усиленно изучал знаменитую работу Биркхофа о динамических системах. Он много занимался этими вопросами следующую зиму и поставил перед собой новые и трудные задачи» [76, с. 148]. Не вызывает сомнений, что П.С. Урысон многое мог сделать в изучении нелинейных систем.

Значительный шаг в построении теории нелинейных интегральных уравнений был сделан А.И. Некрасовым в его исследованиях по теории волн установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости. Александр Иванович Некрасов окончил Московский университет в 1906 году, ученик Н.Е. Жуковского. Работал в Московском университете, ЦАГИ и в Институте механики АН СССР. Значения его работ по нелинейной теории волн можно оценить из следующего факта. В 1920 году постановлением Совнаркома за подписью В.И. Ленина в ознаменование сорокалетия научной деятельности Н.Е. Жуковского была учреждена премия его имени за «Наилучшие работы по математике и механике». Первым лауреатом этой премии (1922) за работы по теории волн стал А.И. Некрасов (следующим лауреатом был С.А. Чаплыгин).

Результаты Некрасова были сначала опубликованы в 1921 году в «Известиях Иваново–Вознесенского политехнического института» [82], а затем вошли в его монографию [83]. Некрасов в своих исследованиях по теории волн вывел нелинейное интегральное уравнение, описывающее поведение волны. Он дал метод решения широкого класса нелинейных интегральных уравнений, зависящих от параметра λ в окрестности точки разветвления $\lambda = \lambda_0$ [84]. Этот метод получил впоследствии название «метод Некрасова». Изложение модификации своего метода было отослано Некрасовым на международный съезд по теоретической механике в Делфте (Голландия) в 1924 году. Сам Некрасов на съезд не поехал и доклад был прочитан Т. Леви-Чевитой. Краткое содержание доклада было опубликована в трудах съезда [85, с. 119].

Задача изучения волнового движения тяжёлой жидкости сводится к определению функции $\Phi(\theta)$, представляющей собой угол наклона касательной к профилю волны установившегося вида в какой-нибудь его точке; θ – аргумент изображения этой точки на окружности единичного радиуса. Для функции $\Phi(\theta)$ Некрасов выводит нелинейное интегральное уравнение[5] [82], [86, с.22]:

$$\Phi(\theta) = \mu \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin \Phi(\tau)}{1 + \mu \int\limits_0^{\tau} \sin \Phi(\omega) d\omega} K(\tau, \theta) d\tau, \tag{22}$$

где

$$K(\tau, \theta) = \frac{1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{n}.$$

Полагая $\mu = 3 + \lambda$, он ищет решение (22) в виде степенного ряда

$$\Phi(\theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \Phi_k(\theta). \tag{23}$$

Подстановка данного ряда в уравнение (22) приводит к рекуррентной системе для определения Φ_k. Для доказательства сходимости ряда (23) строятся мажоранты.

На основании исследования решений (22) Некрасов показывает, что установившихся волн не может быть, если параметр μ изменяется в замкнутом промежутке от нуля до первого собственного значения сответствующего линейного интегрального уравнения. При этом предполагается, что функция Φ зависит от θ и μ и удовлетворяет некоторым условиям. Математический смысл этого результата состоит в том, что первое собственное значение линейного интегрального оператора является бифуркационным значением параметра нелинейного интегрального оператора [87, с. 156].

Теория нелинейных интегральных уравнений, разработанная Некрасовым для решения указанной задачи гидродинамики, была опубликована отдельной главой в 1922 году [84]. В ней он привёл общую теорию некоторого специального вида интегральных уравнений[6]

$$f(x) = \mu \int\limits_a^b K(x, y)[f(y) + \varepsilon R(\mu, y, f(y))] dy \tag{24}$$

[5] Отметим, что уравнение (22) является частным случаем уравнения Брату–Урысона (20).

[6] Эти уравнения принято называть уравнениями типа Гаммерштейна, хотя работа Гаммерштейна, посвященная аналогичным вопросам, была опубликована лишь в 1930 году (см. ниже).

в предположении, что $K(x,y)$ – симметричное положительно определённое ядро, у которого первое собственное значение μ_1 является простым, а $R(\mu,y,u)$ – аналитическая функция μ и u [88, с. 14].

Метод Некрасова решения уравнения (24) состоит в построении искомого решения в виде ряда по степеням малого параметра и доказательстве сходимости полученного ряда методом мажорант. Этот приём для решения подобных нелинейных задач применялся ещё Ляпуновым и Шмидтом, однако их способ состоял в редукции задачи к решению некоторого преобразованного нелинейного функционального уравнения и уравнения разветвлений. Некрасов пошёл по другому пути: он ищет решение исходного нелинейного интегрального уравнения непосредственно. Он также показал, что предложенный им метод может быть распространён и на нелинейные интегральные уравнения с ядром Шмидта [87, с. 157].

Любопытен следующий факт. 1 ноября 1918 года, то есть в самом начале работы Урысон записал в своём дневнике: «Сегодня продолжаю импровизировать: работа продолжается очень хорошо. Если оправдается одна моя мысль – о сродстве моих уравнений с задачей равновесии вращающегося жидкого тела, то будет совсем шикарно». И далее уже в 1919 году: «24 сентября. Доказал существование одного решения волнового уравнения. Невероятно устал, но был на седьмом небе.

25 сентября. Продолжаю заниматься волновыми уравнениями, но на этот раз без успеха.» [77, с. 72–74].

Сентябрьские записи особых вопросов не вызывают. На каком-то этапе работы Урысон свернул на то же направление, по которому двигался Некрасов, но успеха не достиг. Урысон пишет 25 сентября 1920 года: «О моём “уравнении волны” Некрасов, оказывается докладывал на Всероссийском съезде физиков» [77, с. 76].

Запись 1 ноября требует пояснений. В начале XX века связь математиков Петербурга и Москвы по каким-то причинам оборвалась. Московские математики не были знакомы с работами Ляпунова [89, с. 231]. Напомним, что Ляпунов – виднейший представитель Петербургской математической школы, в его работе 1884 года [47] содержится исторически первое нелинейное интегральное уравнение. Работы Ляпунова в нашей стране получили известность среди широкого круга математиков после издания части его трудов в 1925–1927 годах, приуроченной к 200-летию Академии Наук [90]– [91]. Урысона тогда уже не было в живых. Видимо, ему не удалось продвинуться в этом направлении, в работе Урысона [79] о фигурах равновесия вращающихся жидких масс ничего не говорится.

6. Л. Лихтенштейн, А. Гаммерштейн

Ещё один шаг в развитии теории нелинейных интегральных уравнений связан с именем польского математика Леона Лихтенштейна. Он получил инженерное образование в Берлине, защитил диссертацию по электротехнической специальности, но через некоторое время он обратился к математике, где добился значительно бо́льших успехов. В 1931 году Лихтенштейн по приглашению Львовского университета прочёл курс лекций по интегральным уравнениям, где изложил работы предшественников и свои собственные результаты. В переработанном и дополненном виде этот курс был издан в Берлине [92]. Заслуга Лихтенштейна заключается в том, что он обратил внимание математиков на труды Ляпунова и Шмидта, дал их дальнейшее развитие, привёл оригинальные доказательства сходимости рядов при разложении искомого решения уравнения по системам ортогональных функций. Для доказательства существования решения (7) Лихтенштейн построил последовательные приближения $z_1(s), z_2(s), ...$

$$\begin{cases} z_1(s) = U_{01}\binom{s}{v}, \\ z_2(s) = U_{01}\binom{s}{v} + \sum\limits_{m+n\geq 2} U_{mn}\binom{s}{z_1,v}, \\ \dots\dots \\ z_k(s) = U_{01}\binom{s}{v} + \sum\limits_{m+n\geq 2} U_{mn}\binom{s}{z_{k-1},v}, \\ \dots\dots \end{cases} \quad (25)$$

сходящиеся к искомому решению $z(x)$ при условии малости $|v(s)|$.

Кроме того, Лихтенштейн также рассмотрел системы интегральных уравнений, которые решались тем же методом, что и уравнения (7). К примеру, для случая двух уравнений с двумя переменными $u(x)$ и $w(x)$ Лихтенштейн сводил такие системы к виду

$$u(x) = U(x) - \sum_{m+n+p\geq 2} U_{mnp}\begin{pmatrix} x \\ uw; v \end{pmatrix},$$
$$w(x) = W(x) - \sum_{m+n+p\geq 2} W_{mnp}\begin{pmatrix} x \\ uw; v \end{pmatrix},$$

где $v(x)$ есть заданная непрерывная функция, U_{mnp} и W_{mnp} – интегростепенные члены порядка *n* относительно $w(x)$, порядка *m* относительно $u(x)$ и порядка *p* относительно $v(x)$ [93, с.110].

Нельзя обойти вниманием работу Гаммерштейна по нелинейным интегральным уравнениям [94]. Адольф Гаммерштейн – немецкий математик, ученик Эдмунда Ландау. Как и многие его коллеги, Гаммерштейн, начал обучение в одном университете, в Гейдельберге, а продолжил в Гёттингене. Первоначально область его научных интересов лежала в теории чисел (по ней он защитил диссертацию в 1919 году). В дальнейшем она сместилась в сторону нелинейных интегральных уравнений и уравнений в частных производных.

Гаммерштейн опубликовал свою работу в 1930 году, где он подробно рассмотрел интегральное уравнение, также представляющее собой частный случай уравнения Брату–Урысона

$$u(x) = \int_a^b K(x,y) f(y, u(y)) dy \quad (26)$$

в предположении о том, что линейный интегральный оператор A с ядром $K(x,y) = K(y,x)$ имеет только положительные собственные значения и для уравнения $u(x) = Au(x)$ справедлива альтернатива Фредгольма [94, с. 120].

Метод Гаммерштейна опирается на теорему Гильберта–Шмидта и заключается в приведении интегрального уравнения (26) к системе алгебраических или трансцендентных уравнений с помощью системы ортонормированных собственных функций

$\{\psi_m\}$ оператора A. Другими словами, решение (26) представляется в виде

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x),$$

причём для определения постоянных c_m требуется построить решение бесконечной системы уравнений с бесконечным числом неизвестных вида

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f\left[x, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)\right] \psi_m(x) dx. (m = 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Гаммерштейн показал, что система (27) имеет, по крайней мере, одно решение, если функция $f(z, s)$ непрерывна и удовлетворяет определённым ограничениям на рост [95], [93, с. 64–67]. Кроме того, он сформулировал и доказал ряд условий на функцию $f(y, u)$, при которых уравнение (26) имеет единственное решение. Одним из таких условий, к примеру, является ограниченность величины $|\partial f(x, u)/\partial u|$ [94, гл. II].

На простейшем примере уравнения Гаммерштейна можно увидеть ряд новых явлений, специфических для нелинейных уравнений и не имеющих места в линейных задачах.

Следуя [96, Гл. IX, §37], рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y u^2(y) dy. \tag{28}$$

Положим

$$c = \int_0^1 y u^2(y) dy. \tag{29}$$

Тогда

$$u(x) = \lambda c x^2.$$

Подставляя это выражение для $u(x)$ в (29), будем иметь

$$c = \frac{c^2 \lambda^2}{6}. \tag{30}$$

Уравнение (30) имеет два решения $c_1 = 0, \;\; c_2 = 6/\lambda^2$. Следовательно, исходное интегральное уравнение также имеет два решения *при любом* $\lambda \neq 0$

$$u_1(x) \equiv 0, u_2(x) = \frac{6}{\lambda} x^2.$$

Заметим, что линейное однородное интегральное уравнение

$$u(x) = \mu \int_0^1 x^2 y u(y) dy$$

с тем же ядром $K(x, y) = x^2 y$ имеет ненулевое решение *лишь при одном значении* μ, а именно, при $\mu = 4$, являющимся собственным значением линейного оператора с ядром $K(x, y)$. Поэтому, если по аналогии с линейным случаем считать собственным значением оператора Гаммерштейна $H(u) = \int_0^1 x^2 y u^2(y) dy$ число λ, при котором уравнение (28) имеет, по крайней мере, одно ненулевое решение, то здесь получаются *бесконечные интервалы собственных значений* $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Заключение

Теория интегральных уравнений занимает выдающееся место в создании основных понятий и методов функционального анализа. Но её роль в *становлении* функционального анализа ещё более значительна. Первые десятилетия XX века явились периодом его бурного развития, но не следует считать, что идеи функционального анализа были сразу и безоговорочно восприняты. Сказывался неизбежный консерватизм научного сообщества. Рассмотрение целого класса функций вместо отдельных функций, переход в бесконечномерные функциональные пространства мог восприниматься лишь как формулировка на другом языке известных иллюстраций классического анализа. Было совершенно не очевидно, что здесь не просто другой язык, а переход в новое качество, повлекшее за собой фундаментальные изменения в подходе ко многим проблемам математики и её приложений. Теория интегральных уравнений во многом способствовала осознанию факта рождения нового раздела математики, того, что функциональный анализ позволяет получить существенно новые результаты.

Величественное здание функционального анализа стало в определённом смысле получать свою завершённую форму в 1920-е годы. Начало было положено диссертацией С. Банаха [97], представленную им во Львовский университет в июне 1920 и опубликованную в журнале «Fundamenta Mathematica». Обратим внимание на название его работы *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. Хотя здесь Банах всё внимание уделяет линейным нормированным пространствам и достигает высшей степени формализации, вводя их с помощью хорошо структурированной системы аксиом, слова «интегральные уравнения» в названии работы не случайны. Для Банаха интегральные уравнения также явились одним из главных мотивов его замечательных исследований.

Фундаментальное значение для функционального анализа имеет теорема о продолжении линейного функционала, определённого на некотором подпространстве, на всё пространство с сохранением нормы (теорема Хана–Банаха). Здесь следует отметить, что австрийский математик Ханс Хан, внёсший огромный вклад в создание функционального анализа, в своей работе 1927 года, где доказана указанная теорема, также исходит из интегральных уравнений [98].

А. Монна в своей книге по истории функционального анализа отмечает две линии развития этой области. Одна ведёт от И. Фредгольма, Д. Гильберта, Ф. Рисса, Э. Хелли, Х. Хана к С. Банаху и Львовской школе. Другая линия исходит от Э. Лаггера и Х. Грассмана и далее идёт к итальянской школе – Д. Пеано, С. Пинкерле и В. Вольтерра [21, с. 133]. Заметим, что для обеих линий развития основополагающее значение имели интегральные уравнения. Происходила эволюция конкретных проблем из различных областей классической математики – линейной алгебры, интегральных уравнений.

Теория интегральных уравнений явилась одним из тех источников, которые дали необходимый материал, позволявший строить обобщающие конструкции на всё более высоком уровне абстракции. Происходил переход от отдельных математических объектов – чисел, векторов, уравнений – к структурным образованиям – группам, полям, кольцам, векторным пространствам. Это является характерной особенностью современной математики. Что же дальше? В явном виде нелинейные уравнения удаётся решить лишь в исключительных случаях. Поэтому важнейшее значение имеют теоремы существования решений и качественные методы для выявления характера решений. Как было указано выше, качественные методы получили относительно полное развитие для локальных задач малых решений и малых изменений параметров. Значительно большую общность и больший интерес представляют нелокальные задачи, когда требуется выявление всего множества значений параметров, когда существуют различные классы решений; зависимости решений от значений параметров и т.п. Это уже следующий этап развития теории нелинейных уравнений и его история требует отдельного изучения.

Авторы выражают благодарность участникам Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна–2016 профессорам: М.Л. Гольдману (Москва, РУДН), Э.М. Мухамадиеву (Вологда, ВоГУ) и Ю.П. Вирченко (Белгород, БелГУ) за внимание к работе и полезные обсуждения.

Библиографический список

1. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. Т. 2. Перевод и предисловие И.Б. Погребысского. М., ГИТТЛ, 1957.
2. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. под ред. А.П. Юшкевича. М.: Физматлит, 1960.
3. *Симонов Н.И.* Прикладные методы анализа у Эйлера. М.: Гостехиздат, 1957.
4. *Abel N.H.* Solution de quelques problèmes à l'aide intégrales définies. In: Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 11–27.
5. *Abel N.H.* Résolution d'un problème de mèchanique. In: Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 97–101.
6. *Bôcher M.* An Introduction to the Study of Integral Equations. Cambridge, The University Press, 1909.
7. *Bateman H.* Report on the history and present state of the theory of integral equations // British Assoc. for the Advancement of Sci. 1910. Vol. 80. P. 345–424.
8. *Дорофеева А.В.* Создание классической теории интегральных уравнений с симметрическим ядром. В сб. История и методология естественных наук. Математ. и механика. Вып. XVI. М.: МГУ, 1974. С. 63–78.
9. *Александрова И.Л.* Из истории теории интегральных уравнений. Дисс... кандидата физико-математических наук: 07.00.10. М., ИИЕТ РАН, 1992.
10. *Du Bois-Reymond P.* Bemerkungen über $\Delta z = 0$ // J. de Crelle. 1888. Vol. 103.

P. 204–229.
11. *Volterra V.* Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti // Ann. Mat. Pura Appl. 1897. Vol. 25. P. 139–178.
12. *Volterra V.* Sulla inversione degli integrali definiti // R.C. Accad. Lincei. 1896. Vol. 5. P. 177–185.
13. *Volterra V.* Sopra un problema di elettrostatica // Nuovo Cimento. 1884. Vol. XVI. P. 49–57.
14. *Volterra V.* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris, 1913.
15. *Fredholm E.I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta Math. 1903. Vol. 27. P. 365–390.
16. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig: Verlag und Druck von B.G. Teubner, 1912.
17. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener // Math. Ann. 1907. Vol. 63. P. 433–476.
18. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 161–174.
19. *Schmidt E.* Über die Auflösung linearer Gleichungen mitunendlich vielen Unbekannten // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 1. 1908. Vol. 25. P. 53–77.
20. *Dieudonne J.* History of functional analysis. Amsterdam: North-Holland publishing company, 1981.
21. *Monna A.F.* Functional Analysis in Historical Perspective. New York: Halstead Press, Wiley, 1973.
22. *Молодший В.Н.* О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века // ИМИ. 1978. Вып. 23. С. 32–55.
23. *Люстерник Л.А.* Молодость Московской математической школы // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 1, № 133. С. 137–161.
24. *Мухин Р.Р.* Хаос и неинтегрируемость в гамильтоновых системах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Vol. 14, № 1. С. 3–24.
25. *Люстерник Л.А.* Молодость Московской математической школы // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 4, № 136. С. 147–185.
26. *Bernkopf M.* The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory // Arch. Hist. Ex. Sci. 1966. Vol. 3. P. 1–96.
27. *Birkhoff G.& Kreyszig E.* The establishment of functional analysis // Historia Math. 1984. Vol. 11. P. 258–321.
28. *Lindström J.* On the origin and early history of functional analysis. UUDM project Report 2008:1, Uppsala University, 2008.
29. *Bourbaki N.* Elements d'histoire des mathematiques. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2007.
30. *Weyl H.* David Hilbert and his mathematical work // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50, № 9. P. 612–654.

31. *Рид К.* Гильберт. М.: Наука, 1977.
32. *Klein F.* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Arithmetik. Algebra. Analysis. Vierte Auflage. Springer, Berlin, 1913.
33. *Гильберт Д.* Общая теория интегральных уравнений. Д. Гильберт. Избранные труды: в 2 т. Под ред. А. Н. Паршина. Т. 2: Анализ. Физика. Проблемы Гильберта. М.: Факториал, 1998. С. 68–366.
34. *Медведев Ф.А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. 2-е изд. М.: УРСС, 2006.
35. *Riesz F.* Über orthogonal Functionensysteme // Ouevres complètes. 1960. Vol. 1. Budapest. P. 385–395.
36. *Riesz F.* Sur les système orthogonaux de fonctions // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 615–619.
37. *Fisher E.* Sur la convergence en moyenne // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 1022–1024.
38. *Riesz F.* Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, Gauthier-Villar, 1913.
39. Riesz F. Über lineare Funktionalgleichungen // Acta Math. 1918. Vol. 41. P. 71–98.
40. *Hilbert D.* Сущность и цели анализа бесконечно многих переменных / Д. Гильберт. Избранные труды: в 2-х т. Под ред. А. Н. Паршина. Т. 2: Анализ. Физика. Проблемы Гильберта. М.: Факториал, 1998. С. 35–49.
41. *Вейль Г.* Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания математики. Математический способ мышления. М.: Наука, 1989. С. 24–41.
42. *Тихомиров В.М.* Замечания к работе «Сущность и цели анализа бесконечно многих переменных» / Д. Гильберт. Избранные труды: в 2-х т. Под ред. А.Н. Паршина. Т. 2: Анализ. Физика. Проблемы Гильберта. М.: Факториал, 1998. С. 35–49.
43. *Hilbert D.* Über das Unendliche // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 161–190.
44. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Лаплас. 2-е изд., испр. и перераб. М.: Наука, 1985.
45. *Мухин Р.Р.* Очерки по истории динамического хаоса (исследования в СССР в 1950–1980-е годы). 2-е издание. М.: УРСС, 2012.
46. *Ляпунов А.М.* О форме небесных тел. Избранные труды. Под ред. В.И. Смирнова. Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. С. 303–322.
47. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. СПб., Издание академии наук, 1884.
48. *Юшкевич А.П.* А.М. Ляпунов и Академия наук Института Франции (по неопубликованным архивным документам) // ИМИ. 1965. Vol. XVI. P. 375–388.
49. *Смирнов В.И., Юшкевич А.П.* Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом. Т. XXIX. 1985. С. 265–284.
50. *Liapounoff A.M.* Sur la stabilité des figures ellipsondales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation // Ann. Facultë Sci. Univ. Toulouse, 2 ser. 1904. Vol. 6. P. 5–116.
51. *Ляпунов А.М.* Об одной задаче Чебышёва // Записки Академии наук по физ.-мат. отд. 8 сер. Т. 17, № 3. С. 1–32.

52. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1906.
53. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Maclaurin. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1909.
54. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Jacobi. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1912.
55. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1914.
56. *Liapunoff A.M.* Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. 8-me Serie. 1903. Vol. 14, № 7. P. 1–37.
57. *Пуанкаре А.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями. Пер. с франц. С примечаниями А.А. Андронова и с дополнениями Е. Леонтович, А. Майер, В. Степанова, И. Петровского и Ю. Рожанской. М., ГИТТЛ, 1947.
58. *Kovalevskaya S.* Zusaetze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen ueber die Gestalt der Saturnringe // Astronom. Nachr. 1885. Vol. 111. P. 37–48.
59. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Пер. с фр. под ред. и с доп. Н.И. Идельсона. М.-Л.: ОНТИ, 1936.
60. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // C.R. Acad. Sci. 1885. Vol. 100. P. 346–348.
61. *Poincaré H.* Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne // Bull. astronom. 1885. Vol. 2. P. 507–508.
62. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. Vol. 7, № 1. P. 259–380.
63. *Poincaré H.* Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse // Proc. Roy. Soc. 1901. Vol. 69. P. 148–149; Philos. Trans. A. 1902. Vol. 198. P. 333–373; 1902. Vol. 200. P. 67.
64. *Jeans J.H.* The motion of tidally distorted masses. Memories of the Roy. Astr. Soc., LXII (1917).
65. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Über die Auflösing der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. 1908. Vol. 65. P. 370–399.
66. *Fredholm Hilbert Schmidt.* Three Fundamental Papers on. Integral Equations. Translated with commentary by. G.W. Stewart, 2011. Available at www.umiacs.umd.edu/ stewart/FHS.pdf (accessed 19.10.15).
67. *Хведелидзе Б.В.* Уравнение Ляпунова–Шмидта. Матем. энциклопедия. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982. С. 473–474.

68. *Picard E.* Sur une équation fonctionnelle // C.R. Acad. Sci. 1904. Vol. 139. P. 245–248.
69. *Picard E.* Sur une équation fonclionnelle se présentant dans la théorie de certaines équation aux dérivées partielles // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 5. P. 1009–1012.
70. *Picard E.* Traité d'Analyse. T. III. Gauthier-Villars. Paris, 1905.
71. *Davis H.T.* Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, New York, 1962.
72. *Lalescu' T.* Sur l'équation de Volterra // J. de Math., ser. 6. 1908. Vol. 4. P. 125–202.
73. *Bratu G.* Sur certaines équations intégrales non linéaires // C.R. Acad. Sci. Paris. 1910. Vol. 150. P. 896–899.
74. *Bratu G.* Sur les équations intégrales non linéaires // Bulletin de la S. M. F. 1914. Vol. 42. P. 113–142.
75. *Урысон П.С.* Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Матем. сб. 1923. Т. 31. Вып. 2. С. 236–255.
76. *Александров П.С.* О моём друге. Нейман Л.С. Радость открытия. М.: Детская литература, 1972. С. 135–149.
77. *Нейман Л.С.* Радость открытия (математик Павел Урысон). М.: Детская литература, 1972.
78. Математика: Наука в СССР за пятнадцать лет (1917–1932). М.-Л.: ГТТИ, 1932.
79. *Урысон П.С.* Труды по топологии и другим областям математики. Прим. и ступит. статья П.С. Александрова. Т. 1–2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
80. *Архангельский А.В., Тихомиров В.М.* Павел Самуилович Урысон (1898–1924) // УМН. 1998. Т. 53. Вып. 5, № 323. С. 5–26.
81. *Колмогоров А.Н.* Научный руководитель. Нейман Л.С. Радость открытия. М.: Детская литература, 1972. С. 160–164.
82. *Некрасов А.И.* О волнах установившегося вида // Изв. Иваново-Вознесен. политехн. ин-та. 1921. Т. 3. С. 52–65.
83. *Некрасов А.И.* Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
84. *Некрасов А.И.* О волнах установившегося вида, гл.2. О нелинейных интегральных уравнениях // Изв. Иваново-Вознесен. политехн. ин-та. 1922. Vol. 6. P. 155–171.
85. *Лапко А.Ф., Люстерник Л.А.* Из истории советской математики // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 6, № 138. С. 13–140.
86. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие // УМН. 1962. Т. 17. Выл. 2, № 104. С. 13–75.
87. *Секерж-Зенькович Я.И.* Александр Иванович Некрасов (к семидесятипятилетию со дня рождения) // УМН. 1960. Т. 15. Вып. 1, № 91. С. 153–162.
88. *Вайнберг М.М., Айзенгендлер П.Г.* Методы исследования в теории разветвления решений. Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. ВИНИТИ. М., 1966, С. 7–69.
89. *Люстерник Л.А.* Молодость Московской математической школы // УМН. 1967.

Т. 22. Вып. 2, № 134. С. 199–239.
90. *Liapunoff A.M.* Sur certaines séries de figures d' équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 1-re. Leningrad, 1925.
91. *Liapunoff A.M.* Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 2-me. Leningrad, 1927.
92. *Lichtenstein L.* Vorlesungen Über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin: Julius Springer, 1931.
93. *Смирнов Н.С.* Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.-М.: ОНТИ, 1936.
94. *Hammerstein A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta Math. 1930. Vol. 54. P. 117–176.
95. *Golomb M.* Review of the article «Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen». Jahrbuch Database. URL: http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165&type=pdf (accessed: 19.10.15)
96. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975.
97. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. Vol. 3. P. 133–181.
98. *Hahn H.* Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen // J. Reine Angew. Math. 1927. Vol. 157. P. 214–229.

ABOUT THE HISTORY OF NON-LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin

Stary Oskol Technological Institute named after A.A.Ugarov,
the Branch of National Research Technological University «MISIS»

The work is dedicated to the history of the theory of nonlinear integral equations, covering a period before the start of the 1930s. By analyzing the specifics of the initial period, authors emphasize that the integral equations (in particular, nonlinear equations) is independent object of research with their own problems , requiring its own system of concepts and own language. As a starting point here A.M. Lyapunov's and A.Poincare's works about the figures of equilibrium of rotating fluids were taken (in these works non-linear integral equations first appeared and qualitative methods originated). As a continuation – corresponding results of some their followers – E. Schmidt, T. Lalesku and G. Bratu is discussed.

It is noted that by the end of 1920s – beginning of 1930s. the old ideological framework, dominated in mathematics in XVIII – XIX centuries – «equation-solution» has exhausted itself. For the further progress new ideas and new approaches were needed. The authors attributed this period to the next stage of development, when it became involved topological and functional-analytic methods and began to build a consistent deductive theory, based on strict definitions and common structures. In this context, the contribution to the development of the theory of nonlinear integral equations European mathematicians

– L. Lichtenstein and A. Hammerstein and domestic mathematicians – P.S. Urysohn and A.I. Nekrasov is analyzed.

The influence of the theory of nonlinear integral equations on the creation and establishment of functional analysis is also estimated.

Keywords: History of functional analysis, nonlinear integral equations, Urysohn equation, Hammerstein equation, A.M. Lyapunov, H. Poincare, D. Hilbert, E. Schmidt, Bratu equation, Lalescu equation, L. Lichtenstein, A.I. Nekrasov, bifurcations, equilibrium figures of rotating liquids, qualitative methods.

DOI:10/18500/0869-6632-2016-24-2-?-?

Paper reference: Bogatov E.M., Mukhin R.R. About the history of non-linear integral equations // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, № 2. P. ?

References

1. *Euler L.* Integral Calculus. Vol. 2 [in Russian]. Moscow, GITTL, 1957.
2. *Vileytner G.* History of mathematics from Descartes to the middle of the XIX century [in Russian]. Moscow, Fizmatlit, 1960.
3. *Simonov N.I.* Euler's apllied methods of analysis [in Russian]. Moscow, GITTL, 1957.
4. *Abel N.H.* Solution de quelques problèmes à l'aide intégrales définies. In: Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 11–27.
5. *Abel N.H.* Résolution d'un problème de mèchanique. In: Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel 1. (Nouv. Ed.; Ed. L. Sylow-S. Lie) Grondahl & Son, Christiania, 1881. P. 97–101.
6. *Bôcher M.* An Introduction to the Study of Integral Equations. Cambridge, The University Press, 1909.
7. *Bateman H.* Report on the history and present state of the theory of integral equations // British Assoc. for the Advancement of Sci. 1910. Vol. 80. P. 345–424.
8. *Dorofeeva A.V.* Creation of the classical theory of the integral equations with simmetric kernel // Hist. and Methodol. of the Nat. Sci. [in Russian]. 1974. Vol. 16. P. 63–77.
9. *Aleksandrova I.L.* About the history of the theory of integral equations. PhD Thesis, Moscow, IHST RAS, 1992.
10. *Du Bois-Reymond P.* Bemerkungen über $\Delta z = 0$ // J. de Crelle. 1888. Vol. 103. P. 204–229.
11. *Volterra V.* Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti // Ann. Mat. Pura Appl. 1897. Vol. 25. P. 139–178.
12. *Volterra V.* Sulla inversione degli integrali definiti // R.C. Accad. Lincei. 1896. Vol. 5. P. 177–185.
13. *Volterra V.* Sopra un problema di elettrostatica // Nuovo Cimento. 1884. Vol. XVI. P. 49–57.
14. *Volterra V.* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris, 1913.

15. *Fredholm E.I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta Math. 1903. Vol. 27. P. 365–390.
16. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig: Verlag und Druck von B.G. Teubner, 1912.
17. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener // Math. Ann. 1907. Vol. 63. P. 433–476.
18. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 161–174.
19. *Schmidt E.* Über die Auflösung linearer Gleichungen mitunendlich vielen Unbekannten // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 1. 1908. Vol. 25. P. 53–77.
20. *Dieudonne J.* History of functional analysis. Amsterdam: North-Holland publishing company, 1981.
21. *Monna A.F.* Functional Analysis in Historical Perspective. New York: Halstead Press, Wiley, 1973.
22. *Molodshyi V.N.* O. Cauchy and the revolution in the mathematical analysis of the first quarter of the XIX century // [in Russian] Hist. and mathemat. studies. 1978. Vol. 23. P. 32–55.
23. *Lyusternik L.A.* The early years of the Moscow Mathematics School // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 1(133). P. 137–161.
24. *Mukhin R.R.* Chaos and nonintegrability in Hamiltonian systems // Izv. VUZ Appl. Nonlin. Dynam. 2006. Vol. 14, № 1. P. 3–24.
25. *Lyusternik L.A.* The early years of the Moscow Mathematics School // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 4(136). P. 147–185.
26. *Bernkopf M.* The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory // Arch. Hist. Ex. Sci. 1966. Vol. 3. P. 1–96.
27. *Birkhoff G.& Kreyszig E.* The establishment of functional analysis // Historia Math. 1984. Vol. 11. P. 258–321.
28. *Lindström J.* On the origin and early history of functional analysis. UUDM project Report 2008:1, Uppsala University, 2008.
29. *Bourbaki N.* Elements d'histoire des mathematiques. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2007.
30. *Weyl H.* David Hilbert and his mathematical work // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50, № 9. P. 612–654.
31. *Рид К.* Гильберт. М.: Наука, 1977.
32. *Klein F.* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Arithmetik. Algebra. Analysis. Vierte Auflage. Springer, Berlin, 1913.
33. *Hilbert D.* Basis of general theory of integral equations. Selected sci. works. Vol. II [in Russian]. Moscow: Factorial, 1998. P. 68–366.
34. *Medvedev F.A.* Essays of the theory of a real variable functions history [in Russian]. Moscow: URSS, 2006.
35. *Riesz F.* Über orthogonal Functionensysteme // Ouevres complètes. 1960. Vol. 1.

Budapest. P. 385–395.

36. *Riesz F.* Sur les système orthogonaux de fonctions // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 615–619.
37. *Fisher E.* Sur la convergence en moyenne // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 144. P. 1022–1024.
38. *Riesz F.* Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, Gauthier-Villar, 1913.
39. *Riesz F.* Über lineare Funktionalgleichungen // Acta Math. 1918. Vol. 41. P. 71–98.
40. *Hilbert D.* The essence and purpose of the analysis of infinitely many independent variables. David Hilbert. Selected works, Vol. II. Moscow: Factorial, 1998. P. 35–49.
41. *Weyl H.* Topology and abstract algebra as two manners of understanding in mathematics. Hermann Weyl. Mathematical mindset [in Russian]. Moscow: Nauka, 1989. P. 24–41.
42. *Tikhomirov V.M.* The remarks to the work «The essence and purpose of the analysis of infinitely many independent variables». David Hilbert. Selected works. Vol. II. Moscow: Factorial, 1998. P. 35–49.
43. *Hilbert D.* Über das Unendliche // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 161–190.
44. *Vorontsov-Vel'yaminov B.A.* Laplace [in Russian]. Moscow: Nauka, 1985.
45. *Mukhin R.R.* Essays on the history of dynamic chaos. [in Russian] URSS, Moscow, 2012.
46. *Lyapunov A.M.* About the form of the celestial bodies. A.M. Lyapunov. Selected works. Ed. V.I. Smirnov. [in Russian] USSR Acad. of Sci. Publishing, Moscow-Leningrad, 1948. 303–322.
47. *Lyapunov A.M.* On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of a rotating liquid. [in Russian] Acad. of Sci. Publishing, St.-Psb., 1884.
48. *Yushkevich A.P.* A.M. Lyapunov and Academy of Science of Frace Institute [in Russian] // Hist. and Methodol. of the Nat. Sci. 1965. Vol. XVI. P. 375–388.
49. *Smirnov V.I., Yushkevich A.P.* Correspondence between A.M. Lyapunov, H. Poincare and P. Dyugem [in Russian] // Hist. and Methodol. of the Nat. Sci. 1985. Vol. XXIX. P. 265–284.
50. *Liapounoff A.M.* Sur la stabilité des figures ellipsoпdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation // Ann. Facultë Sci. Univ. Toulouse, 2 ser. 1904. Vol. 6. P. 5–116.
51. *Lyapunov A.M.* About one problem of Tchebyshev [in Russian] // Notes Acad. Sci. Phys. and Math. Dep. 8 ser. 1905. Vol. 17, № 3. P. 1–32.
52. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1906.
53. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Maclaurin. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1909.
54. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une

masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Jacobi. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1912.

55. *Liapunoff A.M.* Sur les figures d' équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre. St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1914.
56. *Liapunoff A.M.* Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. 8-me Serie. 1903. Vol. 14, № 7. P. 1–37.
57. *Poincar'e H.* About the curves defined by the differential equations [In Russian]. Moscow-Leningrad: OGIZ, 1947.
58. *Kovalevskaya S.* Zusaetze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen ueber die Gestalt der Saturnringe // Astronom. Nachr. 1885. Vol. 111. P. 37–48.
59. *Appel P.* Equilibrium figures of rotating homogeneous fluid [In Russian]. Moscow-Leningrad: ONTI, 1936.
60. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // C.R. Acad. Sci. 1885. Vol. 100. P. 346–348.
61. *Poincaré H.* Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne // Bull. astronom. 1885. Vol. 2. P. 507–508.
62. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. Vol. 7, № 1. P. 259–380.
63. *Poincaré H.* Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse // Proc. Roy. Soc. 1901. Vol. 69. P. 148–149; Philos. Trans. A. 1902. Vol. 198. P. 333–373; 1902. Vol. 200. P. 67.
64. *Jeans J.H.* The motion of tidally distorted masses. Memories of the Roy. Astr. Soc., LXII (1917).
65. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Über die Auflösing der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. 1908. Vol. 65. P. 370–399.
66. *Fredholm Hilbert Schmidt.* Three Fundamental Papers on. Integral Equations. Translated with commentary by. G.W. Stewart, 2011. Available at www.umiacs.umd.edu/ stewart/FHS.pdf (accessed 19.10.15).
67. *Khvedelidze B.V.* Lyapunov-Schmidt equation. Math. encyclopedia. Vol. 3 [in Russian]. Soviet. encyclopedia. Moscow, 1982. 473-474.
68. *Picard E.* Sur une équation fonctionnelle // C.R. Acad. Sci. 1904. Vol. 139. P. 245–248.
69. *Picard E.* Sur une équation fonclionnelle se présentant dans la théorie de certaines équation aux dérivées partielles // C.R. Acad. Sci. 1907. Vol. 5. P. 1009–1012.
70. *Picard E.* Traité d'Analyse. T. III. Gauthier-Villars. Paris, 1905.
71. *Davis H.T.* Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, New York, 1962.
72. *Lalescu' T.* Sur l'équation de Volterra // J. de Math., ser. 6. 1908. Vol. 4. P. 125–202.

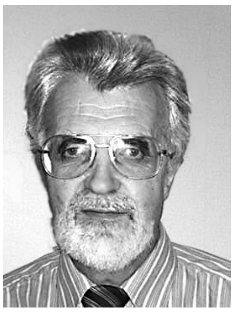
73. *Bratu G.* Sur certaines équations intégrales non linéaires // C.R. Acad. Sci. Paris. 1910. Vol. 150. P. 896–899.
74. *Bratu G.* Sur les équations intégrales non linéaires // Bulletin de la S. M. F. 1914. Vol. 42. P. 113–142.
75. Urysohn P. Sur une classe d'équations intégrales non linéaires // Mat. Sb. 1923. Vol. 31, № 2. P. 236–255.
76. *Aleksandrov P.S.* About my friend. L. Neiman. The joy of discovery [in Russian]. Moscow: Detgiz, 1972. P. 135–149.
77. *Neiman L.* The joy of discovery [in Russian]. Moscow: Detgiz, 1972.
78. Mathematics: The Science of the USSR in fifteen years (1917–1932) [in Russian]. Moscow-Leningrad: GTTI, 1932.
79. *Urysohn P.S.* Works on topology and other areas of mathematics [in Russian]. Moscow-Leningrad: GITTL, 1951.
80. *Arkhangel'skii A.V. and Tikhomirov V.M.* Pavel Samuilovich Urysohn (1898–1924) // Uspekhi Mat. Nauk. 1998. Vol. 53, № 5(323). P. 5–26.
81. *Kolmogorov A.N.* Scientific advisor. L. Neiman. The joy of discovery [in Russian]. Moscow: Detgiz, 1972. P. 160–164.
82. *Nekrasov A.I.* Waves of steady type [in Russian] // Izv. Ivanovo-Vozn. Politechn. Inst. 1921. Vol. 3. P. 52–65.
83. *Nekrasov A.I.* The exact theory of the steady type waves on the heavy liquid surface [in Russian]. Moscow: USSR Acad. of Sci., 1953.
84. *Nekrasov A.I.* Waves of steady type. Chap. 2. About the nonlinear integral equations [in Russian] // Izv. Ivano-Vozn. Politechn. Inst. 1922. Vol. 6. P. 155–171.
85. *Lapko A.F., Lyusternik L.A.* From the history of Soviet mathematics // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 6(138). P. 13–140.
86. *Vainberg M.M., Trenogin V.A.* The methods of Lyapunov and Schmidt in the theory of non-linear equations and their further development // Uspekhi Mat. Nauk. 1962. Vol. 17, № 2(104). P. 13–75.
87. *Sekerzh-Zen'kovich Ya.I.* Aleksandr Ivanovich Nekrasov (on the 75th anniversary of his birth) // Uspekhi Mat. Nauk. 1960. Vol. 15, № 1(91). P. 153–162.
88. *Vainberg M.M., Aizengendler P.G.* Methods of investigation in the theory of branching of solutions // Itogi Nauki. Ser. Matematika. Mat. Anal. 1965. VINITI, Moscow, 1966. P. 7–69.
89. *Lyusternik L.A.* The early years of the Moscow mathematical school // Uspekhi Mat. Nauk. 1967. Vol. 22, № 2(134). P. 199–239.
90. *Liapunoff A.M.* Sur certaines séries de figures d' équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 1-re. Leningrad, 1925.
91. *Liapunoff A.M.* Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Partie 2-me. Leningrad, 1927.
92. *Lichtenstein L.* Vorlesungen Über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin: Julius Springer, 1931.
93. *Smirnov N.S.* Introduction to the theory of nonlinear integral equations [in Russian].

Glav. Red. Obtschet. Lit. Moscow-Leningrad, 1936.

94. *Hammerstein A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta Math. 1930. Vol. 54. P. 117–176.
95. *Golomb M.* Review of the article «Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen». Jahrbuch Database. URL: http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165&type=pdf (accessed: 19.10.15)
96. *Krasnov M.L.* Integral equations. Introduction to the theory [in Russian]. Moscow: Nauka, 1975.
97. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. Vol. 3. P. 133–181.
98. *Hahn H.* Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen // J. Reine Angew. Math. 1927. Vol. 157. P. 214–229.

Богатов Егор Михайлович – родился в Волгограде (1974). Окончил Воронежский государственный университет (1997). После окончания ВГУ работал преподавателем в Воронежской государственной архитектурно-строительной академии и в ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ВГУ, 2000) по специальности «Дифференциальные уравнения». После защиты диссертации работает на кафедре высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в должности доцента. Автор учебника «Организация эксперимента» (в соавторстве с В.П. Соловьёвым). Руководитель научного проекта РФФИ по теме «Математическое моделирование процессов теплопереноса в нелинейных периодических двухфазных средах вида газ–металл» (2006–2008). Опубликовал более 30 научных статей по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Имеет сертификат инструктора Wolfram Research Mathematica по обучению пакетам компьютерной математики в странах Восточной Европы. Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов в неоднородных средах, история функционального анализа.

309516 Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)
Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
E-mail: embogatov@inbox.ru



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСиС).

309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
Национального исследовательского технологического университета
«Московский институт стали и сплавов»
E-mail:mukhiny@mail.ru