Лекции 7-8

Принцип инвариантности Донскера-Прохорова

Развитая в предыдущих лекциях теория может быть применена к различным вероятностным моделям. В качестве первой такой модели рассмотрим случайное блуждание.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины. *Случайным блужданием* называется последовательность последовательных сумм

$$S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Случайная величина X_n называется n-м *шагом* случайного блуждания. Числовые характеристики $\mathbf{E}X_1$, $\mathbf{D}X_1$ называются соответственно *сносом* и *шаговой дисперсией* случайного блуждания.

Отметим, что случайное блуждание обладает *марковским свойством*: для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ случайная последовательность $\{S_{n_0+n} - S_{n_0},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ имеет такое же распределение, как $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, и не зависит от случайного вектора $\{S_0, S_1, \ldots, S_{n_0}\}$. Этим же свойством обладает броуновское движение W: для каждого $t_0 \in (0, +\infty)$ процесс $\{W(t_0 + t) - W(t_0),\ t \geq 0\}$ является броуновским движением, причем не зависящим от прошлого, т.е. процесса $\{W(t),\ t \in [0, t_0]\}$).

Многие результаты классической теории вероятностей посвящены случайному блужданию с нулевым сносом и конечной положительной шаговой дисперсией σ^2. Примером является центральная предельная теорема:

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N,$$

где $N \sim N(0,1)$, т.е. N является случайной величиной со стандартным нормальным распределением.

Положим

$$Y_n(t) := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0,1].$$

Заметим, что Y_n является случайным процессом с траекториями из $D[0,1]$, сохраняющим всю информацию об отрезке блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$. При $t \in (0,1]$ получаем, что

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \frac{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t}N.$$

Далее (символ $\stackrel{d}{=}$ означает совпадение распределений),

$$\sqrt{t}N \sim N(0,t) \Longrightarrow \sqrt{t}N \stackrel{d}{=} W(t).$$

Это наводит на мысль, что $Y_n \xrightarrow{D} W$ при $n \to \infty$. Следующий результат получил название *принципа инвариантности Донскера-Прохорова*.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *то при* $n \to \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} W,$$

где $W = \{W(t),\ t \in [0,1]\}$ *– стандартное броуновское движение, знак* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0,1]$ *с топологией Скорохода.*

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *и* $\{\eta_n\}$ *– последовательности случайных величин, причем* ξ_n, η_n *– независимые случайные величины при каждом* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\{\xi_n, \eta_n\} \xrightarrow{D} \left\{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}\right\},$$

где $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}$ *– независимые случайные величины, причем* $\widetilde{\xi} \stackrel{d}{=} \xi$, $\widetilde{\eta} \stackrel{d}{=} \eta$.

Доказательство. При $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (за исключением не более чем счетного множества)

$$\mathbf{P}(\xi_n \le x, \eta_n \le y) = \mathbf{P}(\xi_n \le x)\,\mathbf{P}(\eta_n \le y) \to \mathbf{P}(\xi \le x)\,\mathbf{P}(\eta \le y) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\widetilde{\xi} \le x\right)\mathbf{P}(\widetilde{\eta} \le y) = \mathbf{P}\left(\widetilde{\xi} \le x, \widetilde{\eta} \le y\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Последовательность случайных процессов* Y_n *сходится при* $n \to \infty$ *в смысле конечномерных распределений к процессу* W.

Доказательство. Сходимость одномерных распределений уже установлена. Пусть $0 < t_1 < t_2 \le 1$. Поскольку

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},$$

то случайная величина $Y_n(t_2) - Y_n(t_1)$ не зависит от $Y_n(t_1)$. Далее, при $n \to \infty$

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}} \frac{\sqrt{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t_2 - t_1}N$$

Но
$$\sqrt{t_2 - t_1}N \sim N(0, t_2 - t_1) \Longrightarrow \sqrt{t_2 - t_1}N \stackrel{d}{=} W(t_2) - W(t_1).$$

В силу леммы 1 при $n \to \infty$

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2) - Y_n(t_1)\} \xrightarrow{D} \{W(t_1), W(t_2) - W(t_1)\}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2)\} \xrightarrow{D} \{W(t_1), W(t_2)\}.$$

Аналогично рассматривается случай распределений размерности 3 и больше. Лемма доказана.

Напомним, что $w_x(\delta)$ – модуль непрерывности функции $x \in D[0,1]$.

Лемма 3. *Пусть* $\delta = 1/m$, *где* m *- натуральное число, и* $t_k = \delta k$, $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, *тогда для любого* $x \in D[0,1]$ *справедливо неравенство*

$$w_x(\delta) \leq 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|.$$

Доказательство. Пусть s, t таковы, что $0 \leq s \leq t \leq 1$ и $|s - t| \leq \delta$. Тогда либо $s, t \in [t_k, t_{k+1}]$ для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и, следовательно,

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(t_k)| + |x(t) - x(t_k)| \leq$$

$$\leq 2 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|;$$

либо $s \in [t_k, t_{k+1}]$, $t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$ для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, m-2\}$ и, следовательно,

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(t_k)| + |x(t_k) - x(t_{k+1})| + |x(t_{k+1}) - x(t)| \leq$$

$$\leq 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|.$$

Поэтому если $|s - t| \leq \delta$, то

$$|x(s) - x(t)| \leq 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_i)|.$$

Следовательно,

$$w_x(\delta) \leq 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(s) - x(t_k)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *тогда справедливо неравенство Колмогорова*: *при любом* $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right) \leq 2\mathbf{P}\left(|S_n| \geq \left(\lambda - \sqrt{2}\right) \sigma \sqrt{n}\right).$$

Доказательство. Пусть τ – момент первого достижения случайной последовательностью $\{|S_i|,\ i \in \mathbb{N}_0\}$ полуоси $[\lambda \sigma \sqrt{n}, +\infty)$. Тогда

$$\left\{\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{\tau = m\},$$

причем события справа являются попарно несовместными. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\right) = \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n},\ |S_n| \geq \left(\lambda - \sqrt{2}\right) \sigma \sqrt{n}\right) +$$

$$+\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n},\ |S_n| < \left(\lambda - \sqrt{2}\right) \sigma \sqrt{n}\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(|S_n| \geq \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n}\right) + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(|S_n| < \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n},\ \tau = m\right).$$

Теперь заметим, что

$$\mathbf{P}\left(|S_n| < \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n},\ \tau = m\right) \leq \mathbf{P}\left(\tau = m,\ \ |S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\tau = m\right)\mathbf{P}\left(|S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right)$$

(здесь учтено, что случайные события $\{\tau = m\}$ и $\left\{|S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right\}$ являются независимыми). По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\left(|S_n - S_m| > \sqrt{2}\sigma\sqrt{n}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(S_n - S_m\right)^2}{2\sigma^2 n} = \frac{(n-m)\,\sigma^2}{2\sigma^2 n} = \frac{n-m}{2n} \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(|S_n| < \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n},\ \tau = m\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(\tau = m\right) \leq \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\right).$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(|S_n| \geq \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{n}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\right),$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 5. *В условиях теоремы* 1 *при любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta\right) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta\right) \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}\left(\sup_{s\in[t_k,t_{k+1}]} |Y_n\left(s\right) - Y_n\left(t_k\right)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

В силу неравенства Колмогорова

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\in[t_k,t_{k+1}]} |Y_n\left(s\right) - Y_n\left(t_k\right)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\sup_{s\in[t_k,t_{k+1}]} \left|S_{\lfloor ns\rfloor} - S_{\lfloor nt_k\rfloor}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\sigma\sqrt{n}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\max_{\lfloor nt_k\rfloor \leq i \leq \lfloor nt_{k+1}\rfloor} \left|S_i - S_{\lfloor nt_k\rfloor}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\sigma\sqrt{n}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\max_{0\le i\le \lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor} |S_i| \ge \frac{\varepsilon}{3}\sigma\sqrt{n}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\max_{0\le i\le \lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor} |S_i| \ge \lambda_n\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right) \le$$

$$\le 2\mathbf{P}\left(\left|S_{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right| \ge \left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right),$$

где

$$\lambda_n = \frac{\varepsilon}{3}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \ge \varepsilon\right) \le 2\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}\left(\left|S_{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right| \ge \left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \varepsilon/\left(3\sqrt{\delta}\right)$, то по центральной предельной теореме при $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|S_{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right| \ge \left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)\sigma\sqrt{\lfloor nt_{k+1}\rfloor - \lfloor nt_k\rfloor}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(x_\delta\right)\right),$$

где $x_\delta = \varepsilon/\left(3\sqrt{\delta}\right) - \sqrt{2}$. Таким образом,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \ge \varepsilon\right) \le 4\sum_{k=0}^{m-1}\left(1 - \Phi\left(x_\delta\right)\right) = \frac{4}{\delta}\left(1 - \Phi\left(x_\delta\right)\right). \qquad (1)$$

Заметим, что при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}.$$

В самом деле,

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{+\infty} e^{-u^2/2}du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{u}de^{-u^2/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}du \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}.$$

Таким образом, при достаточно малом δ

$$1 - \Phi\left(x_\delta\right) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_\delta}e^{-x_\delta^2/2}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1), (2) находим, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \ge \varepsilon\right) \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}\delta x_\delta}e^{-x_\delta^2/2}.$$

Очевидно, предел правой части равен 0 при $\delta \to 0$, что доказывает лемму.

Из установленных лемм 2 и 5 по теореме о C-сходимости получаем утверждение теоремы 1.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 1. Положим

$$M_n = \max_{0 \le i \le n} S_i.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда при всех* $x \ge 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sup_{t\in[0,1]} S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} = \sup_{t\in[0,1]} Y_n(t). \tag{4}$$

Рассмотрим следующее отображение f пространства $D[0,1]$ в $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sup_{t\in[0,1]} x(t), \quad x \in D[0,1].$$

Оно является непрерывным при всех $x \in D[0,1]$. Действительно, если $\rho_{\text{ск}}(x,y) < \delta$, где $\delta > 0$, то существует такое непрерывное строго возрастающее отображение λ отрезка $[0,1]$ на $[0,1]$, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |y(t) - x(\lambda(t))| < \delta, \quad \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| < \delta.$$

Откуда, учитывая равенство $\sup\limits_{t\in[0,1]} x(t) = \sup\limits_{t\in[0,1]} x(\lambda(t))$, находим, что

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sup_{t\in[0,1]} y(t) - \sup_{t\in[0,1]} x(t)\right| = \left|\sup_{t\in[0,1]} y(t) - \sup_{t\in[0,1]} x(\lambda(t))\right| \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,1]} |y(t) - x(\lambda(t))| < \delta,$$

т.е. отображение f непрерывно в точке x.

По принципу инвариантности Донскера-Прохорова, учитывая непрерывность отображения f, получаем, что при $n \to \infty$

$$\sup_{t\in[0,1]} Y_n(t) \xrightarrow{D} M(1),$$

где $M(t) = \sup_{s\in[0,t]} W(s)$ при $t \ge 0$. Это, ввиду соотношения (4), означает, что при $n \to \infty$

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} M(1).$$

В терминах функций распределения получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \mathbf{P}(M(1) \le x) \tag{5}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, которые являются точками непрерывности правой части.

Заметим, что правая часть соотношения (5) выражается через броуновское движение, поэтому ее можно найти, используя свойства броуновского движения. Но есть и другой способ, основанный на следующем соображении. Соотношение (5) справедливо для произвольного случайного блуждания, удовлетворяющего условиям доказываемой теоремы, причем правая часть этого соотношения будет одна и та же для различных случайных блужданий. Выберем *простое* случайное блуждание, шаг которого принимает всего два значения 1 и -1 с одной и той же вероятностью $1/2$ (в этом случае $\sigma^2 = 1$). Для простого случайного блуждания найдем предел, стоящий в левой части соотношения (5). Тем самым, мы найдем и правую часть соотношения (5).

Лемма 6. *Пусть случайная величина* X_1 *принимает значение* 1 *с вероятностью* $1/2$ *и значение* -1 *с той же вероятностью. Тогда при* $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{6}$$

Доказательство. Очевидно, что при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(M_n \geq x\right) = \mathbf{P}\left(S_n = x\right) + \mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \geq x\right) + \mathbf{P}\left(S_n < x,\ M_n \geq x\right). \tag{7}$$

Заметим, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \geq x\right) = \mathbf{P}\left(S_n < x,\ M_n \geq x\right). \tag{8}$$

Действительно, чтобы найти вероятность, например, первого из этих событий, требуется найти число траекторий случайного блуждания в интервале времени от 0 до n, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \geq x$, и затем умножить это число на вероятность одной траектории, т.е. 2^{-n}. Но число траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \geq x$, совпадает с числом траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n < x$ и $M_n \geq x$. В самом деле, если $M_n \geq x$, то момент τ_x первого достижения траекторией уровня x не превосходит n; число траекторий, ведущих за время $n - \tau_x$ из точки x в точки, лежащие не ниже x, совпадает с числом траекторий, ведущих в точки, лежащие не выше x. Далее, при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \geq x\right) = \mathbf{P}\left(S_n > x\right). \tag{9}$$

Из соотношений (7)-(9) получаем, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(M_n \geq x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n > x\right) + \mathbf{P}\left(S_n = x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n \geq x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = x\right). \tag{10}$$

Поскольку случайные величины M_n и S_n целочисленны, то учитывая (10), находим, что при $x \geq 0$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\left(M_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = \mathbf{P}\left(M_n \geq \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) = \\ = 2\mathbf{P}\left(S_n \geq \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) = \\ = 2\mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right). \end{gathered} \tag{11}$$

По центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = 1-\Phi(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n = \lfloor\sigma\sqrt{n}x\rfloor + 1\right) = 0 \qquad (12)$$

(второе равенство докажите сами). Из (11) и (12) следует, что при $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = 2\left(1-\Phi(x)\right)$$

или, что равносильно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = 2\Phi(x) - 1.$$

Осталось заметить, что

$$2\Phi(x) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Лемма доказана.

В силу соотношения (5) предел в левой части этого соотношения не зависит от конкретного случайного блуждания, удовлетворяющего условиям теоремы 2, поэтому в силу соотношения (6) он равен правой части соотношения (6). Таким образом, справедливо соотношение (3), причем при всех $x \geq 0$, поскольку правая часть соотношения (3) непрерывна при $x \geq 0$. Теорема доказана.

Отметим, что из доказательства теоремы 2 следует, что при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(M(1) \leq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Рассмотрим следующий пример применения теоремы 1. Положим

$$L_n = \min_{0\leq i\leq n} S_i$$

и введем для положительных t и произвольных действительных x, y функцию

$$g(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда для каждого* $t \in (0,1]$ *при всех* $x, y > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{L_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} > -x,\ \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \leq y - x\right) = \int\limits_{0}^{y} g(t,x,u)\,du. \qquad (13)$$

Доказательство. При фиксированном $t \in (0,1]$ рассмотрим следующее отображение h пространства $D[0,1]$ в $\mathbb{R}^2$:

$$h(x) = \left\{ \inf_{s\in[0,t]} x(s)\,,\ x(t) \right\}, \quad x \in D[0,1]\,.$$

Заметим, что здесь t выступает в роли параметра.

И первая, и вторая компоненты при $t = 1$ являются непрерывными функциями на $D[0,1]$, а при $t \in (0,1)$ они являются измеримыми функциями на $D[0,1]$. Каждая из этих функций является непрерывной в точке x, если x (как функция) непрерывна в точке t. Следовательно, отображение $h(x)$ непрерывно при $x \in C[0,1]$.

Установим, например, справедливость сказанного для второй компоненты отображения h. Положим $h_2(x) = x(t)$ при $x \in D[0,1]$. Если $\rho_{\text{ск}}(x,y) < \delta$, где $\delta > 0$, то существует такое непрерывное строго возрастающее отображение λ отрезка $[0,1]$ на $[0,1]$, что

$$\sup_{s\in[0,1]} |y(s) - x(\lambda(s))| < \delta, \quad \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(s) - s| < \delta.$$

Следовательно, при $t = 1$

$$|h_2(x) - h_2(y)| = |x(1) - y(1)| = |x(\lambda(1)) - y(1)| < \delta,$$

т.е. отображение $h_2(\cdot)$ при $t = 1$ непрерывно при всех $x \in D[0,1]$. Пусть теперь $t \in (0,1)$ и функция $x(s)$, $s \in [0,1]$, непрерывна в точке t. Тогда

$$|h_2(x) - h_2(y)| = |x(t) - y(t)| \le$$

$$\le |x(t) - x(\lambda(t))| + |x(\lambda(t)) - y(t)|\,,$$

причем

$$|x(\lambda(t)) - y(t)| < \delta$$

и

$$|x(t) - x(\lambda(t))| \le \sup_{s:|t-s|\le\delta} |x(t) - x(s)| := z(\delta)\,.$$

Заметим, что $\lim_{\delta\to 0} z(\delta) = 0$ в силу непрерывности функции $x(s)$, $s \in [0,1]$, в точке t. Таким образом,

$$|h_2(x) - h_2(y)| \le z(\delta) + \delta,$$

т.е. отображение $h_2(\cdot)$ непрерывно в рассматриваемой точке x.

Применим теорему $1'$ лекции 4. Напомним, что C_h – множество тех элементов $D[0,1]$, в которых отображение h непрерывно. В силу сказанного $C_h \supset C[0,1]$ и, поскольку траектории броуновского движения непрерывны, то $\mathbf{P}(W \in C_h) \ge \mathbf{P}(W \in C[0,1]) = 1$ и, значит, $\mathbf{P}(W \in C_h) = 1$. Следовательно, из принципа инвариантности Донскера-Прохорова по теореме $1'$ лекции 4 находим, что при $n \to \infty$

$$h(Y_n) \xrightarrow{D} h(W)\,.$$

Откуда, учитывая, что $L_{\lfloor nt\rfloor} = \inf_{s\in[0,t]} S_{\lfloor ns\rfloor}$, получаем, что

$$\left\{ \frac{L_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \right\} \xrightarrow{D} \{L(t)\,,\ W(t)\}\,,$$

где $L(t) = \inf_{s\in[0,t]} W(s)$. В терминах функций распределения получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{L_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} > -x,\ \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \le y - x\right) = \mathbf{P}\left(L(t) > -x,\ W(t) \le y - x\right) \tag{14}$$

при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, которые являются точками непрерывности правой части. Таким образом, существование предела в левой части соотношения (13) установлено.

Чтобы найти этот предел, рассмотрим *простое* случайное блуждание, для которого справедлив следующий принцип отражения (докажите сами): при $x \in \mathbb{N}$ и $y > 0$

$$\mathbf{P}^{(x)}\left(0 < S_n \le y,\ L_n > 0\right) = \mathbf{P}^{(x)}\left(0 < S_n \le y\right) - \mathbf{P}^{(-x)}\left(0 < S_n \le y\right),$$

где символ $\mathbf{P}^{(x)}(\cdot)$ означает, что случайное блуждание стартует из точки x, т.е. $S_0 = x$ и $S_n = x + \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому при $x \in \mathbb{N}$ и $y > 0$

$$\mathbf{P}\left(S_n \le y - x,\ L_n > -x\right) = \mathbf{P}\left(-x < S_n \le y - x,\ L_n > -x\right) =$$
$$= \mathbf{P}^{(x)}\left(0 < S_n \le y,\ L_n > 0\right) = \mathbf{P}^{(x)}\left(0 < S_n \le y\right) - \mathbf{P}^{(-x)}\left(0 < S_n \le y\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(-x < S_n \le y - x\right) - \mathbf{P}\left(x < S_n \le y + x\right).$$

Следовательно, по центральной предельной теореме при $x, y > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{L_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} > -x,\ \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \le y - x\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{P}\left(-x < \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \le y - x\right) - \mathbf{P}\left(x < \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \le y + x\right)\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(-x\sqrt{\frac{n}{\lfloor nt\rfloor}} < \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt\rfloor}} \le (y - x)\sqrt{\frac{n}{\lfloor nt\rfloor}}\right) -$$
$$- \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(x\sqrt{\frac{n}{\lfloor nt\rfloor}} < \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt\rfloor}} \le (y + x)\sqrt{\frac{n}{\lfloor nt\rfloor}}\right) =$$
$$= \left[\Phi\left(\frac{y - x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right)\right] - \left[\Phi\left(\frac{y + x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

Поскольку

$$\left[\Phi\left(\frac{y - x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right)\right] - \left[\Phi\left(\frac{y + x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right] = \int_0^y g(t, x, u)\, du,$$

получаем, что для простого случайного блуждания при $x, y > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{L_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} > -x,\ \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \le y - x\right) = \int_0^y g(t, x, u)\, du. \tag{15}$$

В силу соотношения (14) предел в левой части этого соотношения не зависит от конкретного случайного блуждания, удовлетворяющего условиям теоремы 3, поэтому в силу соотношения (15) он равен правой части соотношения (15). Теорема доказана.