Лекции 9-10

Принцип инвариантности Лиггетта

Наряду с принципом инвариантности Донскера–Прохорова существуют и другие принципы инвариантности для случайных блужданий, в которых последние рассматриваются при некоторых условиях, касающихся их траекторий. Такие случайные блуждания и соответствующие им принципы инвариантности получили название *условных*. Мы изучим один из таких условных принципов инвариантности, принадлежащий американскому математику Лиггетту. Сначала познакомимся со случайным процессом, играющим роль предельного процесса в указанном принципе инвариантности.

Определение 1. Случайный процесс $\{W_0(t)\,,\ t \in [0,1]\}$ называется *броуновским мостом*, если

1) $W_0(0) = 0$ п.н.;
2) все конечномерные распределения нормальны;
3) $\mathbf{E}W_0(t) = 0$, $\mathbf{E}W_0(s)\,W_0(t) = s(1-t)$ при $0 \le s \le t \le 1$;
4) траектории W_0 п.н. непрерывны .

Заметим, что $W_0(1) = 0$ п.н. В качестве примера броуновского моста можно рассмотреть процесс $\{W(t) - tW(1)\,,\ t \in [0,1]\}$, где $\{W(t)\,,\ t \ge 0\}$ – броуновское движение. Условия 1), 2) и 4) выполняются. Далее, при $0 \le s \le t \le 1$

$$\mathbf{E}\left(W(t) - tW(1)\right) = 0,$$

$$\mathbf{E}(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1)) =$$

$$= \mathbf{E}W(s)W(t) - t\mathbf{E}W(s)W(1) - s\mathbf{E}W(1)W(t) + \ st\mathbf{E}W^2(1) = s(1-t).$$

Как и в случае броуновского движения, будем считать, что все траектории броуновского моста являются непрерывными.

Пусть X – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{P}(A) > 0$. Обозначим $\{X \mid A\}$ случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(A,\ \mathcal{F}\cap A,\ \mathbf{P}(\cdot \mid A))$, где $\mathbf{P}(\cdot \mid A)$ – условная вероятностная мера ($\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A)$ при $B \in \mathcal{F}\cap A$) и определяемый формулой

$$\{X \mid A\}(\omega) = X(\omega)\,,\ \omega \in A.$$

Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_\varepsilon = \{W \mid \ |W(1)| \le \varepsilon\}\,.$$

Теорема 1. *При* $\varepsilon \to 0$

$$W_\varepsilon \xrightarrow{D} W_0,$$

где знак $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в* $C[0,1]$.

Доказательство. Возьмем в качестве W_0 процесс $\{W(t) - tW(1),\ t \in [0,1]\}$. Покажем, что этот процесс не зависит от случайной величины $W(1)$. Сначала покажем, что для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных моментов времени $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le 1$ вектор $\{W_0(t_1), W_0(t_2), \ldots, W_0(t_m)\}$ не зависит от величины $W(1)$. Действительно, рассмотрим случайный вектор $\{W_0(t_1), \ldots, W_0(t_m), W(1)\}$. Он имеет нормальное распределение. Поэтому независимость $W(1)$ от остальных компонент равносильна равенствам

$$cov\,(W(1), W_0(t_k)) = 0,\ k = 1, \ldots, m.$$

Проверим их:

$$cov\,(W(1), W_0(t_k)) = cov\,(W(1), W(t_k) - t_k W(1)) =$$

$$= \mathbf{E} W(1)\, W(t_k) - t_k \mathbf{E} W^2(1) = 0.$$

Из доказанного следует (установите это сами), что случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого множества A из цилиндрической σ-алгебры в пространстве $C[0,1]$. Вспомним, что эта σ-алгебра совпадает с борелевской σ-алгеброй в $C[0,1]$ относительно равномерной топологии. Следовательно, случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого борелевского множества A пространства $C[0,1]$. Итак, требуемое утверждение доказано.

В силу доказанного для любого борелевского множества A из $C[0,1]$

$$\mathbf{P}\,(W_0 \in A \mid\ |W(1)| \le \varepsilon) = \mathbf{P}(W_0 \in A). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое множество F из $C[0,1]$. Покажем, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\,(W \in F \mid\ |W(1)| \le \varepsilon) \le \mathbf{P}\,(W_0 \in F). \tag{2}$$

Если $|W(1)| \le \varepsilon$ и $W \in F$, то $W_0 \in F_\varepsilon = \left\{x : \rho_{\text{равн}}(x, F) \le \varepsilon\right\}$. Откуда с учетом (1) получаем, что

$$\mathbf{P}(W \in F \mid\ |W(1)| \le \varepsilon) \le \mathbf{P}(W_0 \in F_\varepsilon \mid\ |W(1)| \le \varepsilon) = \mathbf{P}(W_0 \in F_\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\,(W \in F \mid\ |W(1)| \le \varepsilon) \le \limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\,(W_0 \in F_\varepsilon) = \mathbf{P}\,(W_0 \in F).$$

Последнее равенство объясняется тем, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = F$. Итак, соотношение (2) доказано. Из соотношения (2) по теореме Александрова следует утверждение теоремы.

В дальнейшем нам потребуется понятие марковского процесса. Положим $I_m = \{1, \ldots, m\}$.

Определение 2. Неотрицательная числовая функция $p(s, x; t, y)$, где *временные* переменные s, t неотрицательны, причем $s < t$, и *пространственные* переменные x, y принадлежат $\mathbb{R}$, называется *переходной плотностью*, если эта функция измерима по паре пространственных переменных и

1) для произвольных s,t и x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\left(s,x;t,y\right)dy = 1,$$

2) для произвольных s,u,t $(0 \le s < u < t)$ и x,y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\left(s,x;u,z\right)p\left(u,z;t,y\right)dz = p\left(s,x;t,y\right).$$

Определение 3. Случайный процесс $\{X\left(t\right),\ t \ge 0\}$, стартующий из состояния $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *марковским процессом с переходной плотностью* $p\left(s,x;t,y\right)$, если для произвольного $m \in \mathbb{N}$, произвольных моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty$ и произвольных $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\left(X(t_k) \le a_k,\ k \in I_m\right) =$$

$$= \int\cdots\int_{G_m(a_1,\ldots,a_m)} p(0,x_0;t_1,x_1)p(t_1,x_1;t_2,x_2)\ldots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)dx_1\ldots dx_m,$$

где

$$G_m\left(a_1,\ldots,a_m\right) = \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_m) : x_1 \le a_1,\ldots,\ x_m \le a_m\right\}.$$

Укажем также, что если зависимость переходной плотности от временных переменных есть на самом деле зависимость от $t-s$, то марковский процесс называется *однородным*, а в противном случае – *неоднородным*.

Заметим, что броуновское движение $\{W\left(t\right),\ t \ge 0\}$ является однородным марковским процессом с переходной плотностью

$$p\left(s,x;t,y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}},\ 0 \le s < t < +\infty,\ x,y \in \mathbb{R}.$$

Покажем, например, что

$$\mathbf{P}\left(W(t_1) \le a_1,\ W(t_2) \le a_2\right) = \iint_{x_1 \le a_1,\ x_2 \le a_2} p(0,0;t_1,x_1)p(t_1,x_1;t_2,x_2)dx_1dx_2.$$

В самом деле, случайный вектор $(W(t_1),W(t_2))$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\mathbf{P}\left(W(t_1) \le a_1,\ W(t_2) \le a_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1\left(t_2-t_1\right)}} \iint_{x_1 \le a_1,\ x_2 \le a_2} \exp\left(-\frac{t_2x_1^2 - 2t_1x_1x_2 + t_1x_2^2}{2t_1\left(t_2-t_1\right)}\right)dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1\left(t_2-t_1\right)}} \iint\limits_{x_1\le a_1,\ x_2\le a_2} \exp\left(-\frac{\left(t_2-t_1\right)x_1^2+t_1\left(x_2-x_1\right)^2}{2t_1\left(t_2-t_1\right)}\right)dx_1dx_2 =$$

$$= \iint\limits_{x_1\le a_1,\ x_2\le a_2} p(0,0;t_1,x_1)p(t_1,x_1;t_2,x_2)dx_1dx_2.$$

Теорема 2. *Броуновский мост является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью*

$$p_0\left(s,x;t,y\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}}\exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}\right),\ 0=s<t<1,\ x=0,\ y\in\mathbb{R}; \\ \sqrt{\frac{1-s}{2\pi(t-s)(1-t)}}\exp\left(-\frac{((1-s)y-(1-t)x)^2}{2(1-s)(t-s)(1-t)}\right),\ 0<s<t<1,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $m\in\mathbb{N}$ и $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_m<t_{m+1}=1$. Требуется показать, что для произвольных $a_1,a_2,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\left(W_0(t_k)\le a_k,\ k\in I_m\right) =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)}\cdots\int p_0(0,0;t_1,x_1)p_0(t_1,x_1;t_2,x_2)\ldots p_0(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)dx_1\ldots dx_m. \tag{3}$$

По теореме 1, учитывая, что случайный вектор $\{W_0(t_1),\ldots,W_0(t_m)\}$ принадлежит границе множества $G_m\left(a_1,\ldots,a_m\right)$ с нулевой вероятностью, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(W_0(t_k)\le a_k,\ k\in I_m\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{P}\left(W(t_k)\le a_k,\ k\in I_m \mid |W(1)|\le\varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathbf{P}\left(W(t_k)\le a_k,\ k\in I_m;\ \ |W(1)|\le\varepsilon\right)}{\mathbf{P}(|W(1)|\le\varepsilon)}.$$

Поскольку броуновское движение является однородным марковским процессом с переходной плотностью $p\left(s,x;t,y\right)$, то

$$\mathbf{P}\left(W(t_k)\le a_k,\ k\in I_m;\ \ |W(1)|\le\varepsilon\right) =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)\times[-\varepsilon,\varepsilon]}\cdots\int \prod_{k=0}^{m} p\left(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}\right)dx_1\ldots dx_{m+1} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(x_{m+1}\right)dx_{m+1},$$

где

$$f\left(x_{m+1}\right) = \int\limits_{G_m(a_1,\ldots,a_m)}\cdots\int \prod_{k=0}^{m} p\left(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}\right)dx_1\ldots dx_m$$

(считаем, что $x_0=0$). Итак,

$$\mathbf{P}\left(W_0(t_k)\le a_k,\ k\in I_m\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(x_{m+1}\right)dx_{m+1}}{\mathbf{P}(|W(1)|\le\varepsilon)}. \tag{4}$$

Обозначим $p\,(x)$ плотность вероятностей случайной величины $W(1)$. Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{P}(|W(1)| \le \varepsilon) \sim 2\varepsilon p\,(0)\,, \tag{5}$$

где $p\,(0) = 1/\sqrt{2\pi} = p(0,0;1,0)$. Далее, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\,(x_{m+1})\,dx_{m+1} \sim 2\varepsilon f\,(0)\,. \tag{6}$$

Из соотношений (4)-(6) находим, что

$$\mathbf{P}\,(W_0(t_i) \le a_i,\ i \in I_m) = \frac{f\,(0)}{p\,(0)} =$$

$$= \int\limits_{G_m(a_1,\dots,a_m)} \cdots \int p(0,0;t_1,x_1)\dots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\frac{p(t_m,x_m;1,0)}{p(0,0;1,0)}dx_1\dots dx_m. \tag{7}$$

Заметим, что

$$p(0,0;t_1,x_1)\dots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\frac{p(t_m,x_m;1,0)}{p(0,0;1,0)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{m-1} \widetilde{p}(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}), \tag{8}$$

где

$$\widetilde{p}(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}) = \frac{p(t_{k+1},x_{k+1};1,0)}{p(t_k,x_k;1,0)}p(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}).$$

Оказывается,

$$\widetilde{p}(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}) = p_0(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}). \tag{9}$$

Докажем (9) при $k = 0$:

$$\widetilde{p}(0,0;t_1,x_1) = p(0,0;t_1,x_1)\frac{p(t_1,x_1;1,0)}{p(0,0;1,0)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}\frac{1}{\sqrt{1-t_1}}e^{-\frac{x_1^2}{2(1-t_1)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1(1-t_1)}}e^{-\frac{x_1^2}{2t_1(1-t_1)}} = p_0(0,0;t_1,x_1).$$

Докажите (9) при $k > 0$ самостоятельно. Из соотношений (8) и (9) вытекает, что

$$p(0,0;t_1,x_1)\dots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\frac{p(t_m,x_m;1,0)}{p(0,0;1,0)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k,x_k;t_{k+1},x_{k+1}). \tag{10}$$

Из (7) и (10) следует требуемое соотношение (3). Теорема доказана.

Определение 4. Распределение случайной величины X называется *решетчатым*, если существуют такие числа $a \in \mathbb{R}$ и $h > 0$, что возможные значения X есть $a + hm$, $m \in \mathbb{Z}$. Число h называется *шагом распределения*. Максимальное из возможных значений h (при всевозможных a) называется *максимальным шагом распределения*. Обозначим его h_0. Если при этом возможные значения X_1 есть $h_0 m$, $m \in \mathbb{Z}$, то распределение называется *центрально решетчатым* (с максимальным шагом h_0). Все распределения, не являющиеся решетчатыми, называются *нерешетчатыми*.

Пусть $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – случайное блуждание с шагами $X_1, X_2, \ldots$. Положим, как и раньше, при $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0,1].$$

Следующий результат получил название *условного принципа инвариантности Лиггетта.*

Теорема 3. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые или нерешетчатые случайные величины,* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда для произвольных фиксированных $a < 0$ и $b \geq 0$ при $n \to \infty$*

$$\{Y_n(t),\ t \in [0,1]\ \mid\ S_n \in (a,b]\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 – броуновский мост, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0,1]$.

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд лемм. Будем считать, что в решетчатом случае a, b кратны максимальному шагу распределения X_1. Следующий результат известен как теорема Стоуна.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 3 *при $n \to \infty$*

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta\right]\right) = \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1)\right)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta \in (0,d)$, где d – произвольное положительное число (в решетчатом случае Δ кратно максимальному шагу распределения X_1).

Лемма, по сути, означает, что при больших n распределение случайной величины $S_n/(\sigma\sqrt{n})$ мало отличается от стандартного нормального, а именно

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \approx p(x)\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}},$$

где $p(x)$ – плотность распределения $N(0,1)$. Отметим, что утверждение леммы сохранится, если промежуток $(\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta]$ заменить на промежуток $(\sigma\sqrt{n}x - \Delta, \sigma\sqrt{n}x]$.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 3 *при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(S_n \in (a,b]) \sim \frac{b-a}{\sqrt{2\pi n}\sigma}$$

и, следовательно, $\mathbf{P}(S_n \in (a,b]) \neq 0$ *при достаточно больших* n.

Доказательство. В силу леммы 1 при $x \in \mathbb{R}$

$$\sigma\sqrt{n}\mathbf{P}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}x + a, \sigma\sqrt{n}x + b\right]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + \ o\left(1\right),\ n \to \infty.$$

При $x = 0$ получаем, что

$$\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi n}\sigma} + \ o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Пусть верхний индекс у $\mathbf{P}^{(x)}$ означает, что случайное блуждание $\{S_n\}$ стартует из точки x, а не из точки 0.

Лемма 3. *В условиях теоремы* 3 *для каждого* $t \in (0,1)$ *при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in (a,b]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi\left(1-t\right)n}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}\left(1 + \ o(1)\right)$$

равномерно по x, *принадлежащим произвольному конечному отрезку.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in (a,b]\right) = \mathbf{P}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in \left(-\sigma\sqrt{n}x + a, -\sigma\sqrt{n}x + b\right]\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in \left(-\sigma\sqrt{n-\lfloor nt\rfloor}x_n + a, -\sigma\sqrt{n-\lfloor nt\rfloor}x_n + b\right]\right),$$

где $x_n = x\sqrt{n/\left(n-\lfloor nt\rfloor\right)}$. Следовательно, в силу леммы 1 при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in (a,b]\right) =$$

$$= \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n-\lfloor nt\rfloor}}e^{-\frac{1}{2}x_n^2} + \ o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Осталось заметить, что

$$\frac{1}{\sqrt{n-\lfloor nt\rfloor}}e^{-\frac{1}{2}x_n^2} = \frac{1}{\sqrt{n\left(1-t\right)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-t}} + \ o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по x, принадлежащим произвольному конечному отрезку. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – *случайные величины, заданные на вероятностных пространствах с мерами* $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$, *и* $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ *при* $n \to \infty$. *Пусть* $\{f_n\}$ – *последовательность равномерно ограниченных измеримых числовых функций на* $\mathbf{R}$ *и* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *равномерно по* x, *принадлежащим произвольному отрезку, причем* $f(x)$ – *непрерывная функция. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_n\left(f_n\left(\xi_n\right);\ \xi_n \in B\right) = \mathbf{E}\left(f\left(\xi\right);\ \xi \in B\right)$$

для каждого такого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$, *что* $\mathbf{P}\left(\xi \in \partial B\right) = 0$.

Доказательство. Ввиду равномерной ограниченности последовательности функций $\{f_n\}$ и сходимости $\xi_n \overset{D}{\to} \xi$, достаточно остановиться на случае, когда B – ограниченное множество. Очевидно,

$$|\mathbf{E}_n (f_n (\xi_n) ; \ \xi_n \in B) - \mathbf{E} (f (\xi) ; \ \xi \in B)| \leq$$

$$\leq \mathbf{E}_n (|f_n (\xi_n) - f (\xi_n)| ; \ \xi_n \in B) + |\mathbf{E}_n (f (\xi_n) ; \ \xi_n \in B) - \mathbf{E} (f (\xi) ; \ \xi \in B)| .$$

Пусть $B \subset [c, d]$ при некоторых $c, d \in \mathbb{R}$, тогда

$$\mathbf{E}_n (|f_n (\xi_n) - f (\xi_n)| ; \ \xi_n \in B) \leq \sup_{x \in [c,d]} |f_n (x) - f (x)|$$

и, значит,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_n (|f_n (\xi_n) - f (\xi_n)| ; \ \xi_n \in B) = 0.$$

Далее,

$$\mathbf{E}_n (f (\xi_n) ; \ \xi_n \in B) = \mathbf{E}_n g (\xi_n) ,$$

где $g (x) = f (x) I_B (x)$ при $x \in \mathbb{R}$ (здесь $I_B (\cdot)$ – индикатор множества B). Функция $g (\cdot)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \backslash \partial B$, причем по условию леммы $\mathbf{P} (\xi \in \mathbb{R} \backslash \partial B) = 1$. По теореме $1'$ лекции 4

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_n g (\xi_n) = \mathbf{E} g (\xi)$$

и, значит,

$$\lim_{n \to \infty} |\mathbf{E}_n (f (\xi_n) ; \ \xi_n \in B) - \mathbf{E} (f (\xi) ; \ \xi \in B)| = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Последовательность случайных процессов*

$$\{Y_n (t) , \ t \in [0, 1] \ | \ S_n \in (a, b]\}$$

сходится при $n \to \infty$ в смысле конечномерных распределений к процессу $\{W_0 (t) , \ t \in [0, 1]\}$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 1$. Рассмотрим при фиксированных $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P} (Y_n (t_k) \leq a_k, \ k \in I_m \ | \ S_n \in (a, b]) =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P} (S_n \in (a, b])} \mathbf{P} (Y_n (t_k) \leq a_k, \ k \in I_m ; \ S_n \in (a, b]) .$$

В силу марковского свойства случайного блуждания правая часть равна

$$\int_{-\infty}^{a_m} d_x \mathbf{P} (Y_n (t_k) \leq a_k, \ k \in I_{m-1} ; \ Y_n (t_m) \leq x) \frac{\mathbf{P}^{(\sigma\sqrt{n}x)} \left(S_{n - \lfloor nt_m \rfloor} \in (a, b]\right)}{\mathbf{P} (S_n \in (a, b])} =$$

$$= \int_{-\infty}^{a_m} f_n (x) \, d_x \mathbf{P} (Y_n (t_m) \leq x \ | \ Y_n (t_k) \leq a_k, \ k \in I_{m-1}) ,$$

где

$$f_n(x) = \mathbf{P}\left(Y_n(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right) \frac{\mathbf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}x\right)}\left(S_{n-\lfloor nt_m \rfloor} \in (a,b]\right)}{\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right)}.$$

По принципу инвариантности Донскера-Прохорова

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Y_n(t_m) \le x \mid Y_n(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(W(t_m) \le x \mid W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right).$$

Ввиду лемм 2 и 3

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} \mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1}\right).$$

равномерно по x, принадлежащим произвольному отрезку. Следовательно, по лемме 4

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Y_n(t_k) \le a_k,\ k \in I_m \mid S_n \in (a,b]\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{a_m} \frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} d_x \mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1};\ W(t_m) \le x\right). \tag{11}$$

Вспомним, что броуновское движение W является марковским процессом с переходной плотностью

$$p(s,x;t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}},\ 0 \le s < t,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, во-первых,

$$\mathbf{P}\left(W(t_k) \le a_k,\ k \in I_{m-1};\ W(t_m) \le x\right) =$$

$$= \int\limits_{G_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1})\times(-\infty,x]} \cdots \int \prod_{k=1}^{m} p\left(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k\right) dx_1 \ldots dx_m = \int_{-\infty}^{x} g(x_m)\, dx_m,$$

где $x_0 = 0$ и

$$g(x_m) = \int\limits_{G_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1})} \cdots \int \prod_{k=1}^{m} p\left(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k\right) dx_1 \ldots dx_m;$$

и, во-вторых,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t_m}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}} = \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)}.$$

Следовательно, правая часть (11) равна

$$\int_{-\infty}^{a_m} \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)} g(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{G_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1})\times(-\infty,a_m]} \cdots \int \prod_{k=1}^{m} p\left(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k\right) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)} dx_1 \ldots dx_m =$$

$$= \int_{G_m(a_1,\ldots,a_m)} \cdots \int \prod_{k=1}^{m} p\left(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, x_k\right) \frac{p(t_m, x; 1, 0)}{p(0,0;1,0)} dx_1 \ldots dx_m.$$

Известно (см. (10)), что в последнем интеграле подынтегральное выражение совпадает с $\prod_{k=0}^{m-1} p_0(t_k, x_k; t_{k+1}, x_{k+1})$, поэтому этот интеграл совпадает с $\mathbf{P}\left(W_0\left(t_k\right) \le a_k,\ k \in I_m\right)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta\right) \ge \varepsilon \mid\ S_n \in (a,b]\right) = 0.$$

Доказательство. Положим для $x \in D\left[c,d\right]$ при $-\infty < c \le d < +\infty$

$$w_x\left(\delta; c, d\right) = \sup_{\substack{t,s:\ |t-s| \le \delta,\\ t,s \in [c,d]}} \left|x\left(t\right) - x\left(s\right)\right|,$$

где δ - положительное число. Очевидно, что при достаточно малых $\delta > 0$

$$w_x\left(\delta\right) = w_x\left(\delta; 0, 1\right) \le w_x\left(\delta; 0, 2/3\right) + w_x\left(\delta; 1/2, 1\right). \tag{12}$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 2/3\right) \ge \varepsilon \mid S_n \in (a,b]\right) = 0. \tag{13}$$

Запишем представление при $A > 0$:

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 2/3\right) \ge \varepsilon \mid\ S_n \in (a,b]\right) = P_1\left(n, \delta, A\right) + P_2\left(n, \delta, A\right), \tag{14}$$

где

$$P_1\left(n, \delta, A\right) = \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 2/3\right) \ge \varepsilon,\ \ \left|Y_n\left(2/3\right)\right| \le A \mid\ S_n \in (a,b]\right),$$

$$P_2\left(n, \delta, A\right) = \mathbf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 2/3\right) \ge \varepsilon,\ \ \left|Y_n\left(2/3\right)\right| > A \mid\ S_n \in (a,b]\right).$$

По лемме 5

$$\lim_{A \to +\infty} \limsup_{n \to \infty} P_2\left(n, \delta, A\right) \le \lim_{A \to +\infty} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\left|Y_n\left(2/3\right)\right| > A \mid\ S_n \in (a,b]\right) =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left|W_0\left(2/3\right)\right| > A\right) = 0. \tag{15}$$

Далее,

$$P_1\left(n, \delta, A\right) =$$

$$= \int_{-A}^{A} d_x \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \ge \varepsilon,\ Y_n(2/3) \le x) \frac{\mathbf{P}^{\left(x\sigma\sqrt{n}\right)}\left(S_{n - \lfloor 2n/3 \rfloor} \in (a,b]\right)}{\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right)}. \tag{16}$$

По лемме 3

$$\mathbf{P}^{\left(x\sigma\sqrt{n}\right)}\left(S_{n - \lfloor 2n/3 \rfloor} \in (a,b]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{\pi n}\sigma} e^{-3x^2/2}\left(1 + \ o\left(1\right)\right)$$

равномерно по $x \in [-A, A]$, поэтому при достаточно больших n

$$\mathbf{P}^{\left(x\sigma\sqrt{n}\right)}\left(S_{n-\lfloor 2n/3\rfloor} \in (a,b]\right) \leq \frac{K}{\sqrt{n}}$$

при всех $x \in [-A, A]$, где K - положительная постоянная, не зависящая от n и x. Применяя это неравенство к (16), получаем, что при достаточно больших n

$$P_1(n,\delta,A) \leq \frac{K}{\sqrt{n}\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right)} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon\right). \tag{17}$$

По лемме 2

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Следовательно, при достаточно больших n

$$\sqrt{n}\mathbf{P}\left(S_n \in (a,b]\right) \geq \frac{b-a}{2\sqrt{2\pi}\sigma}. \tag{18}$$

Из соотношений (17) и (18) находим, что при достаточно больших n

$$P_1(n,\delta,A) \leq \frac{2\sqrt{2\pi}\sigma K}{b-a} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon\right). \tag{19}$$

По принципу инвариантности Донскера-Прохорова

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Поэтому, учитывая соотношение (19), получаем, что при фиксированном $A > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} P_1(n,\delta,A) = 0. \tag{20}$$

Из соотношений (14), (15) и (20) следует (13).

Покажем теперь, что

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\, w_{Y_n}(\delta; 1/2, 1) \geq \varepsilon \mid\ S_n \in (a,b]\right) = 0. \tag{21}$$

Положим $\widetilde{S}_0 = 0$, $\widetilde{S}_1 = S_n - S_{n-1}$, $\widetilde{S}_2 = S_n - S_{n-2}$, $\ldots$, $\widetilde{S}_n = S_n - S_0 = S_n$. Заметим, что

$$(S_1, \ldots, S_n) \stackrel{d}{=} \left(\widetilde{S}_1, \ldots, \widetilde{S}_n\right).$$

Условие $\{S_n \in (a,b]\}$ означает, что $\left\{\widetilde{S}_n \in (a,b]\right\}$. Для каждого $n \in \mathbb{R}$ введем случайный процесс $\widetilde{Y}_n(t) = \widetilde{S}_{\lfloor nt\rfloor} / (\sigma\sqrt{n})$, $t \in [0,1]$. В силу (13)

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{\widetilde{Y}_n}(\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon \;\middle|\; \widetilde{S}_n \in (a,b]\right) = 0. \tag{22}$$

Если $(s,t) \in [1/2, 1]$ и $|t-s| \leq \delta$, то при достаточно больших n

$$|Y_n(t) - Y_n(s)| = \frac{\left|S_{\lfloor nt\rfloor} - S_{\lfloor ns\rfloor}\right|}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\left|\widetilde{S}_{n-\lfloor ns\rfloor} - \widetilde{S}_{n-\lfloor nt\rfloor}\right|}{\sigma\sqrt{n}} \leq w_{\widetilde{Y}_n}(2\delta; 0, 2/3).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta; 1/2, 1) \geq \varepsilon \mid S_n \in (a,b]\right) \leq \mathbf{P}\left(w_{\widetilde{Y}_n}(2\delta; 0, 2/3) \geq \varepsilon \;\middle|\; \widetilde{S}_n \in (a,b]\right).$$

Откуда, ввиду соотношения (22), следует (21).

Из соотношений (12), (13) и (21) вытекает утверждение леммы.

Из лемм 5 и 6 по теореме о C-сходимости получаем утверждение доказываемой теоремы.