Восстановление поверхности по геометрическим характеристикам в Галилеевом пространстве

Султанов Б.М.

01.01.04 - Геометрия и топология

Научный руководитель: - д.ф.-м.н., проф. А. Артикбаев

Геометрия Галилеева пространства относится к геометрии пространств с вырожденными метриками.

1. **Розенфельд Б.А.** Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. -548 стр.

2. **Roschel O.** Die Geometrie des Galileischen Raumes, Habilitationsschrift, Institutfur Math. und Angew.Geometrie, Leoben, 1984. -114 pp.

3. **Артикбаев А.** Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в Галилеевом пространстве. Мат. сб. ДАН СССР, т. 119(161), 12(10), 1982, стр.204-224.

4. **Артикбаев А.** Полный угол вокруг вершины конуса в Галилеевом пространстве. Матем. заметки, т.43, No 3. 1988, стр. 657-661.

5. **Панкина Н.Е.** К теории поверхностей трехмерного галилеева пространства. Геометрия погруженных многообразий. М., 1980. стр. 71-77.

6. **Долгарев А.И.** Классические методы в дифференциальной геометри одулярных пространств. Пенза. ИИЦ ПГУ, 2005. - 306 стр.

7. **Долгарев И.А.** Поверхности в коммутативной нелинейной геометрии 3-мерного пространства-времени Галилея. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математически науки, Пенза, No 9, 2009, стр. 69 -86.

8. **Артикбаев А., Соколов Д.Д.** Геометрия в целом в плоском пространстве времени. Ташкент, 1991. - 180

В июне 1999 года в Фиратском Университете городе Элазик состоялся первый симпозиум математиков тюркоязычных стран, где А. Артикбаев выступил с докладом о геометрии полуевклидовых пространств и сформулировал некоторые задачи в этих пространствах, в том числе и в Галилеевом пространстве.

9. **Aydin M. E., Ergut M.** The equiform differential geometry of curves in 4-dimensional Galilean space G4. Stud. Univ. Babeës-Bolyai Math. 58(2013), No. 3, pp. 393–400.

10. **Aydin M. E., Ogrenmis A.O.** Spherical product surfaces in the Galilean space. Konuralp Journal of Mathematics. Volume 4 No. 2, (2016). pp. 290–298.

11. **Aydin M. E., Kulahci M. A, Ogrenmis A.O.** Constant Curvature Translation Surfaces in Galilean 3-Space. International electronic journal of geometry. Vol. 12. № 1. (2019), pp. 9-19.

12. **Dede M.** Tubular surfaces in Galilean space. Mathematical communications. 18(2013), pp. 209-217.

13. **Dede M., Ekici C.. Goemans W..** Surfaces of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. Vol. 14, No. 2, (2018). pp. 141–152.

14. **Kiziltug S., Dede M., Ekici C.** Tubular surfaces with darboux frame in Galilean 3-space. Ser. Math. Inform. Vol. 34, No 2 (2019). pp. 253-260.

Первые работы профессора Национального Университета Кёнсан (Южная Корея) Dea Won Yoon о геометрии неевклидова пространства появились в 2002 году[15].

Настоящее время среди его работ 102 включены в базу библиографических данных Scopus, причем больше половины из них посвящена изучению геометрии Галилеева пространства [16][17][18]. Кроме того, имеется много работ его учеников[19][20].

---

[15] **Yoon D.W**. On the Gauss map of translation surfaces in minkowski 3-space. Taiwanese journal of mathematics. vol. 6, no. 3, (2002). pp. 389-398

[16] **Yoon D.W.** Some Classification of Translation Surfaces in Galilean 3-Space. Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, no. 28, (2012). pp. 1355-1361.

[17] **Yoon D.W.**Tubular Surfaces with Galilean Darboux Frame in G3. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. Vol. 15, No. 2, (2019). pp. 278-287.

[18] **Yuzbasi Z.K., Yoon D.W.** On geometry of isophote curves in Galilean space. AIMS Mathematics. 6(1), (2020). pp. 66-76.

[19] **Cakmak., Karacan M.K., Kiziltug S., Yoon D.W**. Translation surfaces in the 3-dimensional Galilean space satisfying $\Delta IIxi = \lambda ixi$. Bull. Korean Math. Soc. 54 No. 4, (2017). pp. 1241-1254.

[20] **Yuzbasi Z.K., Altin M.** Surfaces using Smarandache Asymptotic Curves in Galilean Space. International J.Math. Combin. Vol.3(2020), 1-15.

Свойствам циклических поверхностей посвящены работы Э.К. Курбанова[21].

В изучении геометрии неевклидовых пространств иногда пользуются методом наложенного пространства, то есть систему координат неевклидова пространства считают координатной системой Евклидова пространства. Если систему координат Галилеева пространства считать Евклидовой системой, то некоторые наши результаты об изометрии являются обобщением понятия «изометрии поверхностей по сечению», изученной в работе А. Шарипова[22].

В последние 20 лет бурно развивается некоммутативная алгебра. С ней связано изучение группы Гейзенберга. Группа Гейзенберга некоммутативна, и алгебра этих групп относится к алгебре некоммутативных групп.

---

[21] **Курбанов Э.К.** Циклические поверхности Галилеева пространства. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Тошкент, 2006.

[22] **Шарипов А.С.** Поверхности, изометричные по сечениям, их свойства. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Тошкент, 2000.

Матрица Галилеевых движений является элементом группы Гейзенберга, так как она некоммутативна[23][24]. Изучению инвариантов группы Гейзенберга, то есть группы движений Галилеева пространства, посвящены работы В.И. Чилина, К.А. Муминова[25][26].

[23] **Бердинский Д.А**. О минимальных поверхностях в группе Гейзенберга. Вестник Кемеровского Государственного Университета. No 3-1(47), (2011). стр. 34-38.

[24] **Долгарев А. И.** Гиперболическая геометрия группы Гейзенберга. Вестник Пензенского государственного университета No 2(26), (2019). стр. 46-51.

[25] **Chilin V.I.Muminov K.K.** Equivalence of Paths in Galilean Geometry. Journal of Mathematical Sciences (United States),245(3),(2020). pp. 297-310.

[26] **Muminov K.K.Chilin V.I.**A Transcendence Basis in the Differential Field of Invariants of Pseudo-Galilean Group. Russian Mathematics,63(3),(2019). pp. 15-24.

Утверждение 1.

Галилеево пространство является подпространством $M(x, y, z, y, z) \subset^2 R_5$.

Рассмотрим пятимерное аффинное пространство A_5 с аффинной системой координат $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$. Пусть векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ - линейно независимые, единичные векторы, удовлетворяющие условию

$$
\begin{aligned}
&(\vec{e}_1\vec{e}_1) = (\vec{e}_2\vec{e}_2) = (\vec{e}_3\vec{e}_3) = 1,\\
&(\vec{e}_4\vec{e}_4) = (\vec{e}_5\vec{e}_5) = -1,\\
&(\vec{e}_i\vec{e}_j) = 0 \ \ i \neq j.
\end{aligned}
$$

Определим скалярное произведение векторов $\vec{X}\{a_i\}$ и $\vec{Y}\{b_j\}$ по формуле

$$(\vec{X}\vec{Y}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 - a_5 b_5.$$

Полученное в результати пространство называется псевдоевклидовым пространством $^2R_5$.

Норма вектора $\vec{X}\{a_i\} \in {}^2R_5$ определяется по формуле

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{(\vec{X}\vec{X})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2}.$$

Расстояние между точками $A\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и $B\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ определяется как норма вектора, соединяющего эти точки, то есть

$$d = AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| =$$

$$= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 - (b_4 - a_4)^2 - (b_5 - a_5)^2}.$$

Рассмотрим подпространство M пространства ${}^2R_5$, удовлетворяющее следующим условиям. Для точек $C \in M$ выполняются условия $a_2 = a_4$ и $a_3 = a_5$, то есть $C \in M$ имеет координаты $C\{a_1, a_2, a_3, a_2, a_3\}$.

Тогда скалярное произведение векторов $\vec{X}\{a_1, a_2, a_3, a_2, a_3\}$ и $\vec{Y}\{b_1, b_2, b_3, b_2, b_3\}$ из $M \subset {}^2R_5$

$$\left(\vec{X}\vec{Y}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_1 b_1.$$

Если в подпространстве $M(a_1, a_2, a_3, a_2, a_3) \subset {}^2R_5$ произвести следующую замену базисных векторов

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \frac{\vec{e}_2 + \vec{e}_4}{\sqrt{2}} = \vec{j}, \quad \frac{\vec{e}_3 + \vec{e}_5}{\sqrt{2}} = \vec{k},$$

то получим трехмерное пространство, в котором действует вырожденное скалярное произведение векторов, определяемое формулой

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1 x_2, \text{ если } x_1 x_2 \neq 0, \\ y_1 y_2 + z_1 z_2, \text{ если } x_1 x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Подпространство $M \subset {}^2R_5$ - это аффинное трехмерное пространство A_3, в котором для векторов $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ скалярное произведение вычисляется формулой (1).

Определение 1.

Аффинное пространство A_3, в котором скалярное произведение векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$ определено по формуле (1), называется Галилеевым пространством и обозначается через R_3^1 или Γ_3.

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ являются точками Галилеева пространства R_3^1, причем $x_1 \neq x_2$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$$

и

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})} = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & \text{если} \quad x_2 \neq x_1, \\ \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, & \text{если} \quad x_2 = x_1. \end{cases}$$

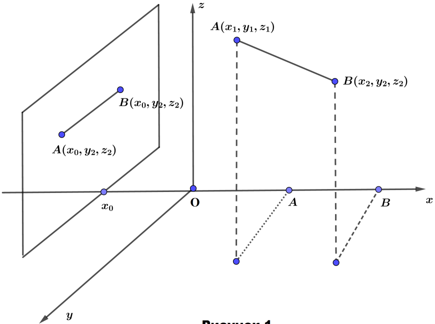

Рисунок 1.

Движение плоскости Галилея - это линейное преобразование:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = hx + y + b, \end{cases} \qquad 0 \leq h < \infty. \tag{2}$$

Очевидно, преобразование (2) линейно. Это преобразование прямые переводит в прямые, причем прямые, параллельные оси Oy, преобразует в прямые, параллельные оси Oy.

Матрица преобразования (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$ несимметрична, но $detA = 1$. Эта матрица будет элементом группы Гейзенберга.

Изучение поверхности вокруг параболической точки

Классификация точек поверхности в Галилеевом пространстве [27] показала, что в этом пространстве, в отличие от Евклидова пространства, гиперболические точки поверхности разделяются на два вида: гиперболические и циклические. Если рассмотреть поверхности, все точки которых гиперболические и циклические, они составляют два разных класса. Существует пример поверхностей, которые в Евклидовом пространстве равные, но в Галилеевом пространстве они гиперболические или циклические. Причем не существует движение Галилеева пространства, которое переводит их друг в друга.

1) если $K = a_{11}a_{22} > 0$, то индикатрисой является эллипс, точка A называется эллиптической точкой;

2) если $K = a_{11}a_{22} < 0$, то индикатриса сопряженные гиперболы, точка A называется гиперболической точкой;

3) если $k_2 = a_{22} = 0$ и $K = -M^2 < 0$, то индикатрисой будет гипербола, асимптотами которой являются координатные оси, точка A называется циклической точкой.

[27] **Артикбаев А.** Классификация точек поверхности в Галилеевом пространстве. Исследование по теории поверхностей в многообразиях знакопостоянной кривизны.

А. Артыкбаев точку поверхности, для которой выполняется условие $k_1 = a_{11} = 0$, $k_2 = a_{22} \neq 0$, назвал параболической. В этом случае индикатриса поверхности в Галилеевом пространстве имеет вид (см. рис. 2)

$$Ny'^2 = \pm 1.$$

Но кроме этого, нужно рассмотреть случай $k_1 = a_{11} \neq 0$, $k_2 = a_{22} = 0$ и $M = 0$. Тогда индикатриса поверхности имеет вид (см. рис. 3)

$$Lx'^2 = \pm 1.$$

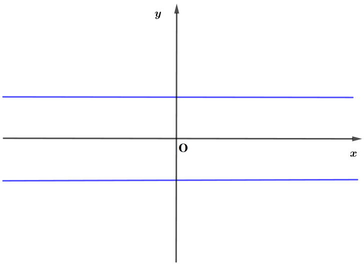

Рисунок 2

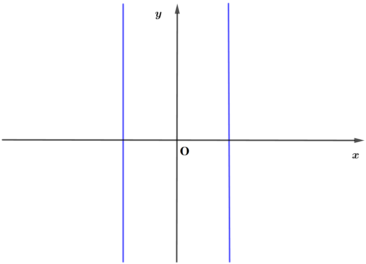

Рисунок 3

В первом случае, когда $k_1 = a_{11} = 0$, $k_2 = a_{22} \neq 0$, мы будем называть точку особой параболической точкой поверхности. Во втором случае, когда $k_1 = a_{11} \neq 0$, $k_2 = a_{22} = 0$ и $M = 0$, точку будем называть параболической точкой.

Рассмотрим две цилиндрические поверхности $z = x^2$ и $z = y^2$, определенные в области $D\{-1 \leq x \leq 1,\ \ -1 \leq y \leq 1\}$.

Сначала рассмотрим векторные уравнения этих поверхностей и их график:

$$\vec{r_1}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + u^2\vec{k}\ ; \qquad \vec{r_2}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + v^2\vec{k}\,.$$

Пусть их область определения $D\{-1 \leq u \leq 1,\ \ -1 \leq v \leq 1\}$.

Рассмотрим изгибание этих поверхностей на плоскость Oxy, то есть однозначное отображение поверхности на плоскость, сохраняющее расстояние между соответствующими точками и их порядок.

Первая поверхность $\overrightarrow{r_1}(u, v)$ отображается на область D, являющейся областью определения функции поверхности (см. рис. 4).

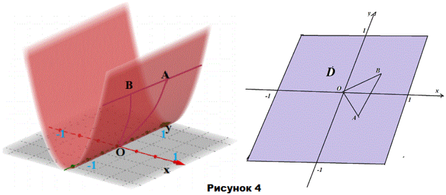

Рисунок 4

Вторая поверхность $\overrightarrow{r_2}(u, v)$ отображается на область $D^*\{-1 \leq u \leq 1,\ -l \leq v \leq l\}$ (см. рис. 5). Здесь $l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4v^2} dv$ – длина параболы.

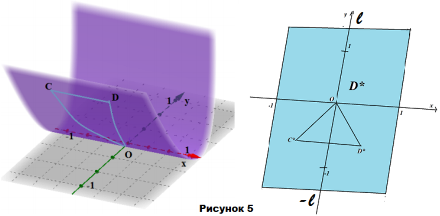

Рисунок 5

Как результат наших исследований, приведем классификацию параболической точки поверхности:

1) если $k_2 = a_{22} \neq 0$ и $k_1 = a_{11} = 0$, то индикатриса состоит из двух прямых общего положения, точка A называется особой параболической точкой;

2) если $k_1 = a_{11} \neq 0$, $k_2 = a_{22} = 0$, и $M = 0$, то индикатриса состоит из двух параллельных прямых, которые параллельны оси Oy, точка A называется параболической точкой.

Определение 2.

Поверхность, все точки которой параболические (особо параболические), назовем параболической (особой параболической).

Лемма 1.

Если направляющая кривая цилиндра является кривой на особой плоскости, то цилиндр является особо параболической поверхностью.

Цилиндр, образующие которого параллельны особой плоскости, является параболической поверхностью.

Лемма 2.

Точки конусов являются особо параболическими.

Движение Галилеева пространства в R_3^1 имеет следующий вид

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = h_1 x + y\cos\varphi + z\sin\varphi + b, \\ z' = h_2 x - y\sin\varphi + z\cos\varphi + c, \end{cases}$$

состоит из трех преобразований, это параллельный перенос на вектор $\{a, b, c\}$, вращение вокруг оси Ox на угол φ

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 0 + y\cos\varphi + z\sin\varphi, \\ z' = 0 - y\sin\varphi + z\cos\varphi, \end{cases}$$

а также скольжение на особый вектор$\{0,\ h_1,\ h_2\}$

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = h_1 x + y, \\ z' = h_2 x + z. \end{cases}$$

Скольжение на угол $\{h_1, h_2\}$ не имеет аналога в Евклидовом пространстве. В этом скольжении координатная плоскость Oyz не меняется. Другие особые плоскости $x = x_0$ параллельно переносятся на вектор $\vec{V}\{0;\ h_1 x_0;\ h_2 x_0\}$. Каждая особая плоскость $x = x_0$ скользит по себе, причем величина скольжения пропорциональна удалению ее от начала координат.

Если рассмотреть Евклидову сферу радиуса R в Галилеевом пространстве R_3^1, то после скольжения она превращается в эллипсоид, заданный уравнением (см. рис. 6)

$$(1 + h_1^2 + h_2^2)x^2 + y^2 + z^2 + 2h_1xy + 2h_2xz = R^2.$$

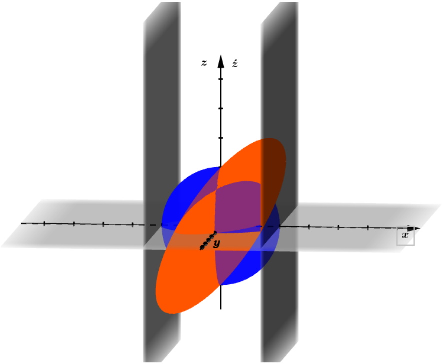

Рисунок 6

При этом особые плоскости $x = \pm R$ будут касательными этого эллипсоида, и точки касания будет иметь координаты $\{\pm R; \pm h_1 R; \pm h_2 R\}$, соответственно.

Сохранение полной кривизны в движении R_3^1

Перейдем к изложению полученных результатов в этом направлении. Полученные результаты связаны с сохранением геометрической характеристики поверхности в Евклидовом пространстве.

Изучим инварианты эллипсов, заданных уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3)$$

при линейном преобразовании

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y - \frac{h}{a}x, \end{cases} \qquad (4)$$

которое является частным случаем преобразования (2).

Утверждение 2.

Преобразование (4) не меняет вершины эллипса $(0, b)$ и $(0, -b)$, все остальные точки с абсциссой $x = x_0 \neq 0$ скользят параллельно оси Oy на расстояние $\frac{h}{a}x_0$.

После преобразования (4) уравнение эллипса (3) примет вид

$$(b^2 + h^2)x^2 - 2ahxy + a^2y^2 + a^2b^2 = 0\,. \tag{5}$$

Тогда главное направление $\{l, m\}$ будет удовлетворять условию

$$\frac{l}{m} = \frac{(h^2 - c^2) \pm \sqrt{(h^2 - c^2)^2 + 4a^2h^2}}{-2ah},$$

где $c^2 = a^2 - b^2$ (см. рис 7).

Обозначим $\alpha =< MOM'$ и $\varphi =< MOM^*$ (см. рис 7).

Тогда $tg\alpha = \frac{h}{a}$; $\qquad tg\varphi = \frac{2ah}{\sqrt{(h^2-c^2)^2+4a^2h^2}+(c^2-h^2)}$.

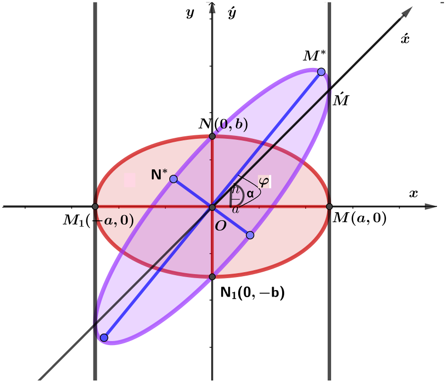

Рисунок 7

Теорема 1.

При преобразовании (4) для эллипса (5) справедливо равенство

$$\frac{1}{(OM)^2}\cdot\frac{1}{(ON)^2}=\frac{1}{(OM^*)^2}\cdot\frac{1}{(ON^*)^2}=\frac{1}{a^2b^2}.$$

Пусть поверхность F - Галилеево пространство с системой координат $Oxyz$, причем $O \in F$. Эту же поверхность рассмотрим в R_3.

Рассмотрим движение пространства R_3^1, состоящее из Галилеева вращения таким образом, что происходит вращение на угол h на касательной плоскости Oxy.

Это вращение Галилеева пространства в координатной форме имеет следующий вид

$$\begin{cases} x = x', \\ y = hx' + y', \\ z = z'. \end{cases} \tag{6}$$

При этом преобразовании оси Oz и Oy не меняют положения, а координатная ось Ox скользит (вращается в Галилеевом смысле на угол h на касательной плоскости).

Следовательно, происходит деформация, которая приводит к деформации области поверхности F около точки O.

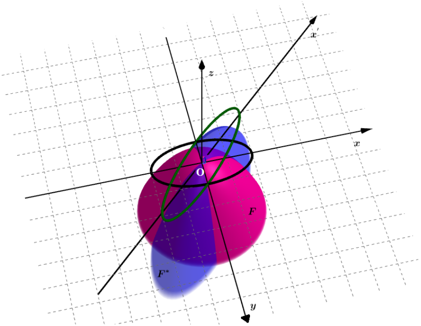

Рисунок 8

Предположим, что П - касательная плоскость точки O выпуклой поверхности F - совпадает с плоскостью Oxy. Индикатриса кривизны задана как кривая второго порядка.

Теорема 2.

При линейном преобразовании (6) на касательной плоскости полная (гауссова) кривизна поверхности не меняется.

Как следствие этих теорем можно утверждать, что при вращении Галилеева пространства, которое будет деформацией в евклидовом пространстве, полная кривизна поверхности евклидова пространства не меняется.

Задача восстановления в R_3^1

Рассмотрим существование полной циклической поверхности с заданной полной кривизной на всей плоскости.

Теорема 3.

В Галилеевом пространстве всегда существует циклическая поверхность, полная кривизна которой является заданной функцией

$$-(\varphi(x,y))^2 \in C(D), \text{т.е.} \quad K = -\varphi^2(x,y).$$

Рассмотрим класс выпуклых поверхностей $W(\pi)$ из $C^2(\pi)$, однозначно проектирующихся на всю плоскость Oxy, которые задаются уравнением $z = z(x,y)$.

Терема 4.

Если заданы функции $\varphi(x,y) > 1$ и $\mu(x,y)$, определенные на всей плоскости, то существует поверхность с коэффициентом первой квадратичной формы $\varphi(x,y)$ и дефектом кривизны, равным $\mu(x,y)$, из класса $W(\pi)$.

Аналогом теоремы Бонне Евклидова пространства является следующая теорема в R^1_3.

Теорема 6. Если на односвязной области D плоскости заданы функции:

$$G = G(u,v) \geq 0,\ D = D(u,v) \geq 0, L = L(u,v),\ M = M(u,v),\ N = N(u,v)$$

из класса C^1, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} L_v - M_u = \Gamma^2_{12} M - \Gamma^2_{11} N \\ N_u - M_v = \Gamma^2_{12} N - \Gamma^2_{22} M \end{cases}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{D}{\sqrt{G}} \right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{du^2},$$

то существует единственная в области D функция $r(u,v) = (u, y(u,v), z(u,v))$, являющаяя решением системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
y_v^2 + z_v^2 = G \\
y_{uu} = Dy_v - \frac{L}{\sqrt{G}} z_v \\
z_{uu} = Dz_v + \frac{L}{\sqrt{G}} y_v \\
y_{uv} = \frac{G_u}{2G} y_v - \frac{M}{\sqrt{G}} z_v \\
z_{uv} = \frac{G_u}{2G} z_v + \frac{M}{\sqrt{G}} y_v \\
y_{vv} = \frac{G_v}{2G} y_v - \frac{N}{\sqrt{G}} z_v \\
z_{vv} = \frac{G_v}{2G} z_v + \frac{N}{\sqrt{G}} y_v
\end{cases}
$$

с начальными условиями

$$
\begin{aligned}
&\vec{r}(u_0, v_0) = \vec{a}(a_1, a_2) \\
&\vec{r}_u(u_0, v_0) = \vec{b}(b_1, b_2), \\
&\vec{r}_v(u_0, v_0) = \vec{c}(c_1, c_2), \ ||c|| = \sqrt{G(u_0, v_0)}.
\end{aligned}
$$

Изучение геометрии поверхностей Галилеева пространства само по себе является интересным, новым исследованием, кроме того, результаты исследований можно рассматривать на Евклидовом пространстве. Такой подход дает некоторые новые результаты в Евклидовом пространстве.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ СТАТЕЙ

1. Султанов Б.М. Существование циклической поверхности по заданной функции полной кривизны. Весник НУУ. №2.2, (2017), стр. 201- 204. (01.00.00; №8).

2. Artykbaev A., Sultanov B.M. Invariants of a second-order curves under a special linear transformation. Uzbek mathematical journal. №3,(2019), pp. 19-26. (01.00.00; №6).

3. Artykbaev A., Sultanov B.M. Invariants of Surface Indicatrix in a Special Linear Transformation. Mathematics and Statistics. 7(4), (2019), pp. 106-115, DOI: 10.13189/ms.2019.070403.(№3. Scopus).

4. Artykbaev A., Sultanov B.M. Research of parabolic surface points in Galilean space. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Volume 2. Issue 4. (2019), pp. 231-245. (01.00.00; №8).

5. Sultanov B.M., Ismoilov Sh.Sh. Cyclic surfaces in pseudo-euclidean space. International Journal of Statistics and Applied Mathematics. Volume 5 №1. (2020), pp. 28-31. (№ 12. Index Copernicus. IF(RJIF=0,53)).

6. Sultanov B.M., Sobirov J.A. Revolution surfaces formed in the Galilean motion. Physical and mathematical sciences. Volume 4, Issue 1. (2020), pp.53-65. DOI: 10.26739/2181-0656-2020-4-7(№35. CroccRef).

7. Султанов Б.М. Изометрия поверхностей в Галилеевом пространстве. Докл. АН РУз.- Ташкент, №4. (2020). стр. 3-6. (01.00.00; №7).

ТЕЗИСЫ

1. Султанов Б.М. Исследование параболических точек поверхности в Галилеевом пространстве. "Современная геометрия и ее приложения -2019" . Международная конфренция. **Казань, Россия**, 4-7 сентабря 2019. стр. 23-25
2. Султанов Б.М. Поверхности, определяемые символами Кристоффеля. Modern problems of geometry and topology and its applications. 21-23 november, **Toshkent**, Uzbekistan, 2019. pp 180-181.
3. Sultanov B.M. Galiley fazosida aylanma sirtlar. Modern problems of differential equations and related branches of mathematics. **Fergana**, March 12-13, 2020 pp. 441-443.
4. Artykbaev A., Sultanov B.M., Sobirov J.A. Sweep of surfaces in Galilean space. Frontier in mathetics and computer science. **Toshkent**. Oktabr 12-15, 2020, pp. 141-142.

5. Sultanov B.M., Nurbayev A.R. Иккнчи тартибли чизикларни махсус чизикли алмаштиришдаги инвариантлар. "Замонавий топология муаммолори ва тадбиклари" илмий-амалий конференсия тўплами. **Тошкент** Сентабр 11-12,2018 114-115 б.

6.Султанов Б.М. Координата ўклари асимптота бўлган гиперболанинг махсус алмаштиришдаги инвариантлари. "Ёш математикларнинг янги теоремалари-2018" илмий конференсия тўплами. **Наманган** октаврь 18-19,2018 93-94 б.

7. Sultanov B.M. Галилей фазосида сиртлар ва уларнинг ички геметриясига боклик дифференциал характеристикалар. "Фундаментал математика муоммолари ва уларнинг тадбиклари". Республика илмий амалий конференсия тўплами. **Навоий**, 2019. 201-203 б.

8. Султанов Б.М. Галилей фазосида сиртнинг геометриясини параболик нукта атрофида ўрганиш. "Современные проблемы математики и информатики". Республика илмий амалий конференсия тўплами. **Фаргона**, 22-23 май, 2019. 23-25 б.

9. Султанов Б.М. Существование поверхности с заданными геометрическими характеристиками. Математиканинг замонавий масалалари: муоммалар ва ечимлар. **Термиз**. 2020. 21-23 октабр. pp. 70-71.

10. Султанов Б.М. Циклик сиртларни тўлик эгриликлари бўйича тиклаш. "Замонавий топология муаммолори ва тадбиклари" илмий-амалий конференсия тўплами. **Тошкент**. Май 11-12,2017 99-100 б.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!