

Связь винеровских и шварциановских функциональных интегралов

В.В. Белокуров, Е.Т. Шавгулидзе

МГУ им. М.В. Ломоносова и ИЯИ РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова

Семинар, посвященный 90 летию со дня рождения М.К. Поливанова
(МИРАН, 16 декабря 2020)

Доклад базируется на результате следующих работ:

- Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. 2020 "Schwarzian functional integrals calculus", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, v. 53, n.48, p.485201.
- В.В. Белокуров, Е.Т. Шавгулидзе 2020 "Functional integration over the factor-space $\text{Diff}(S)/\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ", ЭЧАЯ т. 51, 424;
- В.В. Белокуров, Е.Т. Шавгулидзе 2019 "Полярное разложение меры Винера: шварциановская теория в сравнении с конформной квантовой механикой", ТМФ, т. 200, 1324;
- Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. 2018 "Correlation functions in the Schwarzian theory", JHEP. n.11, 036;
- Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. 2018 "Unusual view of the Schwarzian theory", Mod. Phys. Lett. A. v. 33, 1850221;
- Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. 2017 "Exact solution of the Schwarzian theory ", Phys. Rev. D. v. 96, 101701(R);
- В.В. Белокуров, Е.Т. Шавгулидзе 2017 "Необычайные свойства функциональных интегралов и группы диффеоморфизмов", ЭЧАЯ, т. 48, 194.

Функциональные интегралы в квантовой механике и в квантовой теории поля рассматриваются как интегралы по гауссовой мере, заданной свободным действием A_0 . В частности, в QM (в минимуме времени) это мера Виннера

$$w(dx) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int (x'(t))^2 dt \right\} dx. \quad (1)$$

Функциональные интегралы на пространстве непрерывных путей

$$\int_C \Phi(x) w_\sigma(dx).$$

SYK, двумерная дилатонная гравитация (JT) $\Rightarrow$ эффективное действие

$$A_{Sch} = -\frac{1}{\sigma^2} \int_{S^1} \left[Sch\{\varphi, t\} + 2\pi^2 (\varphi'(t))^2 \right] dt,$$

$\varphi(t)$ – сохраняющий ориентацию ($\varphi'(t) > 0$) диффеоморфизм единичной окружности ($\varphi \in Diff_+^1(S^1)$).

$$Sch\{\varphi, t\} = \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \right)^2$$

Групповая природа пространства интегрирования может привести кого-то к искушению рассматривать некоторые математические конструкции как инвариантные меры. Однако хорошо известно, что инвариантные меры, аналогичные мере Хаара на конечномерных группах, не существуют для некомпактных групп. В частности, "континуальное произведение"

$$\prod_x \frac{df(x)}{f'(x)}$$

является символической формой обобщенной левоинвариантной меры Хаара на группе диффеоморфизмов. Это не является счетно-аддитивной мерой в строгом смысле! А все результаты, полученные с применением этого выражения, имеют только эвристический характер. Здесь имеется полная аналогия с несуществованием меры Лебега на бесконечномерных линейных пространствах. В этом случае следует использовать гауссовские меры (например, меру Винера).

Хотя на группе диффеоморфизмов $Diff_+^1(S^1)$ нет меры Хаара, существует счетно аддитивная мера, квазиинвариантная под действием подгруппы $Diff_+^3(S^1)$.
Формально меру на $Diff_+^1(S^1)$ можно записать в виде

$$\mu_\sigma(d\varphi) = \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \int_{S^1} Sch\{\varphi, t\} dt \right\} d\varphi. \quad (2)$$

Мера по группе $Diff_+^1([0, 1])$ по сравнению с (2) имеет дополнительный коэффициент, зависящий от концов интервала:

$$\mu_\sigma(d\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)\varphi'(1)}} \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)} - \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)} \right] \right\} \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \int_0^1 Sch\{\varphi, t\} dt \right\} d\varphi. \quad (3)$$

Квазиинвариантность меры Винера на пространстве функций, непрерывных на отрезке, относительно преобразований группы диффеоморфизмов, действующих по правилу

$$y(\tau) = (gx)(\tau) = x(t)\sqrt{g'(\tau)} = x(g^{-1}(\tau)) \frac{1}{\sqrt{(g^{-1}(\tau))'}} \quad (4)$$

Изменения функциональных интегралов при преобразованиях группы диффеоморфизмов

$$\begin{aligned} & \int_{C([a, b])} F[y] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_a^b (y'(\tau))^2 d\tau \right\} dy = \\ & = N(g) \int_{C([a, b])} F[gx] \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_a^b x^2(t) Sch\{g, t\} dt + \frac{1}{4} \left(x^2(b) \frac{g''(b)}{g'(b)} - x^2(a) \frac{g''(a)}{g'(a)} \right) \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_a^b (x'(t))^2 dt \right\} dx \end{aligned} \quad (5)$$

$N(g)$ зависит от диффеоморфизма $g(t)$ и поведения стохастического процесса $x(t)$ на границе отрезка.

В частности, используя свойство квазиинвариантности, можно получить

$$\begin{aligned} \int_{C_0([0, 1])} \delta(\xi(1) - x) \exp \left\{ \frac{-2\beta}{\sigma^2} \left[1 - \frac{e^{\xi(1)}}{\beta + 1} \right] \frac{1}{\int_0^1 e^{\xi(\tau)} d\tau} \right\} w_\sigma(d\xi) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - 2 \log(\beta + 1))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Мера (3) превращается в винеровскую меру $w_\sigma(d\xi)$ на $C_0([0, 1])$ при следующей подстановке переменных

$$\varphi(t) = \frac{\int_0^t e^{\xi(\tau)} d\tau}{\int_0^1 e^{\xi(\eta)} d\eta}, \quad \xi(t) = \log \varphi'(t) - \log \varphi'(0), \quad (7)$$

где $\xi(t)$ - непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющая граничному условию $\xi(0) = 0$ ($\xi \in C_0([0, 1])$).

Таким образом, мы получаем соотношение между функциональными интегралами

$$\int_{Diff_+^1([0, 1])} F(\varphi, \varphi') \mu_\sigma(d\varphi) = \int_{C_0([0, 1])} F(\varphi(\xi), (\varphi(\xi))') w_\sigma(d\xi). \quad (8)$$

Для функциональных интегралов по мере μ имеем

$$\int_{Diff^1([0,1])} F(\varphi) \mu_\sigma(d\varphi) = \frac{1}{\sqrt{f'(0)f'(1)}} \int_{Diff^1([0,1])} F(f \circ \varphi) \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{f''(0)}{f'(0)} \varphi'(0) - \frac{f''(1)}{f'(1)} \varphi'(1) \right] + \frac{1}{\sigma^2} \int_0^1 Sch\{f, \varphi(t)\}, (\varphi'(t))^2 dt \right\} \mu_\sigma(d\varphi). \quad (9)$$

$$\int_{Diff_+^1([0,1])} \Phi(\varphi(t_1); \varphi'(0), \varphi'(t_1), \varphi'(1)) \mu_\sigma(d\varphi) \\ = [t_1(1-t_1)]^2 \int_0^1 [z_1(1-z_1)]^{-3} dz_1 \int_0^{+\infty} dx_0 \int_0^{+\infty} y_1 dy_1 \int_0^{+\infty} dx_1 \\ \times \Phi(z_1; x_0, y_1, x_1) \mathcal{E}_{\sigma\sqrt{t_1}} \left(\frac{t_1}{z_1} x_0, \frac{t_1}{z_1} y_1 \right) \mathcal{E}_{\sigma\sqrt{1-t_1}} \left(\frac{1-t_1}{1-z_1} y_1, \frac{1-t_1}{1-z_1} x_1 \right). \quad (10)$$

Функциональные интегралы по группам диффеоморфизмов можно представить в виде некоторых свертки, содержащих универсальный функциональный интеграл

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\sigma}(u, v) &= \int_{Diff^1([0,1])} \delta(\varphi'(0) - u) \delta(\varphi'(1) - v) \mu_{\sigma}(d\varphi) \\
 &= \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{uv}} \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}(\pi^2 - u - v)\right\} \\
 &\times \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}(2\sqrt{uv} \cosh \theta + \theta^2)\right\} \sin\left(\frac{4\pi\theta}{\sigma^2}\right) \sinh(\theta) d\theta. \quad (11)
 \end{aligned}$$

В результате функциональные интегралы сводятся к обычным кратным интегралам.

$$\begin{aligned}
& \int_{Diff_+^1([0, 1])} \Phi(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_k); \varphi'(0), \varphi'(t_1), \dots, \varphi'(t_k), \varphi'(1)) \mu_\sigma(d\varphi) \\
&= [t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_k - t_{k-1})(1 - t_k)]^2 \int_0^1 dz_1 \dots \int_{z_{k-1}}^1 dz_k [z_1(z_2 - z_1) \cdots (z_k - z_{k-1})(1 - z_k)]^{-3} \\
&\times \int_0^{+\infty} dx_0 \int_0^{+\infty} y_1 dy_1 \cdots \int_0^{+\infty} y_k dy_k \int_0^{+\infty} dx_1 \Phi(z_1, \dots, z_k; x_0, y_1, \dots, y_k, x_1) \mathcal{E}_{\sigma\sqrt{t_1}}\left(\frac{t_1}{z_1} x_0, \frac{t_1}{z_1} y_1\right) \\
&\times \mathcal{E}_{\sigma\sqrt{t_2-t_1}}\left(\frac{t_2-t_1}{z_2-z_1} y_1, \frac{t_2-t_1}{z_2-z_1} y_2\right) \cdots \mathcal{E}_{\sigma\sqrt{t_k-t_{k-1}}}\left(\frac{t_k-t_{k-1}}{z_k-z_{k-1}} y_{k-1}, \frac{t_k-t_{k-1}}{z_k-z_{k-1}} y_k\right) \\
&\times \mathcal{E}_{\sigma\sqrt{1-t_k}}\left(\frac{1-t_k}{1-z_k} y_k, \frac{1-t_k}{1-z_k} x_1\right). \tag{12}
\end{aligned}$$

Функциональные интегралы по группе $Diff_+^1(S^1)$, связаны с интегралами по группе $Diff_+^1([0, 1])$.

Чтобы определить эту связь, отображим окружность S^1 на отрезок $[0, 1]$, и склеим концы отрезка равенством $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

В этом случае соответствующая виннеровская переменная ζ есть броуновский мост $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$, ($\zeta \in C_{00}([0, 1])$), в отличие от обычного виннеровского процесса ξ в формуле (1) с $\xi(0) = 0$ и произвольным значением $\xi(1)$. Такая условная мера связана с обычной равенством

$$w_\sigma(d\xi) = w_\sigma^{Brown}(d\zeta) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (13)$$

А для интегралов по мере μ_σ получится

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{Diff_+^1(S^1)} F(\varphi, \varphi') \mu_\sigma(d\varphi) = \int_{Diff_+^1([0,1])} \delta\left(\frac{\varphi'(1)}{\varphi'(0)} - 1\right) F(\varphi, \varphi') \mu_\sigma(d\varphi). \quad (14)$$

Функциональное интегрирование по мере на группе $Diff_+^1(S^1)$ приводит к бессмысленным бесконечным результатам. Причина состоит в том, что эта мера инвариантна относительно левого действия группы $SL(2, \mathbf{R})$ на пространстве $Diff_+^1(S^1)$:

$$Sch\{\varphi, t\} + 2\pi^2 (\varphi'(t))^2 = Sch\{\psi, t\} + 2\pi^2 (\psi'(t))^2, \quad (15)$$

$$\varphi = \gamma \circ \psi \quad (\varphi(t) = \gamma(\psi(t))); \quad \varphi, \psi \in Diff_+^1(S^1).$$

$$\gamma(\psi) = \frac{1}{i2\pi} \log \frac{e^{i2\pi\psi} + z}{\bar{z}e^{i2\pi\psi} + 1}; \quad \gamma \in SL(2, \mathbf{R})$$

Известное свойство производной Шварца

$$Sch\{h \circ f, t\} = Sch\{h, f(t)\} (f'(t))^2 + Sch\{f, t\}. \quad (16)$$

Можно факторизовать меру на $Diff_+^1(S^1)$, превратив тем самым пространство интегрирования $Diff_+^1(S^1)$ в декартово произведение

$$Diff_+^1(S^1) \cong SL(2, \mathbf{R}) \times Diff_+^1(S^1)/SL(2, \mathbf{R})$$

И вычислять все интегралы по фактор-пространству $Diff_+^1(S^1)/SL(2, \mathbf{R})$

Результаты функционального интегрирования по группе диффеоморфизмов окружности (даже бесконечного радиуса) и по группе диффеоморфизмов отрезка (или бесконечной прямой) отличаются принципиально, опровергая наивную физическую интуицию.

"Склеивание" концов отрезка превращает меру $\mu_\sigma(d\varphi)$ и соответствующую меру Винера в условные меры, для которых свойство марковости не выполняется. В частности, области $t > t_1$ (для $G_2(0, t_1)$), и $t > t_3$ (для $G_4(0, t_{1(2)}; t_{2(1)}, t_3)$) дают ненулевые вклады в функциональные интегралы для корреляционных функций. Рассматривая переменную t как время, можно сказать, что будущее влияет на настоящее.

Интегрирование по разным функциональным пространствам ($Diff_+^1(S^1)$ и $Diff_+^1(\mathbf{R})$) даёт разные результаты!

Интеграл

$$\frac{1}{\rho^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^2(t)} dt \quad (17)$$

инвариантен относительно действия (4) группы $Diff_+^3([0, 1])$.

Определим функцию $\varphi \in Diff_+^1([0, 1])$ формулой

$$\varphi^{-1}(t) = \rho^2 \int_0^t \frac{1}{x^2(\tau)} d\tau. \quad (18)$$

Тогда $x(t)$ выражается через ρ и $\varphi(t)$ следующим образом:

$$x(t) = \rho \frac{1}{\sqrt{(\varphi^{-1}(t))'}}. \quad (19)$$

В этом случае имеем

$$\int_0^1 x^2(t) dt = \rho^2 \int_0^1 (\varphi'(\tau))^2 d\tau. \quad (20)$$

Таким образом, имеет место взаимно-однозначное соответствие $(\rho, \varphi) \leftrightarrow x$, и пространство $C_+([0, 1])$ стратифицируется на орбиты с различными значениями инварианта ρ .

Для гладких $x(t)$ ($x \in C_+^1([0, 1])$) и трижды дифференцируемых $\varphi(t)$ ($\varphi \in Diff_+^3([0, 1])$) получим также

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^1 (x'(t))^2 dt = \frac{\rho^2}{4\sigma^2} \left\{ \int_0^1 \mathcal{S}_\varphi(\tau) d\tau + \left[\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)} - \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)} \right] \right\}. \quad (21)$$

Итак, имеет место взаимно-однозначное соответствие

$$C_+([0, 1]) \leftrightarrow (0, +\infty) \times Diff_+^1([0, 1]),$$

При этом для меры Винера на пространстве $C_+([0, 1])$ справедливо следующее полярное разложение:

$$w_\sigma(dx) = \mathcal{P}_\sigma(\rho) (\varphi'(0)\varphi'(1))^{\frac{3}{4}} \mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi) d\rho. \quad (22)$$

Нормировочный множитель $\mathcal{P}(\rho)$ определяет относительный вес вклада в меру от траектории $x(t)$ с определённым значением $\frac{1}{\rho^2}$ инварианта (17).

$$\mathcal{P}_\sigma(\tilde{\rho}) = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{8\tilde{\rho}^2} \right\}. \quad (23)$$

Таким образом, полярное разложение меры Винера

$$w_\sigma(dx) = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{8\rho^2} \right\} (\varphi'(0)\varphi'(1))^{\frac{3}{4}} \mu_{\frac{\underline{2}\sigma}{\rho}}(d\varphi) d\rho, \quad (24)$$

$$x \in C_+([0, 1]), \quad \varphi \in Diff_+^1([0, 1]), \quad 0 < \rho < +\infty.$$

Для меры Винера на пространстве $C_+(S^1)$ получится

$$w_\sigma(dx) = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{8\rho^2} \right\} \mu_{\frac{\underline{2}\sigma}{\rho}}(d\varphi) d\rho, \quad (25)$$

$$x \in C_+(S^1), \quad \varphi \in Diff_+^1(S^1), \quad 0 < \rho < +\infty.$$

Из полярного разложения меры Винера (25) следует равенство функциональных интегралов

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_+(S^1)} F(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{S^1} \left[(x'(t))^2 - 2\pi^2 x^2(t) + \frac{2g}{x^2(t)} \right] dt \right\} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} d\rho \exp \left\{ -\left(\frac{\sigma^2}{8} + \frac{g}{\sigma^2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right\} \\
 & \times \int_{Diff_+^1(S^1)} F(x(\rho, \varphi)) \exp \left\{ \frac{\rho^2}{4\sigma^2} \int_{S^1} \left[S_\varphi(t) + 2\pi^2 (\varphi'(t))^2 \right] dt \right\} d\varphi. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Если подынтегральное выражение является $SL(2, \mathbf{R})$ инвариантным, то интеграл можно редуцировать на орбиты.

В этом случае, интегралы можно факторизовать и получить в результате

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_+(S^1)/SL(2,\mathbb{R})} \Phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{S^1} \left[(x'(t))^2 - 2\pi^2 x^2(t) + \frac{2g}{x^2(t)} \right] dt \right\} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} d\rho \exp \left\{ -\left(\frac{\sigma^2}{8} + \frac{g}{\sigma^2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right\} \\
 &\times \int_{Diff_+^1(S^1)/SL(2,\mathbb{R})} \Phi(x(\rho, \varphi)) \exp \left\{ \frac{\rho^2}{4\sigma^2} \int_{S^1} [S_\varphi(t) + 2\pi^2 (\varphi'(t))^2] dt \right\} d\varphi. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Таким образом получается очевидная связь между конформной квантовой механикой и шварциановской теорией.

Вычисляя функциональные интегралы в конформной квантовой механике, мы тем самым найдём соответствующие функциональные интегралы в шварциановской теории. И наоборот, техника функционального интегрирования на группе диффеоморфизмов позволяет вычислять нетривиальные функциональные интегралы в конформной квантовой механике.

Рассмотрим пример использования конформной квантовой механики для вычисления шварциановских функциональных интегралов. Положим $g = 0$, $\sigma = 1$ и выберем

$$\Phi(x) = \delta \left(\kappa^2 - 4 \int_{S^1} \frac{dt}{x^2(t)} \right).$$

Правая часть (27) задаёт функцию распределения в шварциановской теории

$$Z_{Schw}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \int_{Diff_+^1(S^1)/SL(2,\mathbb{R})} \exp \{ -A_{Sch} \} d\varphi.$$

А вычисление левой части с помощью разложения по собственным функциям квантовомеханической задачи приводит к результату

$$Z_{Schw}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa^3}} \exp \left\{ \frac{2\pi^2}{\kappa^2} \right\}$$

который, конечно, можно получить и непосредственным функциональным интегрированием в шварциановской теории.

Функциональные интегралы шварциановской теории можно использовать в конформной квантовой механике.

Рассмотрим уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \psi_g(q, \tilde{\tau}) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{g}{q^2} \right) \psi_g(q, \tilde{\tau}), \quad q > 0, \quad (28)$$

или, по-другому, уравнение Шредингера с мнимым временем для потенциала $V(q) = \frac{g}{q^2}$.

Фундаментальное решение задачи Коши с начальным условием

$$\psi_g(q, 0) = \psi_0(q) = \delta(q(0) - q_0),$$

$$\psi_g(t, q, q_0) = \int_{C_+([0, t])} \delta(x(0) - q_0) \delta(x(t) - q) \exp \left\{ - \int_0^t \frac{g}{x^2(\tilde{\tau})} d\tilde{\tau} \right\} w_1(dx). \quad (29)$$

В результате интегрирования по мере μ получим

$$\begin{aligned} \psi_g(q, t; q_0) &= \frac{(q_0 q)^{\frac{3}{2}}}{\pi t^2} \frac{1}{\sqrt{2g + \frac{1}{4}}} \exp \left\{ - \frac{q_0^2 + q^2}{2t} \right\} \\ &\left[\sin \left(\pi \sqrt{2g + \frac{1}{4}} \right) \int_0^{+\infty} \exp \left\{ - \frac{q_0 q}{t} \cosh \theta \right\} \exp \left\{ - \sqrt{2g + \frac{1}{4}} \theta \right\} \sinh \theta d\theta \right. \\ &\left. + \int_0^\pi \exp \left\{ \frac{q_0 q}{t} \cos \tau \right\} \sin \left(\sqrt{2g + \frac{1}{4}} \tau \right) \sin \tau d\tau \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Замена переменных (7) позволяет переписать полярное разложение меры Винера (24) следующим образом:

$$w_{\sigma}(dx) = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{8\rho^2} \right\} \frac{e^{\frac{3}{4}\xi(1)}}{\left(\int_0^1 e^{\xi(\tau)} d\tau \right)^{\frac{3}{2}}} w_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\xi) d\rho. \quad (31)$$

Хотя $x(t)$ и $\xi(\tau)$ оба являются винеровскими процессами, свойство марковости процесса $x(t)$ относительно времени t "его собственного мира" очевидно не подразумевает его марковости относительно времени τ "теневого мира" процесса $\xi(\tau)$, и наоборот.