

Лекция 5

Условия сходимости по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями

Применим изложенную *теорию сходимости по распределению* к случайным процессам. Как известно, случайный процесс – это случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в измеримое пространство $(R[0, +\infty), \mathcal{G})$. Вместо временной полуоси $[0, +\infty)$ будем для простоты изложения рассматривать отрезок $[0, 1]$. Предположим, что траектории случайного процесса X непрерывны на $[0, 1]$, тогда X является случайным элементом со значениями в измеримом пространстве $C[0, 1]$ с заданной на нем цилиндрической σ -алгеброй. В пространстве $C[0, 1]$ можно задать *метрику равномерной сходимости*: для $x, y \in C[0, 1]$

$$\rho_{\text{равн}}(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|,$$

причем с этой метрикой пространство $C[0, 1]$ является сепарабельным метрическим пространством. Обозначим $\mathcal{B}(C[0, 1])$ борелевскую σ -алгебру относительно введенной метрики. Нетрудно доказать, что $\mathcal{B}(C[0, 1])$ совпадает с цилиндрической σ -алгеброй пространства $C[0, 1]$. Таким образом, случайный процесс с непрерывными траекториями является случайным элементом со значениями в пространстве $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ и, значит, мы имеем право использовать теорию сходимости по распределению.

Введем *модуль непрерывности* для $x \in C[0, 1]$:

$$w_x(\delta) = \sup_{t, s: |t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)|,$$

где δ – положительное число ($t, s \in [0, 1]$).

Лемма 1. *Если $x \in C[0, 1]$, то $\lim_{\delta \rightarrow 0} w_x(\delta) = 0$.*

Доказательство следует из того, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\delta = 1/m$ и $x \in C[0, 1]$. Положим $s_k = k\delta$, $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Введем *кусочно-линейное приближение* $x^{(\delta)}$ для x :

$$x^{(\delta)}(t) = x(s_k) + \frac{t - s_k}{\delta} [x(s_{k+1}) - x(s_k)],$$

если $t \in [s_k, s_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Лемма 2. *Если $x \in C[0, 1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho_{\text{равн}}(x, x^{(\delta)}) \leq 2w_x(\delta),$$

поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_{\text{равн}}(x, x^{(\delta)}) = 0.$$

Доказательство. Пусть $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Заметим, что $x(s_k) = x^{(\delta)}(s_k)$, поэтому при $t \in [s_k, s_{k+1}]$

$$\begin{aligned} |x(t) - x^{(\delta)}(t)| &\leq |x(t) - x(s_k)| + |x^{(\delta)}(s_k) - x^{(\delta)}(t)| \leq \\ &\leq |x(t) - x(s_k)| + |x^{(\delta)}(s_k) - x^{(\delta)}(s_{k+1})| = \\ &= |x(t) - x(s_k)| + |x(s_k) - x(s_{k+1})| \leq 2w_x(\delta). \end{aligned}$$

Следовательно, при всех $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$\sup_{t \in [s_k, s_{k+1}]} |x(t) - x^{(\delta)}(t)| \leq 2w_x(\delta)$$

и, значит,

$$\sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - x^{(\delta)}(t)| \leq 2w_x(\delta).$$

Лемма доказана.

Зададим отображение $g^{(m)} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow C[0, 1]$. Произвольному вектору $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ сопоставим функцию $g^{(m)}(\bar{x}) \in C[0, 1]$:

$$(g^{(m)}(\bar{x}))(t) = x_k + \frac{t - s_k}{\delta} (x_{k+1} - x_k),$$

если $t \in [s_k, s_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Очевидно, что отображение $g^{(m)}$ является непрерывным и

$$x^{(\delta)} = g^{(m)}(x(s_0), x(s_1), \dots, x(s_m)). \quad (1)$$

Определение 1. Пусть X, X_1, X_2, \dots – произвольные случайные процессы. Говорят, что последовательность процессов $\{X_n\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ в смысле конечномерных распределений к процессу X , если для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных моментов времени t_1, t_2, \dots, t_m ($0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$) при $n \rightarrow \infty$

$$(X_n(t_1), X_n(t_2), \dots, X_n(t_m)) \xrightarrow{D} (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)).$$

Теорема 1 (Прохоров). *Пусть X, X_1, X_2, \dots – случайные процессы с непрерывными на отрезке $[0, 1]$ траекториями. Если последовательность процессов $\{X_n\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ в смысле конечномерных распределений к процессу X и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$ (по распределению в пространстве $C[0, 1]$). Наоборот, из сходимости по распределению в $C[0, 1]$ последовательности процессов с непрерывными траекториями следуют сходимость в смысле конечномерных распределений и условие (2).

Доказательство. Начнем с первого утверждения. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$Y_{m,n} = X_n^{(\delta)}, \quad Y_m = X^{(\delta)}.$$

По лемме 2

$$\rho_{\text{равн}}(Y_{m,n}; X_n) \leq 2w_{X_n}(\delta).$$

Поэтому ввиду (2)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\rho_{\text{равн}}(Y_{m,n}; X_n) \geq \varepsilon) = 0. \quad (3)$$

В силу соотношения (1)

$$\begin{aligned} X_n^{(\delta)} &= g^{(m)}(X_n(s_0), X_n(s_1), \dots, X_n(s_m)), \\ X^{(\delta)} &= g^{(m)}(X(s_0), X(s_1), \dots, X(s_m)), \end{aligned}$$

где $g^{(m)}$ является непрерывным отображением \mathbb{R}^{m+1} в $C[0, 1]$, а $s_k = k\delta$, $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. По условию теоремы при $n \rightarrow \infty$

$$(X_n(s_0), X_n(s_1), \dots, X_n(s_m)) \xrightarrow{D} (X(s_0), X(s_1), \dots, X(s_m)).$$

Поэтому на основании теоремы 1 лекции 4 при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} X_n^{(\delta)} &= g^{(m)}(X_n(s_0), X_n(s_1), \dots, X_n(s_m)) \xrightarrow{D} \\ g^{(m)}(X(s_0), X(s_1), \dots, X(s_m)) &= X^{(\delta)}. \end{aligned}$$

Итак, при $n \rightarrow \infty$

$$Y_{m,n} \xrightarrow{D} Y_m. \quad (4)$$

По лемме 2

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{\text{равн}}(Y_m, X) = 0,$$

но из сходимости случайных элементов п.н. следует их сходимость по распределению (докажите), поэтому при $m \rightarrow \infty$

$$Y_m \xrightarrow{D} X. \quad (5)$$

Из соотношений (3)-(5) по теореме 2 лекции 4 получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Докажем обратное утверждение. Отображения

$$x \rightarrow w_x(\delta), \quad (6)$$

$$x \rightarrow (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)) \quad (7)$$

являются непрерывными на $C[0, 1]$ (здесь m – произвольное натуральное число, а t_1, t_2, \dots, t_m – произвольные числа из отрезка $[0, 1]$).

Из непрерывности отображения (6) по теореме 1 лекции 4 получаем сходимость по распределению случайных величин: при $n \rightarrow \infty$

$$w_{X_n}(\delta) \xrightarrow{D} w_X(\delta).$$

Учитывая критерий сходимости по распределению случайных величин в терминах функций распределения, находим что для всех $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n (w_{X_n} (\delta) \geq \varepsilon) = \mathbf{P} (w_X (\delta) \geq \varepsilon).$$

Траектории процесса X непрерывны и, значит, по лемме 1

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P} (w_X (\delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n (w_{X_n} (\delta) \geq \varepsilon) = 0,$$

т.е. условие (2) выполнено.

Из непрерывности отображения (7) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$(X_n (t_1), \dots, X_n (t_m)) \xrightarrow{D} (X (t_1), \dots, X (t_m)), \quad (8)$$

т.е. имеет место сходимость конечномерных распределений. Теорема доказана.

Задача 1. Показать, что соотношение (8) равносильно тому, что для произвольных постоянных C_1, \dots, C_m при $n \rightarrow \infty$

$$C_1 X_n (t_1) + \dots + C_m X_n (t_m) \xrightarrow{D} C_1 X (t_1) + \dots + C_m X (t_m).$$

Если случайные процессы с непрерывными траекториями X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ по распределению в пространстве $C [0, 1]$ к процессу с непрерывными траекториями X , то по теореме 1 лекции 4 выполняется сходимость по распределению

$$f (X_n) \xrightarrow{D} f (X) \quad (9)$$

для произвольного непрерывного функционала (т.е. числовой функции) f , заданного на $C [0, 1]$.

Утверждение 1. Пусть процессы с непрерывными траекториями X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ по распределению в пространстве $C [0, 1]$ к процессу с непрерывными траекториями X , тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \in [0, 1]} X_n (t) \xrightarrow{D} \sup_{t \in [0, 1]} X (t).$$

Доказательство. Рассмотрим следующее отображение f пространства $C [0, 1]$ в \mathbb{R} : $f(x) = \sup_{t \in [0, 1]} x (t)$, $x \in C [0, 1]$. Оно является непрерывным при всех $x \in C [0, 1]$, поскольку

$$\left| \sup_{t \in [0, 1]} x (t) - \sup_{t \in [0, 1]} y (t) \right| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |x (t) - y (t)|, \quad x, y \in C [0, 1].$$

По теореме 1 лекции 4, учитывая непрерывность отображения f , получаем требуемое утверждение.

Во многом вся ценность теоремы Прохорова объясняется тем, что она дает достаточные условия для сходимости (9). Переформулируем теорему Прохорова в терминах сходимости по распределению непрерывных функционалов от процессов с непрерывными траекториями.

Теорема 2. *Пусть X, X_1, X_2, \dots – случайные процессы с непрерывными на отрезке $[0, 1]$ траекториями. Сходимость $f(X_n) \xrightarrow{D} f(X)$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место для произвольных непрерывных функционалов f , заданных на $C[0, 1]$, если эта сходимость имеет место для функционалов вида $f(x) = w_x(\delta)$ и $f(x) = C_1x(t_1) + \dots + C_mx(t_m)$, где $x \in C[0, 1]$.*

Доказательство. Если сходимость (9) имеет место для произвольных функционалов вида $f(x) = C_1x(t_1) + \dots + C_mx(t_m)$, где $x \in C[0, 1]$, то в силу утверждения, сформулированного в задаче 1, справедлива сходимость при $n \rightarrow \infty$ последовательности случайных процессов X_n к процессу X в смысле сходимости конечномерных распределений. Если сходимость (9) имеет место для произвольных функционалов вида $f(x) = w_x(\delta)$, то, как показано во второй части доказательства теоремы 1, выполнено условие (2). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно (см. теорему 1 лекции 4), имеет место сходимость (9) для произвольных непрерывных функционалов f , заданных на $C[0, 1]$. Теорема доказана.

Интересно понять, как соотносятся между собой условия теоремы 1. В частности, не вытекает ли условие (2) из сходимости конечномерных распределений? Следующий пример показывает, что это не так.

Пример 1. Рассмотрим случайные процессы (не зависящие от ω) с непрерывными траекториями: $X(t) \equiv 0$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$X_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq 1/n; \\ 2 - nt, & 1/n \leq t \leq 2/n; \\ 0, & 2/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, что конечномерные распределения процесса X_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X , но условие (2) не выполняется. Таким образом, из сходимости в смысле конечномерных распределений не следует сходимость по распределению в пространстве $C[0, 1]$.

Теорема 3. *Пусть X, X_1, X_2, \dots – случайные процессы с непрерывными на отрезке $[0, 1]$ траекториями. Предположим, что последовательность процессов $\{X_n\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ в смысле конечномерных распределений к процессу X и при всех $n \in \mathbb{N}$ и $t, s \in [0, 1]$*

$$\mathbf{E}_n |X_n(t) - X_n(s)|^a \leq C |t - s|^{1+b}, \quad (10)$$

где a, b, C – положительные постоянные. Тогда $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \rightarrow \infty$ (по распределению в пространстве $C[0, 1]$).

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно установить, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n (w_{X_n} (2^{-l}) \geq \varepsilon) = 0. \quad (11)$$

Обозначим \mathbb{Q}_2 множество точек вида $k/2^m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, 1, \dots, 2^m\}$. Если $x \in C[0, 1]$, то, очевидно,

$$w_x (2^{-l}) = \sup_{t, s \in \mathbb{Q}_2: |t-s| \leq 2^{-l}} |x(t) - x(s)|. \quad (12)$$

Покажем, что

$$\sup_{t, s \in \mathbb{Q}_2: |t-s| \leq 2^{-l}} |x(t) - x(s)| \leq 3 \sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k \in \{1, \dots, 2^m\}} \left| x\left(\frac{k}{2^m}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right|. \quad (13)$$

Сначала установим, что если $t, s \in \mathbb{Q}_2$ и $|t-s| \leq 2^{-l}$, то

$$|x(t) - x(s)| \leq 3 \sup_{j \in \{1, \dots, 2^l\}} \sup_{u \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right|. \quad (14)$$

Действительно, поскольку $|t-s| \leq 2^{-l}$, то 1) либо $t, s \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}]$ при некотором $j \in \{1, \dots, 2^l\}$ и тогда

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &\leq \left| x(t) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| + \left| x(s) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| \leq \\ &\leq 2 \sup_{u \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| \leq \\ &\leq 2 \sup_{j \in \{1, \dots, 2^l\}} \sup_{u \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right|, \end{aligned}$$

2) либо (при $t > s$) $t \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}]$, а $s \in [\frac{j-2}{2^l}, \frac{j-1}{2^l}]$ при некотором $j \in \{2, \dots, 2^l\}$ и тогда

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &\leq \left| x(t) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| + \left| x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) - x\left(\frac{j-2}{2^l}\right) \right| + \\ &\quad + \left| x(s) - x\left(\frac{j-2}{2^l}\right) \right| \leq \\ &\leq 2 \sup_{u \in [\frac{j-2}{2^l}, \frac{j-1}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| + \sup_{u \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| \leq \\ &\leq 3 \sup_{j \in \{1, \dots, 2^l\}} \sup_{u \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right|. \end{aligned}$$

Тем самым, соотношение (14) установлено.

Пусть $u \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2$ для некоторого $j \in \{1, \dots, 2^l\}$, тогда существуют такие натуральные числа r_1, r_2, \dots, r_q , что $l < r_1 < r_2 < \dots < r_q$ и

$$u = \frac{j-1}{2^l} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{2^{r_i}},$$

где $l < r_1 < r_2 < \dots < r_q$; значит,

$$\begin{aligned}
\left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| &\leq \left| x\left(\frac{j-1}{2^l} + \frac{1}{2^{r_1}}\right) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| + \\
&+ \left| x\left(\frac{j-1}{2^l} + \frac{1}{2^{r_1}} + \frac{1}{2^{r_2}}\right) - x\left(\frac{j-1}{2^l} + \frac{1}{2^{r_1}}\right) \right| + \dots \leq \\
&\leq \sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k \in \{1, \dots, 2^m\}} \left| x\left(\frac{k}{2^m}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right|. \tag{15}
\end{aligned}$$

Правая часть (15) не зависит ни от u , ни от j ; следовательно, ввиду (14)

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(s)| &\leq 3 \sup_{j \in \{1, \dots, 2^l\}} \sup_{u \in [\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}] \cap \mathbb{Q}_2} \left| x(u) - x\left(\frac{j-1}{2^l}\right) \right| \leq \\
&\leq 3 \sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k \in \{1, \dots, 2^m\}} \left| x\left(\frac{k}{2^m}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right|,
\end{aligned}$$

если $t, s \in \mathbb{Q}_2$ и $|t - s| \leq 2^{-l}$, т.е. соотношение (13) доказано.

Известно, что $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} = \pi^2/6$, поэтому из соотношений (12) и (13) находим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_n\left(w_{X_n}(2^{-l}) \geq \varepsilon\right) &= \mathbf{P}_n\left(\sup_{t, s \in \mathbb{Q}_2: |t-s| \leq 2^{-l}} |X_n(t) - X_n(s)| \geq \varepsilon\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}_n\left(\sum_{m=l}^{\infty} \sup_{k \in \{1, \dots, 2^m\}} \left| X_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right) \leq \\
&\leq \sum_{m=l}^{\infty} \mathbf{P}_n\left(\sup_{k \in \{1, \dots, 2^m\}} \left| X_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon_1}{m^2}\right) \leq \\
&\leq \sum_{m=l}^{\infty} \sum_{k \in \{1, \dots, 2^m\}} \mathbf{P}\left(\left| X_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon_1}{m^2}\right), \tag{16}
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 = 2\varepsilon/\pi^2$. Ввиду (10) при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}_n\left(\left| X_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - X_n\left(\frac{k-1}{2^m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon_1}{m^2}\right) \leq \frac{C}{\varepsilon_1^a} \frac{m^{2a}}{2^{m(1+b)}}. \tag{17}$$

Из соотношений (16), (17) получаем, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}_n\left(w_{X_n}(2^{-l}) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon_1^a} \sum_{m=l}^{\infty} 2^m \frac{m^{2a}}{2^{m(1+b)}} = \frac{C}{\varepsilon_1^a} \sum_{m=l}^{\infty} \frac{m^{2a}}{2^{mb}}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n\left(w_{X_n}(2^{-l}) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon_1^a} \sum_{m=l}^{\infty} \frac{m^{2a}}{2^{mb}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0,$$

откуда вытекает требуемое соотношение (11). Теорема доказана.