

Производная функции Минковского: неулучшаемые оценки

Дмитрий Гайфулин

ИППИ РАН, Математический институт им. В.А. Стеклова

24 декабря 2020

Определение функции Минковского

Функция Минковского, обычно обозначаемая $\varphi(x)$, для произвольного $x \in [0, 1]$ определяется следующим образом. Пусть x представлено в виде обыкновенной цепной дроби

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

Тогда для иррационального x выполнено

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1 + \dots + a_k - 1}} \quad (1)$$

Если x рациональное, то соответствующая сумма конечна.

Функция Минковского и дерево Штерна-Броко

Пусть F_n - n -й уровень дерева Штерна-Броко, то есть

$$F_n : \{\xi = [0; a_1, \dots, a_k] : a_1 + \dots + a_k = n + 1\}$$

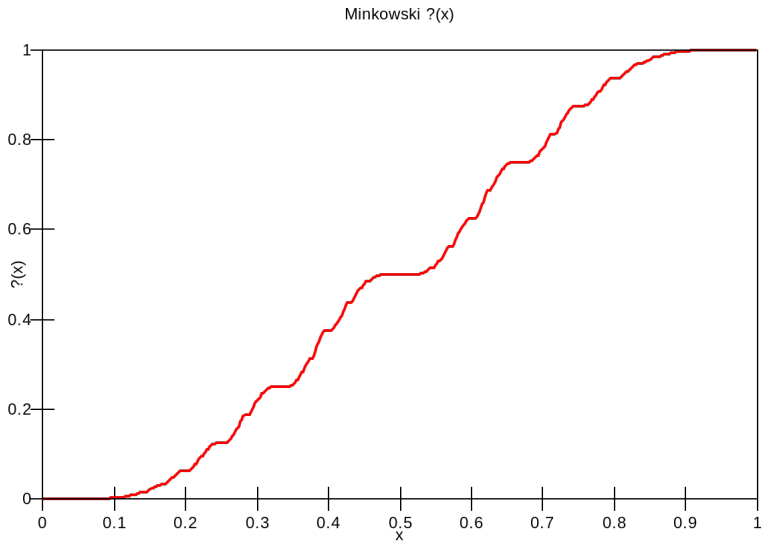
Можно эквивалентно определить функцию Минковского как предельную функцию распределения в дереве Штерна-Броко

$$?(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\xi \in F_n : \xi \leq x\}}{2^n + 1}.$$

Свойства $\varphi(x)$, сборная солянка

- ❶ $\varphi(x)$ - монотонная непрерывная функция.
- ❷ Свойства симметрии: $\varphi(x) = 1 - \varphi(1 - x)$, $\varphi(\frac{x}{x+1}) = \frac{\varphi(x)}{2}$
- ❸ Производная $\varphi(x)$ принимает только два значения: 0 and $+\infty$. Почти всюду выполнено $\varphi'(x)=0$.
- ❹ $\varphi'(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{Q}$.
- ❺ Если $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ - двое соседей в дереве Штерна-Броко, то есть $|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}| = \frac{1}{q_1 q_2}$, тогда выполнено равенство
$$\varphi(\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}) = \frac{\varphi(\frac{p_1}{q_1}) + \varphi(\frac{p_2}{q_2})}{2}$$

График $\varphi(x)$



Стабильные точки функции Минковского.

Стабильными точками $\varphi(x)$ называют решения уравнения $\varphi(x) = x$. Легко видеть, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = 1$. Поскольку $\varphi'(x) = 0$ в рациональных точках, функция Минковского имеет как минимум одну стабильную точку на интервале $(0, \frac{1}{2})$. Так как $\varphi(x) = 1 - \varphi(1 - x)$, множество стабильных точек симметрично относительно $\frac{1}{2}$. Известная недоказанная гипотеза гласит:

Гипотеза

Уравнение $\varphi(x) = x$ имеет ровно 5 решений.

Пока это безнадёжная задача...

Производная функции Минковского. Результаты Душистовой, Кана и Мощевитина.

Пусть $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ - иррациональное число. Обозначим $S_t(x) = a_1 + \dots + a_t$.

Теорема (А)

(i) Пусть для иррационального x из $(0, 1)$ для всех достаточно больших t выполнено неравенство $S_x(t) < \kappa_1 t$. Тогда производная $f'(x)$ существует и равна $+\infty$.

(ii) Для любого $\varepsilon > 0$ существует иррациональное $x \in (0, 1)$, такое что $f'(x) = 0$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство $S_x(t) < (\kappa_1 + \varepsilon)t$.

где

$$\kappa_1 = 2 \log(1 + \sqrt{5}) / \log 2 - 2 = 1.3884 \dots$$

Теорема (B)

(i) Пусть для иррационального x из $(0, 1)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших t выполнено неравенство $S_x(t) > (\kappa_2 + \varepsilon)t$. Тогда производная $f'(x)$ существует и равна 0.

(ii) Для любого $\varepsilon > 0$ существует иррациональное $x \in (0, 1)$, такое что $f'(x) = +\infty$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство $S_x(t) < (\kappa_2 - \varepsilon)t$.

Напомним,

$$\lambda_n = 0.5 \left(n + \sqrt{n^2 + 4} \right), \quad (2)$$

$$\kappa_2 = \frac{4 \log \lambda_5 - 5 \log \lambda_4}{\log \lambda_5 - \log \lambda_4 - \log \sqrt{2}} = 4.401 \dots \quad (3)$$

Обозначим через F_n множество бесконечных цепных дробей, неполные частные которых принадлежат множеству $\{1, 2, \dots, n\}$, где $n \geq 5$. Случай, когда $x \in F_4$ тривиален, поскольку в этом случае производная всегда равна $+\infty$.

Теорема (С)

(i) Пусть для иррационального $x \in F_n$ из $(0, 1)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших t выполнено неравенство $S_x(t) < (\kappa_1^{(n)} - \varepsilon)t$. Тогда производная $?'(x)$ существует и равна $+\infty$.

(ii) Для любого $\varepsilon > 0$ существует иррациональное $x \in F_n$, такое что $?'(x) = 0$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство $S_x(t) < (\kappa_1^{(n)} + \varepsilon)t$.

Обозначим

$$\kappa_4 = \sqrt{\frac{\kappa_1 - 1}{\log 2}} = 0.7486 \dots \quad (4)$$

Теорема (D)

(i) Пусть для иррационального x из $(0, 1)$ производная $?'(x)$ существует и выполнено равенство $?'(x) = 0$. Тогда для всех достаточно больших чисел t выполнена оценка

$$\max_{u \leq t} (S_x(u) - \kappa_1 u) \geq \kappa_4 \sqrt{t \log t} (1 - o(1)).$$

(ii) Существует иррациональное $x \in (0, 1)$, такое что $?'(x) = 0$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство

$$S_x(t) - \kappa_1 t \leq 2\sqrt{2} \cdot \kappa_4 \sqrt{t \log t} (1 + o(1)).$$

Результаты автора и И. Кана – продолжение

Для формулировки следующей теоремы введём константы $\tilde{\lambda} = \sqrt{2}\lambda_4/\lambda_5 \approx 1.1537043$ и

$$\gamma = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{20}} \cdot \frac{5 + \sqrt{29}}{2\sqrt{29}} (1 + [0; \bar{4}][0; \bar{5}])^2 \approx 0.9982728, \quad (5)$$

Теорема (Е)

(i) Пусть производная $?'(\mathbf{x})$ существует и равна $+\infty$. Тогда для любого достаточно большого t выполнена оценка

$$\max_{u \leq t} (\kappa_2 u - S_{\mathbf{x}}(u)) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-\frac{(5 - \kappa_2)(\kappa_2 - 4) \log(\gamma)}{\log \tilde{\lambda}}} \sqrt{t} > 0.06222 \sqrt{t}. \quad (6)$$

(ii) Существует иррациональное $\mathbf{x} \in (0, 1)$, такое что $?'(\mathbf{x}) = +\infty$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство

$$\kappa_2 t - S_{\mathbf{x}}(t) \leq 0.26489 \sqrt{t}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что в утверждениях (i) и (ii) теорем выше изучаются, вообще говоря, разные величины. И оптимальные константы в них могут не совпадать.

Первый результат посвящен иррациональным числам с произвольными неполными частными. Удалось показать, что пример из теоремы D является неуллучшаемым.

Теорема (1)

Рассмотрим произвольное иррациональное число $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ такое, что $\varphi'(x) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для бесконечно многих t выполнено

$$S_x(t) - \kappa_1 t \geq (2\sqrt{2} - \varepsilon)\kappa_4 \sqrt{t \log t}. \quad (8)$$

Второй результат посвящён утверждению (i) той же теоремы.

Теорема (2)

(i) Рассмотрим произвольное иррациональное число $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ такое, что $\varphi'_1(x) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших t выполнено

$$\max_{u \leq t} (S_x(u) - \kappa_1 u) = \varphi'_1(t) \geq (\sqrt{2} - \varepsilon) \kappa_4 \sqrt{t \log t}. \quad (9)$$

(ii) Для любого $\varepsilon > 0$ существует иррациональное число $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ такое, что $\varphi'_1(x) = 0$ и при этом для бесконечно многих t выполнено

$$\max_{u \leq t} (S_x(u) - \kappa_1 u) = \varphi'_1(t) \leq (\sqrt{2} + \varepsilon) \kappa_4 \sqrt{t \log t}. \quad (10)$$

Новые результаты автора

Третий результат посвящён утверждению (ii) теоремы Е. Пусть

$$\kappa_5 = \sqrt{\frac{8(\kappa_2 - 4)(5 - \kappa_2) \log(\gamma^{-1})}{\log \tilde{\lambda}}} \approx 0.152427. \quad (11)$$

Теорема (3)

(i) Рассмотрим произвольное иррациональное число $x \in (0, 1)$ такое, что $?'(x) = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для бесконечно многих t выполнено

$$\varphi_2(t) = \kappa_2 t - S_x(t) \geq (\kappa_5 - \varepsilon)\sqrt{t}. \quad (12)$$

(ii) Для любого $\varepsilon > 0$ существует иррациональное $x \in (0, 1)$, такое что $?'(x) = +\infty$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство

$$\varphi_2(t) = \kappa_2 t - S_x(t) \leq (\kappa_5 + \varepsilon)\sqrt{t}. \quad (13)$$

Четвёртый результат посвящён утверждению (i) теоремы Е.

Теорема (4)

(i) Рассмотрим произвольное иррациональное число $x \in (0, 1)$ такое, что $\varphi'_2(x) = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших t выполнено

$$\varphi'_2(t) = \max_{u \leq t} (\kappa_2 t - S_x(t)) \geq \left(\frac{\kappa_5}{2} - \varepsilon \right) \sqrt{t}. \quad (14)$$

(ii) Для любого $\varepsilon > 0$ существует иррациональное $x \in (0, 1)$, такое что $\varphi'_2(x) = +\infty$ и для бесконечно многих t выполнено неравенство

$$\varphi'_2(t) = \max_{u \leq t} (\kappa_2 t - S_x(t)) \leq \left(\frac{\kappa_5}{2} + \varepsilon \right) \sqrt{t}. \quad (15)$$

Обозначим через q_n знаменатель подходящей дроби $[0; a_1, \dots, a_n]$.

Лемма (Н. Мощевитин)

Для любого иррационального $x \in (0, 1)$ и произвольного δ существует натуральное $t = t(x, \delta)$ такое, что

$$\frac{?(x + \delta) - ?(x)}{\delta} \geq \frac{q_t q_{t-1}}{2^{S_x(t)+4}}$$
$$\frac{?(x + \delta) - ?(x)}{\delta} \leq \frac{q_t^2}{2^{S_x(t)-2}}$$

Набросок доказательства. Вычисление континуанта

Как обычно, континуант $\langle a_1, \dots, a_t \rangle$ вычисляется рекуррентно.

$$\langle \rangle = 1, \quad \langle a_1 \rangle = a_1, \quad \langle a_1, \dots, a_t \rangle = a_t \langle a_1, \dots, a_{t-1} \rangle + \langle a_1, \dots, a_{t-2} \rangle$$

Лемма (1)

Для любого континуанта $\langle a_1, \dots, a_t \rangle$ выполнены неравенства

$$C_2 \varphi^t \prod_{i=1}^{w(t)} (d_i + 1) \geq \langle a_1, \dots, a_t \rangle \geq C_1 \varphi^t \prod_{i=1}^{w(t)} \left(\frac{d_i}{4} \right),$$

где C не зависит от t .

Блоковая структура

Введём новые параметры. Пусть $\varepsilon > 0$ - фиксированное число из условия Теоремы. Пусть $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ - произвольное рациональное число, удовлетворяющее условию $1 > \lambda > 1 - \varepsilon^6 10^{-6}$. Нам понадобятся следующие константы.

$$M = \frac{10 \log \varepsilon}{\log \lambda}, \quad P = \left\lceil \frac{\log 6}{\log(1 + \varepsilon^2)} \right\rceil + 1, \quad N = 2M(P + 2).$$

Пусть теперь t достаточно большое, чтобы было выполнено $\lambda^N t > \frac{t}{\log t}$ и при этом $\lambda^N t \in \mathbb{Z}$. Обозначим $t_i = \lambda^i t$. Разрежем континуант на блоки следующим образом:

$B_i = (a_{t_i+1}, a_{t_i+2}, \dots, a_{t_{i-1}})$, $1 \leq i \leq N$. Обозначим $t_{N+1} = 0$, тогда $B_{N+1} = (a_1, \dots, a_{t_N})$ есть начальный отрезок цепной дроби. Таким образом,

$$[0; a_1, \dots, a_t] = [0; B_{N+1}, B_N, \dots, B_1].$$

Таким образом, длина i -го блока равна $(1 - \lambda)\lambda^{i-1}t$. Для любой последовательности $X = b_1, b_2, \dots, b_k$ обозначим $S(X) = b_1 + \dots + b_k$ и $\varphi(X) = S(x) - \kappa_1 t$.

Определение f_i и f'_i

Обозначим через M_i максимальный элемент блока B_i .

Обозначим индекс наибольшего элемента через m_i . Если в блоке более одного элемента равны максимальному, выберем самый левый из них. Таким образом, $a_{m_i} = M_i$. Для каждого блока B_i рассмотрим также "укороченный" блок

$B'_i = (a_{t_i+1}, \dots, a_{m_i-1})$. Заметим, что максимальный элемент полного блока не входит в укороченный.

Заметим, что

$$S_{m_i} - \kappa_1 m_i = \varphi(B_{N+1}) + \varphi(B_N) + \dots + \varphi(B_{i+1}) + \varphi(B'_i) + (M_i - \kappa_1).$$

Обозначим через числа f_i и f'_i через равенства:

$$\langle B_i \rangle = \sqrt{2}^{S(B_i) + f_i} \sqrt{t_{i-1} \log t}, \quad \langle B'_i \rangle = \sqrt{2}^{S(B'_i) + f'_i} \sqrt{t_{i-1} \log t}. \quad (16)$$

Заметим, что в силу равенства нулю производной $\varphi'(x)$ для любого $1 \leq i \leq N+1$ выполнено неравенство

$$\frac{\langle B_{N+1}, B_N, \dots, B_{i+1}, B'_i \rangle}{\sqrt{2}^{S(B_{N+1})+S(B_N)+\dots+S(B_{i+1})+S(B'_i)}} < 1$$

То есть,

$$\frac{\langle B_{N+1} \rangle \langle B_N \rangle \dots \langle B_{i+1} \rangle \langle B'_i \rangle}{\sqrt{2}^{S(B_{N+1})+S(B_N)+\dots+S(B_{i+1})+S(B'_i)}} < 1.$$

Подставляя (16), имеем для каждого i

$$f'_i \sqrt{t_{i-1} \log t} + \sum_{k=i+1}^{N+1} f_k \sqrt{t_{k-1} \log t} < 0. \quad (17)$$

Перепишем еще раз (16), пользуясь определением $\varphi(B_i)$

$$\begin{aligned} \langle B_k \rangle &= \sqrt{2}^{\kappa_1(t_{k-1}-t_k)+\varphi(B_k)+f_k \sqrt{t_{k-1} \log t}}, \\ \langle B'_i \rangle &= \sqrt{2}^{\kappa_1(m_i-t_i-1)+\varphi(B'_i)+f'_i \sqrt{t_{i-1} \log t}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим снизу величины $\langle B_k \rangle, \langle B'_i \rangle$. Для этого обозначим

$$c_i = \frac{M_i}{\sqrt{t_{i-1} \log t}}.$$

Обозначим не равные единице элементы $\langle B_i \rangle$ через $d_k(m)$, а их количество через w_k . По Лемме 2, получаем

$$\langle B_k \rangle \geq c \varphi^{t_{k-1}-t_k} \prod_{m=1}^{w_k} \left(\frac{d_k(m)}{4} \right). \quad (19)$$

Заметим, что

$$\sum_{m=1}^{w_k} d_k(m) = ((\kappa_1 - 1)(t_{k-1} - t_k))(1 + o(\varepsilon^4)).$$

Значит, в ситуации, когда величина w_k не фиксирована, правая часть (19) минимальна, когда все $d_k(m)$ равны максимальному элементу $c_k \sqrt{t_{k-1} \log t}$. Их количество в этом случае равно $\frac{(\kappa_1 - 1)(t_{k-1} - t_k)(1 + o(\varepsilon^4))}{c_k \sqrt{t_{k-1} \log t}}$. Получаем, что

$$\langle B_k \rangle \geq \varphi^{t_{k-1}-t_k} \left(\frac{c_k \sqrt{t_{k-1} \log t}}{4} \right)^{\frac{(\kappa_1 - 1)(t_{k-1} - t_k)(1 + o(\varepsilon^4))}{c_k \sqrt{t_{k-1} \log t}}}. \quad (20)$$

Пользуясь тем, что $\sqrt{2}^{\kappa_1} = \varphi$, из (18) и (20) получаем:

$$\left(\frac{c_i \sqrt{t_{i-1} \log t}}{\varphi} \right)^{\frac{(\kappa_1-1)(t_{i-1}-t_i)(1+o(\varepsilon^4))}{c_i \sqrt{t_{i-1} \log t}}} \leq \sqrt{2}^{\varphi(B_i)+f_i} \sqrt{t_{i-1} \log t}. \quad (21)$$

Логарифмируя неравенство (21) и убирая в $o(\varepsilon^4)$ все члены меньших порядков, получаем

$$\frac{(\kappa_1 - 1)(t_{k-1} - t_k)(1 + o(\varepsilon^4)) \log t}{c_i \sqrt{t_{k-1} \log t}} \frac{1}{2} \leq (\varphi(B_i) + f_k \sqrt{t_{k-1} \log t}) \log \sqrt{2}. \quad (22)$$

Отсюда получаем следующую оценку

$$\varphi(B_k) \geq \frac{(\kappa_1 - 1)(t_{k-1} - t_k) \sqrt{\log t} (1 + o(\varepsilon^4))}{c_k \log 2 \sqrt{t_{k-1}}} - f_k \sqrt{t_{k-1} \log t}. \quad (23)$$

при $k \leq N$ эта формула превращается в

$$\varphi(B_k) \geq \left(\frac{(\kappa_1 - 1)(1 - \lambda)(1 + o(\varepsilon^4))}{c_k \log 2} - f_k \right) \sqrt{t_{k-1} \log t}. \quad (24)$$

Оценим теперь величину $\langle B'_i \rangle$. Обозначим сумму неравных единице элементов континуанта через S''_i . Пусть максимальный элемент $\langle B'_i \rangle$ равен $c'_i \sqrt{t_{i-1} \log t}$. Тогда, рассуждая аналогично случаю полных блоков, получаем аналог формулы (23).

$$\varphi(B'_i) \geq \frac{S''_i \sqrt{\log t} (1 + o(\varepsilon^4))}{\log 2 c'_i \sqrt{t_{i-1}}} - f'_i \sqrt{t_{i-1} \log t}. \quad (25)$$

Суммируя неравенства (24) при $k = N, N-1, \dots, i+1$ и (25), а также учитывая (17), получаем

$$S(m_i) - \kappa_1 m_i \geq (1 + o(\varepsilon^4)) \left(\frac{\kappa_1 - 1}{\log 2 c_{N+1}} \sqrt{t_N \log t} + \frac{S''_i \sqrt{\log t}}{\log 2 c'_i \sqrt{t_{i-1}}} + \frac{(\kappa_1 - 1)(1 - \lambda) \sqrt{\log t}}{\log 2} \sum_{k=i+1}^N \frac{\sqrt{t_k}}{c_k} \right) + (c_i \sqrt{t_i \log t} - \kappa_1). \quad (26)$$

Тривиально оценивая

$$\frac{S_i'' \sqrt{\log t}}{\log 2 c_i' \sqrt{t_{i-1}}} > 0, \quad \frac{\kappa_1 - 1}{\log 2 c_{N+1}} \sqrt{t_N \log t} > 0$$

и пользуясь тем, что $t_{i+k} = \lambda^k t_i$, получаем для всех $i \leq N$

$$S(m_i) - \kappa_1 m_i \geq \left(\frac{(\kappa_1 - 1)(1 - \lambda)(1 + o(\varepsilon^4))}{\log 2} \sum_{k=i+1}^N \frac{(\sqrt{\lambda})^{k-i}}{c_k} + c_i \right) \sqrt{t_i \log t}. \quad (27)$$

Обозначив

$$\alpha = \frac{(\kappa_1 - 1)}{\log 2} \quad (28)$$

и $\eta = \frac{1}{\alpha}$, неравенство (27) можно переписать в виде

$$S(m_i) - \kappa_1 m_i \geq \left((1 - \lambda) \sum_{k=i+1}^N \frac{(\sqrt{\lambda})^{k-i}}{c_k} + \eta c_i \right) \alpha \sqrt{t_i \log t} (1 + o(\varepsilon^4)). \quad (29)$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма

Пусть $c_1, c_2, \dots, c_N$ - произвольные положительные числа.
Пусть числа φ_k определяются следующим образом:

$$\varphi_k = (1 - \lambda) \sum_{i=k+1}^N \frac{\sqrt{\lambda}^{i-k}}{c_i} + \eta c_k. \quad (30)$$

Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\max_{1 \leq k \leq N} \varphi_k \geq \sqrt{8\eta}(1 + o(\varepsilon)). \quad (31)$$

Неравенство (29) также можно записать в виде

$$S(m_i) - \kappa_1 m_i \geq \sqrt{\lambda}^i \left((1 - \lambda) \sum_{k=i+1}^N \frac{(\sqrt{\lambda})^{k-i}}{c_k} + \eta c_i \right) \alpha \sqrt{t \log t} (1 + o(\varepsilon^4)) \quad (32)$$

И для доказательства "чётных теорем" нужна лемма

Лемма

Пусть набор $C = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ состоит из произвольных неотрицательных чисел. Пусть числа φ_k определяются по правилу (30). Зададим числа φ'_k следующим образом:

$$\varphi'_k(C) = \sqrt{\lambda}^k \varphi_k = (1 - \lambda) \sum_{i=k+1}^N \frac{\sqrt{\lambda}^i}{c_i} + \sqrt{\lambda}^k \eta c_k. \quad (33)$$

Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\max_{1 \leq k \leq N} \varphi'_k(C) \geq \sqrt{2\eta} (1 + o(\varepsilon)). \quad (34)$$

Спасибо за внимание!