

Амплитуда перехода в квантовой теории поля и 6 проблема Гильберта.

В. П. Павлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Международная конференция памяти М. К. Поливанова
«Поливанов–90»,
16–17 декабря 2020 г., МИАН, Москва

В 6 разделе своего вступительного доклада на Математическом конгрессе в Париже 1900 г. Д. Гилберт призвал математиков помочь физикам представить основы их дисциплин как внутренне непротиворечивые системы аксиом. На примере четырех незадолго до этого изданных монографий

E. Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklennng, Brockhaus, Leipzig, 4th edition, 1901. H. Hertz: Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig, 1894. L. Boltzmann: Vorlesungen über die Principe der Mechanik, Leipzig, 1897. P. Volkmann: Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Teubner, Leipzig, 1900.

Гильберт предупредил, что физик, принимая диктуемые экспериментом новые гипотезы, не всегда проверяет их совместность со старой системой аксиом и опирается на некую физическую интуицию, недопустимую при строго логическом построении теории.

Фоковское представление КПС $[\hat{a}^-(p), \hat{a}^+(p')] = \delta(p - p')$:

вакуум $|0\rangle$; $\hat{a}^-|0\rangle = 0$, базисные векторы

$|N\rangle = (\hat{a}^+(p))_N |0\rangle = \hat{a}^+(p_1) \dots \hat{a}^+(p_n) |0\rangle$.

Операторы в нормальной форме

$$\hat{A} = \sum_{m,n \geq 0} \int (dp)_M (dq)_N A_{mn}((p)_M, (q)_N) (\hat{a}^+(p))_M (\hat{a}^-(p))_N.$$

Свободное поле

$$\hat{\phi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dp (2p_0)^{-1/2} \{ e^{ipx} \hat{a}^+(p) + e^{-ipx} \hat{a}^-(p) \},$$

$$px = p^0 x^0 - \mathbf{p} \mathbf{x}, \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (\square - m^2) \hat{\phi}(x) = 0.$$

Релятивистская теория: $\hat{A} = \sum_{n \geq 0} \int (dx)_N A_n((x)_N) :(\hat{\phi}(x))_N$:

однозначен на поверхности энергии $(\square - m^2) \hat{\phi}(x) = 0$.

Нормальный символ оператора – классический функционал

$$A[\phi^0] = \sum_{n \geq 0} \int (dx)_N A_n((x)_N) (\phi^0(x))_N, \text{ однозначен на}$$

поверхности энергии $(\square - m^2) \phi^0(x) = 0$.

Для расширенного нормального символа $A[\phi]$ – стандартная

вариационная производная $\frac{\delta A[\phi]}{\delta \phi}$.

Цепочка: оператор в нормальной форме $\rightarrow$ символ $\rightarrow$
 расширение символа $\rightarrow$ вариация $\rightarrow$ сужение вариации $\phi \rightarrow \phi^0$
 $\rightarrow$ новый оператор $\frac{\delta \hat{A}[\varphi]}{\delta \varphi}$ в нормальной форме.

Формула Хори для символов

$$A \circ B[\phi^0] = \exp \left\{ -i \int dx_1 dx_2 D^-(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta \phi^0(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi^0(x_2)} A(\phi^0(x_1)) B(\phi^0(x_2)) \right\} \Big|_{\phi_1^0 = \phi_2^0 = \phi^0}$$

и такая же теорема Вика для операторов $\hat{A}\hat{B} = \dots$

Редукционная формула фоковского представления

$$[\hat{A}, \hat{a}^\pm(\mathbf{p})] = \pm \Gamma_{\mathbf{p}}^\pm \frac{\delta \hat{A}}{\delta \varphi} \equiv \pm (2\pi)^{-3/2} (2p_0)^{-1/2} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \frac{\delta \hat{A}}{\delta \varphi} \Big|_{p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}.$$

Далее "шляпки" над операторами не пишем.

Аксиомы

1а Состояния свободных частиц – векторы фоковского представления КПС.

1б В пространстве Фока действует унитарное представление группы Пуанкаре $U(\xi, \Lambda)$.

1в Спектр оператора импульса $P_\mu \in \bar{V}_+$ вакуумный вектор единственный и является изолированной точкой спектра.

2а Фоковские представления для состояний в бесконечном прошлом (*in*-состояния, их символы - с тильдой) и состояний в бесконечном будущем (*out*-состояния, их символы - без тильды) эквивалентны: существует унитарная матрица рассеяния S , $S^\dagger S = SS^\dagger = 1$, такая, что $\tilde{a}^\pm(p) = S a^\pm S^\dagger$. (Благодаря унитарности $S = \tilde{S}$.) Амплитуда перехода из начального состояния $\tilde{f}$ в конечное g связана с матричным элементом $\langle g | \tilde{f} \rangle = \langle g | S | f \rangle = \langle \tilde{g} | S | \tilde{f} \rangle$.

2б S релятивистски инвариантна: $U(\xi, \Lambda) S U^{-1}(\xi, \Lambda) = S$.

2в S действует как единичная матрица на вакуумное и одночастичные состояния.

Напомним, что все наши операторы, включая матрицу рассеяния, "живут" в фоковском представлении, на поверхности энергии. Чтобы сформулировать центральное для аксиоматики Боголюбова условие причинности, требуется ввести понятие расширенного за поверхность энергии символа S -матрицы $S[\phi]$ и сформулировать в его терминах новые аксиомы.

3а $S[\phi]$ попережнему преобразует (расширенный) символ out -поля в (расширенный) символ in -поля: $\tilde{\phi} = S[\phi] \circ \phi \circ S^\dagger[\phi]$.

3б $S[\phi]$ попережнему унитарна: $S[\phi] \circ S^\dagger[\phi] = S^\dagger[\phi] \circ S[\phi] = 1$.

3в $S[\phi]$ релятивистски инвариантна.

3г Символы всех радиационных операторов

$S_N = ((\delta/\delta\phi)_N S[\phi]) \circ S^\dagger$ и их Хори-композиций с независимыми аргументами являются обобщенными функциями умеренного роста. (начиная с этого момента, мы не выписываем очевидных функциональных аргументов у символов.)

3д Выполнено условие причинности в форме Боголюбова

$\delta S_1 / \delta \phi_2 = 0$ при $x_1 \gtrsim x_2$.

Амплитуда $M \rightarrow N \setminus M = \bar{M}$

(out-представление) $\langle \bar{M} | S | M \rangle = (\Gamma^-)_M (\Gamma^+)_{\bar{M}} \langle S_N \rangle_0$,
 S_N – сужение на поверхность энергии расширенного символа
 радиационного оператора $S_N[\phi] = ((\delta/\delta\phi)_N S[\phi]) \circ S^\dagger$

Обозначение:

$$\Gamma_j^\pm B(x_j) = (2\pi)^{-3/2} (2p_j^0)^{-1/2} \int d^4 x_j B(x_j) e^{\pm i p_j x_j} \Big|_{p_j^0 = \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2}} = \\ = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{p}_j^0 \delta(p_j^2 - m_j^2) \sqrt{(2p_j^0)} \int d^4 x_j B(x_j) e^{\pm i p_j x_j}.$$

Определение амплитуды $F((p)_N)$ канала $M \rightarrow \bar{M}$

$$\langle \bar{M} | S | M \rangle = (2\pi)^{-3/2} \int (d\mathbf{p}^0 \delta(p^2 - m^2) \sqrt{(2p^0)})_N \Phi(\langle S_N \rangle_0 \\)((-p)_M; (p)_{\bar{M}}),$$

$$\Phi(\langle S_N \rangle_0)((p)_N) = \int (dx)_N \langle S_N((x)_N) \rangle_0 e^{i \sum_j p_j x_j} = \\ -i \delta(\sum_j p_j) F((p)_N).$$

Формально амплитуда определена вне поверхности энергии, в области (канале)

$$\mu_{M, \bar{M}} = \{(p)_N \in \mathbf{R}^{4n} : \sum_j p_j = 0, \quad p_i \in V^-, i \in M, \quad p_j \in V^+, j \in \bar{M}\}.$$

Цель: "оправдать" аксиомы, показать, что:

1. Амплитуда каждого канала является граничным значением аналитической функции (своей для каждого канала)

$$F_{M,\bar{M}}((p)_N) = \lim_{(q)_N \rightarrow 0} F((p + iq)_N), \quad (p)_N \in \mu_{M,\bar{M}}.$$

2. Существует единая аналитическая функция, граничными значениями которой при $(q)_N \rightarrow 0$ являются все $F_{M,\bar{M}}((p)_N)$.

3. Поверхность энергии принадлежит области аналитичности.