Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 13.

Теретёнков Александр Евгеньевич

15 декабря 2020 г.

В прошлой серии...

Утверждение. Пусть $\mathcal{L}(B)$ — генератор вполне положительной сохраняющей след полугруппы, коммутирующей с $\rho \cdot \rho^{-1}$, λ — собственные числа, тогда в

$$\mathcal{L}(B) = -i[H, B] + \{\Psi^*(I), B\} + \Psi(B),$$

$[H, \rho] = 0$ и существует такой базис $\mathrm{Tr}\, F_{i,\lambda}^\dagger F_{j,\mu} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{ij}$,

$$F_{i,1}^\dagger = F_{i,1},$$

что

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda > 1} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} (a_{ij}(\lambda) F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^\dagger + \tilde{a}_{ij}(\lambda) F_{i,\lambda}^\dagger B F_{j,\lambda}) + \\ + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1) F_{i,1} B F_{j,1}$$

Квантовый детальный баланс

Утверждение. В случае ρ-самосопряжённости полугруппы, её генератор определяется

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda > 1} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} a_{ij}(\lambda)(F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^{\dagger} + \lambda F_{i,\lambda}^{\dagger} B F_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1) F_{i,1} B F_{j,1}$$

и

$$[H, B] = 0$$

Квантовый детальный баланс

$$\Psi(B\rho) = \Psi^*(B)\rho$$

$$\sum_{\lambda>1}\sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda}(\lambda a_{ij}(\lambda)F_{i,\lambda}BF_{j,\lambda}^\dagger + \frac{1}{\lambda}\tilde{a}_{ij}(\lambda)F_{i,\lambda}^\dagger BF_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} a_{ij}(1)F_{i,1}BF_{j,1} =$$

$$= \sum_{\lambda>1}\sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda}(a_{ij}^*(\lambda)F_{i,\lambda}^\dagger BF_{j,\lambda} + \tilde{a}_{ij}^*(\lambda)F_{i,\lambda}BF_{j,\lambda}^\dagger) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} a_{ij}^*(1)F_{i,1}BF_{j,1}$$

$$\tilde{a}_{ij}^*(\lambda) = \lambda a_{ij}(\lambda)$$

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda>1}\sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} a_{ij}(\lambda)(F_{i,\lambda}BF_{j,\lambda}^\dagger + \lambda F_{i,\lambda}^\dagger BF_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1}\tilde{a}_{ij}(1)F_{i,1}BF_{j,1}$$

Квантовый детальный баланс

$$\begin{aligned} i[H,B\rho] &= -i[H,B]\rho \\ i[H,B]\rho + iB\underbrace{[H,\rho]}_{=0} &= -i[H,B]\rho \end{aligned}$$

Таким образом, $[H,B] = 0$. $\square$

Квантовый детальный баланс

Определение. ГКСЛ генератор $\mathcal{L} = -i[H, \cdot] + \mathcal{D}$ удовлетворяет условию детального баланса относительно $\rho > 0$ если

$$[H, \rho] = 0, \qquad \langle\langle \mathcal{D}^* A | B \rangle\rangle_\rho = \langle\langle A | \mathcal{D}^* B \rangle\rangle_\rho$$

Утверждение. Если $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию детального баланса относительно $\rho > 0$, то $\mathcal{L}\rho = 0$.

Квантовый детальный баланс

Аналогично, можно было бы взять $\lambda < 1$

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda<1} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} b_{ij}(\lambda)(F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^\dagger + \lambda F_{i,\lambda}^\dagger B F_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1) F_{i,1} B F_{j,1}$$

Если матрицу представить в виде распределения Гиббса

$$\rho = \frac{e^{-\beta H_0}}{Z}, \qquad \beta > 0, H_0 \geqslant 0$$

$$\operatorname{spec} \rho \cdot \rho^{-1} = e^{-\beta\omega}, \qquad \omega \in \operatorname{spec}[H_0, \cdot]$$

$$\Psi(B) = \sum_{\omega>0} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\,\omega} \gamma_{ij}(\omega)(A_i(\omega) B A_j^\dagger(\omega) + e^{-\beta\omega} A_i^\dagger(\omega) B A_j(\omega)) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\,0} \gamma_{ij}(0) A_i(0) B A_j(0)$$

Квантовый детальный баланс

Утверждение. Если $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию детального баланса относительно $\rho = \frac{e^{-\beta H_S}}{Z}$, то

$$\mathcal{D} = \sum_{\alpha} \mathcal{D}^{\alpha}$$

где

$$\mathcal{D}^{\alpha}\rho = \sum_{\omega>0}\Bigg(C_{\alpha,\omega}\rho C_{\alpha,\omega}^{\dagger} - \frac{1}{2}C_{\alpha,\omega}^{\dagger}C_{\alpha,\omega}\rho - \frac{1}{2}\rho C_{\alpha,\omega}^{\dagger}C_{\alpha,\omega} +$$
$$+ e^{-\beta\omega}(C_{\alpha,\omega}^{\dagger}\rho C_{\alpha,\omega} - \frac{1}{2}C_{\alpha,\omega}C_{\alpha,\omega}^{\dagger}\rho - \frac{1}{2}\rho C_{\alpha,\omega}C_{\alpha,\omega}^{\dagger})\Bigg)$$

Квантовый детальный баланс

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle_{\rho,s} = \mathrm{Tr}\,\rho^s A^\dagger \rho^{1-s} B, \qquad s \in [0,1]$$

Семейство условий детального баланса

$$\langle\langle \Phi^*(A)|B\rangle\rangle_{\rho,s} = \langle\langle A|\Phi^*(B)\rangle\rangle_{\rho,s}$$

Утверждение. $(\rho, 1)$— детальный баланс $\Rightarrow$ (ρ, s)— детальный баланс.

Предел сингулярной связи

$$H = H_S + \varepsilon^{-2} H_B + \varepsilon^{-1} H_I$$

$$H_I = \sum_\alpha A_\alpha \otimes B_\alpha, \quad A_\alpha^\dagger = A_\alpha, \quad B_\alpha^\dagger = B_\alpha$$

В шредингеровском представлении

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_S + H_{LS}, \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t))$$

$$H_{LS} = \sum_\omega \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}(t) A_\alpha^\dagger A_\beta$$

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha\beta}(t) \left(A_\beta \rho_S A_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}\{A_\alpha^\dagger A_\beta, \rho_S\} \right)$$

Предел сингулярной связи

$$\Gamma_{\alpha\beta}(t) = \int_0^{+\infty} \langle B_\alpha(t) B_\beta(t-s) \rangle ds$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(t) + iS_{\alpha\beta}(t)$$

Предел низкой плотности

Рассматривается газ частиц с низкой концентрацией n. Задача состоит в описании динамики внутренних степеней свободы и исключении трансляционных степеней свободы.

$$H_S = \sum_k \epsilon_k |k\rangle\langle k|$$

$$H_B = \int d^3p E(\overrightarrow{p})|\overrightarrow{p}\rangle\langle\overrightarrow{p}|$$

$$\rho_B = \frac{1}{V}\int d^3p G(\overrightarrow{p})|\overrightarrow{p}\rangle\langle\overrightarrow{p}|$$

$$\langle k, \vec{q}|S|l, \vec{p}\rangle = \delta(\vec{q} - \vec{p})\delta_{kl} - 2\pi i\delta(\epsilon_k + E(\vec{q}) - \epsilon_l - E(\vec{p}))T(k, \vec{q}|l, \vec{p})$$

Предел низкой плотности

$$H_{LS} = \frac{n}{2}\sum_{\epsilon_k=\epsilon_l}\int d^3p G(\overrightarrow{p})\left(T(k,\overrightarrow{p}|l,\overrightarrow{p}) + T^*(k,\overrightarrow{p}|l,\overrightarrow{p})\right)|k\rangle\langle l|$$

$$T_\omega(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p}) = \sum_{\epsilon_k-\epsilon_l=\omega} T(k,\overrightarrow{q}|l,\overrightarrow{p})|k\rangle\langle l|$$

$$\mathcal{D}(\rho_S) = 2\pi n\sum_{\omega}\int d^3p\int d^3q G(\overrightarrow{p})\delta\left(E(\overrightarrow{q}) - E(\overrightarrow{p}) + \omega\right)\cdot$$
$$\cdot\left(T_\omega(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p})\rho_S T_\omega^\dagger(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p}) - \frac{1}{2}\{T_\omega^\dagger(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p})T_\omega(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p}),\rho_S\}\right)$$

Косвенные измерения

Система эволюционирует в соответствии с гамильтонианом H и мы хотим измерить величину A посредством косвенного измерения. А именно, мы взаимодействуем с системой в течении небольшого времени θ посредством

$$H_I(t) = g(t)AQ$$

А затем измеряем импульс P сопряжённый Q. И рассматриваем предел непрерывного измерения $\theta \to 0$.

Косвенные измерения

Тогда, если $g(t)$ достаточно мало, то пределы $\sigma_Q^2 = \lim\limits_{\theta \to 0} \theta \langle Q^2 \rangle_\theta$ и $\sigma_P^2 = \lim\limits_{\theta \to 0} \theta^{-1} \langle P^2 \rangle_\theta$ будут конечны. Обратное действие зонда на систему при измерении величины A описывается уравнением:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] - \frac{1}{2}\sigma_Q^2[A,[A,\rho(t)]]$$

Предел модели столкновений

Эволюционируем в течении времени τ

$$\Phi_\tau(\rho) = \mathrm{Tr}_R(U_\tau \rho \otimes \rho_R U_\tau^\dagger)$$

"Выкидываем" резервуар

$$\Phi_\tau(\rho) \otimes \rho_R$$

и повторяем $n = \frac{t}{\tau}$ шагов, тогда редуцированная матрица плотности:

$$\Phi_\tau^{\frac{t}{\tau}}(\rho)$$

Если существует предел $\tau \to +0$ и $\Phi_\tau^{\frac{1}{\tau}}$ — вполне положительное при $\tau \to +0$, то

$$\Psi_t = \lim_{\tau \to 0} \Phi_\tau^{\frac{t}{\tau}}$$

задаёт вполне положительную полугруппу.