

Системы и решётки корней в числовых полях

В. Л. Попов

Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва

International webinar

Actual problems of the theory of algebraic groups

December 14, 2020

<https://www.herzen.spb.ru/announce/8-12-2020/>

Доклад основан на следующих совместных работах с Ю. Г. Зархиным:

- [1] Vladimir L. Popov, Yuri G. Zarhin, *Root systems in number fields*, Indiana University Mathematics Journal (2019), no. 8257.
- [2] Vladimir L. Popov, Yuri G. Zarhin, *Root lattices in number fields*, Bulletin of Mathematical Sciences (2020),
<https://doi.org/10.1142/S1664360720500216>.
- [3] V. L. Popov, Yu. G. Zarhin, *Rings of integers in number fields, and root lattices*, Doklady Mathematics **101** (2020), no. 3, 221–223.

Цитата

Конструкция системы корней G_2 :

Эту систему можно описать как множество целых алгебраических чисел кругового поля, порождённого корнем кубическим из единицы, с нормой 1 или 3.

(Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1969, стр. 315).

Часть 1: Реализация систем корней в числовых полях

Системы корней: напоминание

Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{Q}$ и $v \in V$ — ненулевой вектор. Линейное отображение $\varrho: V \rightarrow V$ называется отражением относительно v , если

$$\varrho(v) = -v,$$

V^ϱ является гиперплоскостью в V .

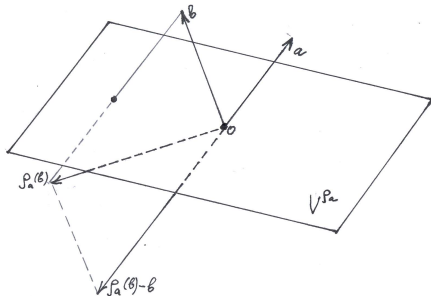
Тогда образом оператора $\varrho - \text{id}$ является прямая $\mathbb{Q}v$, а ядром — гиперплоскость V^ϱ .

Системы корней: напоминание

Определение

Конечное подмножество R в V , порождающее V и не содержащее нуля, называется системой корней в V , если

- (1) для любого $a \in R$ существует отражение ϱ_a относительно a , для которого $\varrho_a(R) = R$ (оно автоматически единственно);
- (2) $(\varrho_a - \text{id})(b) \in \mathbb{Z}a$ для любых $a, b \in R$.



Свойства и терминология:

- Линейная оболочка над $\mathbb{Z}$ системы корней R в V является свободным $\mathbb{Z}$ -модулем ранга $\dim V$.
- Группа $W(R)$, порожденная всеми отражениями ϱ_a , $a \in R$, конечна. Она называется группой Вейля системы корней R .

Типом системы корней в V называется тип ее диаграммы Дынкина.

Рангом системы корней в V называется число $\dim V$.

Пусть L — свободный $\mathbb{Z}$ -модуль конечного ранга $n > 0$, рассматриваемый как подмножество в $\mathbb{Q}$ -векторном пространстве $V = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

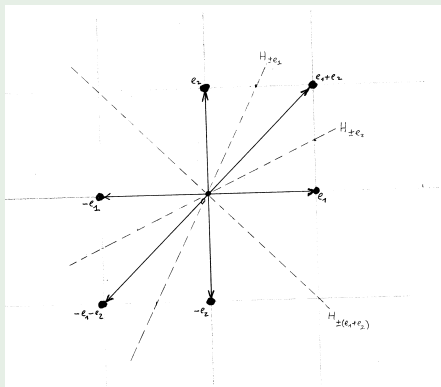
Любой тип R систем корней ранга n реализуется в L :

В L найдется конечное подмножество R ранга n , являющееся системой корней типа R в V .

Если пара (V, L) наделена дополнительной структурой, то группа Вейля $W(R)$ может не быть с ней согласованной. Например, если V наделена скалярным произведением, то в $W(R)$ могут содержаться не ортогональные преобразования.

Пример

$n = 2$, $e_1, e_2 \in L$ — ортонормированный базис в V ,
 $R = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm(e_1 + e_2)\}$ — система корней типа A_2 в V .
Не все преобразования из её группы Вейля $W(R)$
ортогональны.



Естественным источником пар (V, L) является алгебраическая теория чисел. Там они возникают в виде $(K, \mathcal{O})$, где K — числовое поле, а $\mathcal{O}$ — его кольцо целых.

С парой $(K, \mathcal{O})$ естественно связан ряд дополнительных структур. Среди них выделяются три подгруппы в $\mathrm{GL}_{\mathbb{Q}}(K)$:

(1) группа $\mathrm{Aut}(K)$ автоморфизмов поля K .

(2) группа $\mathrm{mult}(K^*)$, где $\mathrm{mult}(a)$ — оператор умножения на $a \in K^*$:

$$\mathrm{mult}(a): K \rightarrow K, x \mapsto ax.$$

(3) группа $\mathcal{L}(K)$, порождённая $\mathrm{Aut}(K)$ и $\mathrm{mult}(K^*)$.

Реализация типа систем корней в числовом поле

Определение

Тип R систем корней (не обязательно приведённый) называется допускающим реализацию в числовом поле K , если

(1) $[K : \mathbb{Q}] = \text{rk}(R)$;

(2) в $\mathcal{O}$ существует подмножество R ранга $\text{rk}(R)$, являющееся системой корней типа R в K ;

(3) $W(R)$ является подгруппой группы $\mathcal{L}(K)$.

В этом случае множество R называется реализацией типа R в поле K .

Замечание

Если в п. (2) этого определения заменить $\mathcal{O}$ на K , то более общего понятия не получается.

Объяснение:

Если R — такое подмножество ранга $\text{rk}(R)$ в K , что R — система корней типа R в K и выполнены условия (1) и (2), то существует $m \in \mathbb{Z}$, для которого

$$m \cdot R := \{m\alpha \mid \alpha \in R\} \subset \mathcal{O}.$$

Множество $m \cdot R$ имеет ранг $\text{rk}(R)$, является системой корней типа R в K и $W(m \cdot R) = W(R)$.

Реализации систем корней ранга 1 в числовых полях

Системы корней типов A_1 и BC_1 :

Возьмем $K = \mathbb{Q}$. Тогда $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ и $\mathcal{L}(K) = \text{mult}(\mathbb{Q}^*)$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$. Тогда

$$R := \{\pm\alpha\} \text{ и } R := \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$$

— реализации типов A_1 и BC_1 в поле K .

Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

Системы корней типов A_2 и G_2 :

Возьмем за K третье круговое поле:

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}).$$

Тогда $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$, где $\omega = e^{2\pi i/6} = (1 + i\sqrt{3})/2$, а $\text{Aut}(K) = \langle c \rangle$, где c — комплексное сопряжение $a \mapsto \bar{a}$.

Если $a \in \mathcal{L}(K)$ — элемент конечного порядка, то $a : K \rightarrow K$ является ортогональным преобразованием относительно евклидовой структуры

$$K \times K \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(a\bar{b}) = 2\text{Re}(a\bar{b}),$$

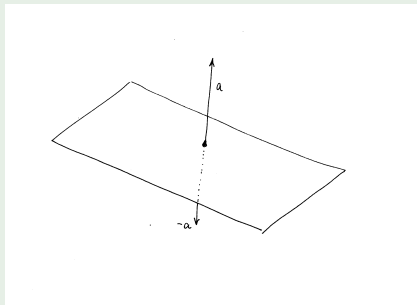
Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

Пример

Для любого ненулевого элемент $a \in K$ оператор

$$r_a := \text{mult}(-a\bar{a}^{-1})c \in \mathcal{L}(K)$$

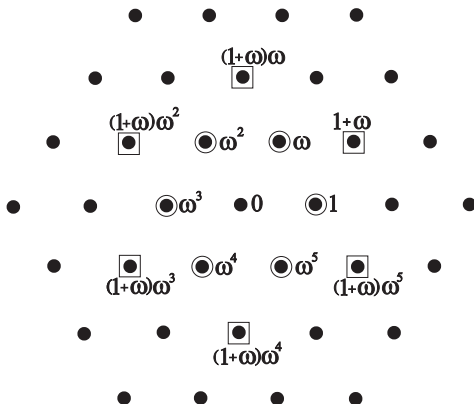
является отражением относительно a .



Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

$\mathcal{O}(1) = \{\pm 1, \pm \omega, \pm \omega^2\}$ (все корни 6-й степени из 1).

$\mathcal{O}(3) = (1 + \omega)\mathcal{O}(1)$.



Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

$$\mathcal{O}(1) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\} \text{ где } \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \omega^2.$$

Поэтому:

$\mathcal{O}(1)$ — система корней типа A_2 в K с базой α_1, α_2 .

$\mathcal{O}(3)$ — система корней типа A_2 в K с базой $\beta_1 = (1 + \omega)\alpha_1$,
 $\beta_2 = (1 + \omega)\alpha_2$.

$$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(3)$$

$$= \{\pm\alpha_1, \pm\beta_2, \pm(\alpha_1 + \beta_2), \pm(2\alpha_1 + \beta_2), \pm(3\alpha_1 + \beta_2), \pm(3\alpha_1 + 2\beta_2)\}$$

— система корней типа G_2 в K с базой α_1, β_2 .

Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

$$r_a(\mathcal{O}(d)) = \mathcal{O}(d)$$

для каждого $a \in \mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(3)$ и любого d . Поэтому группы $W(\mathcal{O}(1))$, $W(\mathcal{O}(3))$, $W(\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(3))$ лежат в $\mathcal{L}(K)$. Значит,

$\mathcal{O}(1)$ — реализация типа A_2 в поле K ,

$\mathcal{O}(3)$ — реализация типа A_2 в поле K ,

$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(3)$ — реализация типа G_2 в поле K

Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

Системы корней типов B_2 , $2A_1$, BC_2 , $2BC_1$, and $A_1 + BC_1$:

Возьмем за K четвертое круговое поле:

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}).$$

Тогда $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, а $\text{Aut}(K) = \langle c \rangle$, где c — комплексное сопряжение $a \mapsto \bar{a}$.

Если $a \in \mathcal{L}(K)$ — элемент конечного порядка, то $a : K \rightarrow K$ — ортогональное преобразование относительно той же евклидовой структуры, что и выше:

$$K \times K \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(a\bar{b}) = 2\text{Re}(a\bar{b}),$$

Как и выше, для любого ненулевого элемента $a \in K$ оператор

$$r_a := \text{mult}(-a\bar{a}^{-1})c \in \mathcal{L}(K)$$

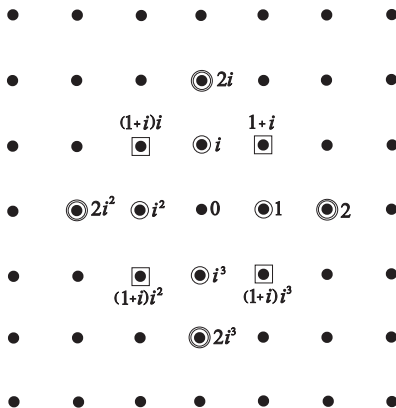
является отражением.

Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

$\mathcal{O}(1) = \{\pm 1, \pm i\}$ (все корни 4-й степени из 1).

$\mathcal{O}(2) = (1+i)\mathcal{O}(1)$.

$\mathcal{O}(4) = 2\mathcal{O}(1)$.



Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

$$\mathcal{O}(1) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\} \text{ где } \alpha_1 = 1, \alpha_2 = i.$$

Поэтому:

$\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(2)$ и $\mathcal{O}(4)$ — системы корней типа $A_1 + A_1$ в K с базами α_1, α_2 , $\beta_1 = (1+i)\alpha_1, \beta_2 = (1+i)\alpha_2$ и $2\alpha_1, 2\alpha_2$.

$$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(2) = \{\pm\alpha_1, \pm\beta_2, \pm(\alpha_1 + \beta_2), \pm(2\alpha_1 + \beta_2)\},$$

— система корней типа B_2 в K с базой α_1, β_2 .

Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(4)$ — система корней типа $2BC_1$ в K с базой α_1, α_2 .

$\mathcal{O}(1) \cup \{\pm 2\}$ — система корней типа $A_1 + BC_1$ в K с базой α_1, α_2 .

$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(2) \cup \mathcal{O}(4)$
 $= \{\pm\alpha_1, \pm 2\alpha_1, \pm\beta_2, \pm(\alpha_1 + \beta_2), \pm 2(\alpha_1 + \beta_2), \pm(2\alpha_1 + \beta_2)\},$

— система корней типа BC_2 в K с базой α_1, β_2 .

Реализации систем корней ранга 2 в числовых полях

$$r_a(\mathcal{O}(d)) = \mathcal{O}(d)$$

для каждого $a \in \mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(2)$ и любого d . Поэтому группы $W(\mathcal{O}(1))$, $W(\mathcal{O}(1)) \cup W(\mathcal{O}(2))$, $W(\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(4))$, $W(\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(2) \cup \mathcal{O}(4))$, $W(\mathcal{O}(1) \cup \{\pm 2\})$ лежат в $\mathcal{L}(K)$.
Значит,

$\mathcal{O}(1)$ — реализация типа $A_1 + A_1$ в поле K ,

$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(2)$ — реализация типа B_2 в поле K ,

$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(4)$ — реализация типа $BC_1 + BC_1$ в поле K ,

$\mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(2) \cup \mathcal{O}(4)$ — реализация типа BC_2 в поле K ,

$\mathcal{O}(1) \cup \{\pm 2\}$ — реализация типа $A_1 + BC_1$ в поле K

Теорема

Следующие свойства группы Вейля приведенной системы корней типа R и ранга n эквивалентны:

(i) *Эта группа Вейля изоморфна подгруппе G группы $\mathcal{L}(K)$, где K — числовое поле степени n над $\mathbb{Q}$.*

(ii) *Тип R содержится в следующем списке:*

$$A_1, \quad A_2, \quad B_2, \quad G_2, \quad A_1 \dot{+} A_1, \quad A_1 \dot{+} A_1 \dot{+} A_2, \quad A_2 \dot{+} B_2.$$

Сравнение этой теоремы со следующей показывает:

Существование изоморфизма между подгруппой G группы $\mathcal{L}(K)$ и группой Вейля системы корней ранга $[K : \mathbb{Q}]$ и типа R не эквивалентно тому, что $G = W(R)$, где R — система корней типа R в $\mathcal{O}$.

Классификация типов систем корней, реализуемых в числовых полях

Теорема

Для системы корней (не обязательно приведенной) типа R следующие свойства эквивалентны:

- (i) существует числовое поле, в котором R допускает реализацию;*
- (ii) $\text{rk}(R) = 1$ или 2 .*

Часть 2: Реализация корневых решёток в числовых полях

Определение

Пусть L — свободный $\mathbb{Z}$ -модуль конечного ранга, а

$$b: L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$$

невыврожденная симметрическая билинейная форма.

Пара (L, b) называется решёткой.

Далее L всегда рассматривается как аддитивная подгруппа в векторном пространстве $V = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$.

Определение

Ненулевая решётка (L, b) называется примитивной, если наибольший общий делитель всех чисел $b(x, y)$, где $x, y \in L$, равен 1.

Определение

Решётка (L, b) называется чётной, если $b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ для любого $x \in L$.

Определение

Решётка называется неразложимой, если она не является ортогональной прямой суммой каких-то ненулевых подрешёток.

Определение

Решетка (L_1, b_1) называется подобной решётке (L_2, b_2) , если существуют такие числа $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, что $(L_1, m_1 b_1)$ and $(L_2, m_2 b_2)$ изометричны.

Обозначение:

Ортогональная прямая сумма s экземпляров решетки (L, b) обозначается $(L, b)^s$.

Определение

Ненулевая решётка называется корневой, если она изометрична ортогональной прямой сумме решёток, принадлежащих к объединению двух бесконечных серий A_ℓ ($\ell \geq 1$), D_ℓ ($\ell \geq 4$) и четырёх sporadic решёток Z^1 , E_6 , E_7 , E_8 , явно описанных ниже.

Обозначения:

$\mathbb{R}^m$ обозначает m -мерное вещественное координатное векторное пространство строк с евклидовой структурой

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad ((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) := \sum_{j=1}^m x_j y_j. \quad (*)$$

$e_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с 1 на j -м месте.

Если L — такая $\mathbb{Z}$ -линейная оболочка множества линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^m$, что $b(L \times L) \subseteq \mathbb{Z}$, где b — ограничение отображения $(*)$ на $L \times L$, то (L, b) называется *решёткой* в $\mathbb{R}^m$ и обозначается просто L .

Явное описание решёток A_ℓ , D_ℓ , Z^1 , E_6 , E_7 , E_8

В этих обозначениях и соглашениях:

Z^n — решётка $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{Z} \text{ для всех } j\}$ в $\mathbb{R}^n$.

A_n — решётка $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 0\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

D_n — решётка $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \text{ чётно}\}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$.

E_8 — решётка $D_8 \cup (D_8 + \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_8))$ в $\mathbb{R}^8$.

E_7 — ортогонал в E_8 к подрешётке $\mathbb{Z}(e_7 + e_8)$.

E_6 — ортогонал в E_8 к подрешётке $\mathbb{Z}(e_7 + e_8) + \mathbb{Z}(e_6 + e_8)$.

Свойства решёток A_ℓ , D_ℓ , Z^1 , E_6 , E_7 , E_8

- A_ℓ , D_ℓ , Z^1 , E_6 , E_7 , E_8 неразложимы.
- Разложение произвольной корневой решётки в ортогональную прямую сумму неразложимых подрешёток (называемых её неразложимыми компонентами) единственно.
- A_ℓ при $\ell \neq 1$, D_ℓ , Z^1 , E_6 , E_7 , E_8 примитивны.
- A_1 не примитивна.
- A_ℓ , D_ℓ , E_6 , E_7 , E_8 чётны.
- Z^1 не чётна.

Связь с системами корней

- Если R — система корней в векторном пространстве V над полем $\mathbb{Q}$ и $L = \mathbb{Z}R$, то существует такая билинейная форма $b: L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$, что (L, b) — корневая решетка.
- Всякая корневая решётка так получается (вообще говоря, не единственным способом).
- Если R неприводима, то во всех случаях, кроме типа A_1 , билинейная форма b однозначно определяется по R совокупностью четырёх условий:
 - (а) b инвариантна относительно группы Вейля $W(R)$,
 - (б) b принимает значения в $\mathbb{Z}$,
 - (с) b положительно определена,
 - (д) (L, b) примитивна.

Связь с системами корней

Для неприводимых приведённых систем корней R связь между типом R и типом корневой решетки (L, b) даётся следующей таблицей:

тип R	тип (L, b)
$A_\ell, \ell \geq 1$	A_ℓ
$B_\ell, \ell \geq 2$	$\mathbb{Z}^\ell$
$C_\ell, \ell \geq 3$	$\mathbb{D}_\ell$
C_2	$\mathbb{Z}^2$
$D_\ell, \ell \geq 3$	$\mathbb{D}_\ell$
$E_\ell, \ell = 6, 7, 8$	$\mathbb{E}_\ell$
F_4	$\mathbb{D}_4$
G_2	A_2

Характеризация корневых решёток: теорема Витта

Теорема (E. Witt)

Решетка (L, b) является корневой тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

- (i) форма b является положительно определённой;*
- (ii) $\mathbb{Z}$ -модуль L порождён множеством*

$$\{x \in L \mid b(x, x) = 1 \text{ или } 2\}.$$

Ввиду теоремы Витта, все корневые решётки разбиваются на следующие три непересекающиеся типа:

Три типа корневых решёток

Корневые решётки несмешанного типа I

Это те решётки (L, b) , у которых $\mathbb{Z}$ -модуль L порожден множеством $\{x \in L \mid b(x, x) = 1\}$.

Эквивалентное описание:

Это в точности все решётки, изометричные $\mathbb{Z}^n$.

Три типа корневых решёток

Корневые решётки несмешанного типа II

Это те решётки (L, b) , у которых $\mathbb{Z}$ -модуль L порожден множеством $\{x \in L \mid b(x, x) = 2\}$.

Эквивалентное описание:

Это в точности все чётные корневые решётки.

Ещё одно эквивалентное описание:

Это в точности все корневые решётки, все неразложимые компоненты которых не изометричны $\mathbb{Z}^1$.

Три типа корневых решёток

Корневые решётки смешанного типа

Это все остальные корневые решётки.

Конструкция решёток в числовых полях

Естественным источником решёток является алгебраическая теория чисел. А именно:

Пусть K — числовое поле с кольцом целых $\mathcal{O}$ и

$$n := [K : \mathbb{Q}] < \infty.$$

Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — множество всех вложений полей $K \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Конструкция решёток в числовых полях

Классическая конструкция геометрического представления алгебраических чисел вкладывает K в $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой структурой. Это наделяет K (а потому и $\mathcal{O}$) следующей $\mathbb{Q}$ -билинейной формой:

$$b_K: K \times K \rightarrow \mathbb{C}, \quad b_K(x, y) := \sum_{j=1}^n \sigma_j(x) \overline{\sigma_j(y)}.$$

Конструкция решёток в числовых полях

Теорема

(i) $\mathbb{Q}$ -линейная оболочка множества $b_K(K \times K)$ является собственным подмножеством в $\mathbb{R}$, содержащим $\mathbb{Q}$.

(ii) Билинейная форма b_K симметрична и положительно определена.

(iii) Следующие свойства (a), (b), (c) эквивалентны:

(a) $b_K(K \times K) = \mathbb{Q}$.

(b) $b_K(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subseteq \mathbb{Q}$.

(c) Существует такой $\tau \in \text{Aut } K$, что $\tau^2 = \text{id}$ и

$$b_K(x, y) = \text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(x \cdot \tau(y)) \quad \text{для любых } x, y \in K.$$

(iv) Если выполнено (c), то либо K вполне вещественное поле и $\tau = \text{id}$, либо K — поле CM-типа и τ — комплексное сопряжение.

Обобщение классической конструкции

Зафиксируем инволютивный автоморфизм

$$\theta \in \text{Aut } K, \quad \theta^2 = \text{id}.$$

Тогда

$$\text{tr}_{K,\theta}: K \times K \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \text{tr}_{K,\theta}(x, y) := \text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(x \cdot \theta(y))$$

— невырожденная симметрическая билинейная форма и
для любого ненулевого идеала I в $\mathcal{O}$ пара

$$(I, \text{tr}_{K,\theta}) := (I, \text{tr}_{K,\theta}|_{I \times I})$$

является решёткой ранга n .

Конструкция решёток в числовых полях

Дальнейшее обобщение

Пусть J — ненулевой (дробный) идеал поля K и $a \in K$ — такой ненулевой элемент, что $\theta(a) = a$, $\text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(ax \cdot \theta(y)) \in \mathbb{Z}$ для всех $x, y \in J$. Пусть

$$\text{tr}_{K,\theta,J,a}: J \times J \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \text{tr}_{K,\theta,J,a}(x, y) := \text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(ax \cdot \theta(y)).$$

Тогда $(J, \text{tr}_{K,\theta,J,a})$ — решётка.

Истоки этой конструкции по существу восходят к Гауссу:

при $n = 2$ и $a = 1/\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(J)$ она даёт классическое соответствие между идеалами и квадратичными бинарными формами, установленное Гауссом.

Замечательные решётки вида $(J, \text{tr}_{K,\theta,J,a})$

Некоторые замечательные решётки изометричны решёткам вида $(J, \text{tr}_{K,\theta,J,a})$.

Примеры, в которых K является d -м круговым полем

- (1) Корневые решётки $\mathbb{A}_{p-1}$ с нечётным простым p для $d = p$ (Ebeling).
- (2) Корневые решётки $\mathbb{E}_6$ и $\mathbb{E}_8$, для $d = 9$ и, соответственно, $d = 15, 20, 24$ (Bayer-Fluckiger).
- (3) Решетка Коксетера–Тодда для $d = 21$ (Bayer-Fluckiger, Martinet).
- (4) Решетка Лича для $d = 35, 39, 52, 56, 84$ (Bayer-Fluckiger, Quebbemann).
- (5) Известна классификация корневых решёток, изометричных решёткам вида $(J, \text{tr}_{K,\theta,J,a})$ (Bayer-Fluckiger, Martinet).

Проблемы

- (1) Дана решётка (L, b) . Выяснить изометрична ли она решётке вида $(J, \text{tr}_{K, \theta, J, a})$ для подходящих K, θ, J, a .
- (2) Даны решётка (L, b) , поле K и его ненулевой идеал J . Выяснить существуют ли такие θ и a , что решётки $(J, \text{tr}_{K, \theta, J, a})$ и (L, b) изометричны.

Среди всех ненулевых идеалов поля K имеется один естественно выделенный, а именно, $\mathcal{O}$. Для него имеется одно естественно выделенное значение $a = 1$, подходящие для любого автоморфизма θ .

Это приводит к проблеме нахождения замечательных решёток, изометричных (или, более общо, подобных) решёткам вида $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$. Далее она рассматривается для корневых решёток:

Проблемы

(R) Классифицировать такие пары K, θ , для которых $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ является корневой решёткой.

(S) Обобщение: классифицировать такие пары K, θ , для которых $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна корневой решётке.

Следующие примеры показывают, что пары K, θ с указанными свойствами действительно существуют.

Примеры корневых решёток вида $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$

Пример

Пусть $n = 1$.

Тогда $K = \mathbb{Q}$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$, $\theta = \text{id}$ и $\text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(x) = x$ для любого $x \in K$. Значит, в этом случае $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ является корневой решёткой $\mathbb{Z}^1$ (которая подобна, но не изометрична решётке $\mathbb{A}_1$).

Примеры корневых решёток вида $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$

Пример

Пусть $n = 2$ и K является 3-м круговым полем: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Пусть θ — комплексное сопряжение σ . Тогда $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$, где $\omega = (1 + \sqrt{-3})/2$, и

$$\text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(x) = x + \theta(x) = 2\text{Re}(x) \text{ для любого } x \in K.$$

Значит, $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ — корневая решётка, изометричная $\mathbb{A}_2$.

Примеры корневых решёток вида $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$

Пример

Пусть $n = 2$ и K является 4-м круговым полем: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Пусть θ — комплексное сопряжение. Тогда $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$ и

$$\text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(x) = x + \theta(x) = 2\text{Re}(x) \text{ для любого } x \in K.$$

Значит, $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ — корневая решётка, изометричная $\mathbb{A}_1^2$.

Классификация корневых решёток вида $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$

Решение проблемы (R):

Теорема

Следующие свойства пары K, θ эквивалентны:

- (a) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ — *корневая решётка;*
- (b) K, θ — *одна из следующих пар:*
 - (b₁) $K = \mathbb{Q}, \theta = \text{id};$
 - (b₂) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \theta$ — *комплексное сопряжение;*
 - (b₃) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \theta$ — *комплексное сопряжение.*

Проблема (S)

Рассмотрим теперь проблему (S) о классификации решёток $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K/\theta})$, подобных корневой решётке. Их оказывается гораздо больше, чем решёток $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K/\theta})$, являющихся корневыми.

Обозначение:

m — единственное положительное число из $\mathbb{Z}$, для которого

$$\text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{O}) = m\mathbb{Z}$$

(такое m существует, т. к. $\text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{Z}$ — ненулевой гомоморфизм аддитивных групп).

Классификация решёток $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобных корневым решёткам несмешанного типа I

Теорема

Следующие свойства пары K, θ эквивалентны:

- (a) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна $\mathbb{Z}^n$;
- (b) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна $\mathbb{A}_1^n$;
- (c) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична $\mathbb{Z}^n$;
- (d) $(\mathcal{O}, 2\text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична $\mathbb{A}_1^n$;
- (e) K является 2^a -м круговым полем, где $a \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, а θ —комплексное сопряжение, если $a > 1$, и $\theta = \text{id}$, если $a = 1$.

Если эти свойства выполнены, то $n = 2^{a-1}$ и $m = n$.

В (e), пусть $\zeta_{2^a} \in K$ —примитивный корень из единицы степени 2^a . Обозначим $x_j := \zeta_{2^a}^j$. Тогда множество всех неразложимых компонент корневой решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ совпадает с множеством всех ее подрешёток $\mathbb{Z}x_j$, $0 \leq j \leq 2^{a-1} - 1$. Для каждого j , значение $\text{tr}_{K,\theta}/m$ на (x_j, x_j) равно 1.

Классификация решёток $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобных корневым решёткам несмешанного типа II

Теорема

Следующие свойства пары K, θ эквивалентны:

- (a) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна чётной примитивной корневой решётке.
- (b) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ — чётная примитивная корневая решётка.
- (c) n чётно и $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична $\mathbb{A}_2^{n/2}$.
- (d) K является $2^a 3^b$ -м круговым полем, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $b > 0$, а θ — комплексное сопряжение.

Если эти свойства выполнены, то $n = 2^a 3^{b-1}$ и $m = n/2$.

В (d), пусть ζ_{2^a} и $\zeta_{3^b} \in K$ — примитивные корни из единицы степеней 2^a и 3^b соответственно. Обозначим $x_{i,j} := \zeta_{2^a}^i \zeta_{3^b}^j$.

Тогда множество всех неразложимых компонент корневой решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ совпадает с множеством всех ее подрешёток $\mathbb{Z}x_{i,j} + \mathbb{Z}x_{i,j+3^{b-1}}$, $0 \leq i \leq 2^{a-1} - 1$, $0 \leq j \leq 3^{b-1} - 1$. Для всех i, j значения $\text{tr}_{K,\theta}/m$ на $(x_{i,j}, x_{i,j})$, $(x_{i,j+3^{b-1}}, x_{i,j+3^{b-1}})$ и $(x_{i,j}, x_{i,j+3^{b-1}})$ равны 2, 2 и -1 соответственно.

Приложение: $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ и решётка Лича

Поскольку $\mathbb{E}_8$ — единственная (с точностью до изометрии) положительно определённая чётная унимодулярная решётка ранга 8, в качестве следствия их предыдущей теоремы получается

Теорема

Не существует решёток $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобных решётке Лича.

Приложение: $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ и положительно определенные чётные унимодулярные решётки

На самом деле мы получаем более общий результат:

Теорема

Никакая положительно определенная чётная унимодулярная решётка ранга ≤ 48 не является подобной решётке вида $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$.

Эта теорема показывает, что существует очень много решёток, не подобных решёткам вида $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$. Действительно, если $\Phi(r)$ —число попарно не изометричных положительно определённых чётных унимодулярных решёток ранга r , то $\Phi(8) = 1$, $\Phi(16) = 2$, $\Phi(24) = 24$, $\Phi(32) \geq 10^7$, $\Phi(48) \geq 10^{51}$.

Решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобные корневым решёткам смешанного типа

Обозначение:

μ_K —(циклическая) группа всех корней из единицы в поле K .

$\oplus$ обозначает ортогональную прямую сумму решёток.

Ограничения на решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобные корневым решёткам смешанного типа

Теорема

Если $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна корневой решётке смешанного типа, то

- (a) $m = n > 1$;
- (b) все простые делители числа n разветвлены в расширении $K/\mathbb{Q}$ и, если простое $p \in \mathbb{Z}$ разветвлено в $K/\mathbb{Q}$, то $p \leq n$;
- (c) дискриминант расширения $K/\mathbb{Q}$ делится на n^n ;
- (d) $|\mu_K| = 2^a$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$, $a > 0$; число 2^{a-1} делит n , но не равно ему;
- (e) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична решётке корней $\mathbb{Z}^{2^{a-1}} \oplus L$, где L — ненулевая чётная решётка корней делящегося на 2^{a-1} ранга, а $\mu_K = \{x \in \mathcal{O} \mid (\text{tr}_{K,\theta}/m)(x, x) = 1\}$;

Квадратичные поля K с решёткой $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобной корневой решётке смешанного типа

Теорема

Если K — квадратичное (т.е. $n = 2$) поле, то следующие два свойства пары K, θ эквивалентны:

- (a) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна решётке корней смешанного типа;
- (b) либо K изоморфно $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\theta = \text{id}$, либо K изоморфно $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ и θ — комплексное сопряжение.

Если свойства (a), (b) выполнены, то $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/2)$ изометрична корневой решётке $\mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{A}_1$.

Кубические поля K с решёткой $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобной корневой решётке смешанного типа

Теорема

Если K — кубическое (т.е. $n = 3$) вполне вещественное поле и $\theta = \text{id}$, то следующие свойства пары K, θ эквивалентны:

- (a) $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна корневой решётке смешанного типа;
- (b) K — максимальное вполне вещественное подполе 9-го кругового поля.

Если свойства (a), (b) выполнены, то $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/3)$ изометрична корневой решётке $\mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{A}_2$.

Решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобные корневым решёткам смешанного типа: примеры

Следующая группа примеров дает бесконечные серии пар K, θ , для которых $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$ подобна корневой решётке смешанного типа.

Основой конструкции являются круговые поля $\mathbb{Q}(\zeta_d)$, где ζ_d — примитивный корень степени d из единицы, и их максимальные вполне вещественные подполя

$$\mathbb{Q}(\zeta_d)^+ := \mathbb{Q}(\zeta_d + \zeta_d^{-1}).$$

Решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобные корневым решёткам смешанного типа: примеры

Пример

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $a > 2$, а

$$K = \mathbb{Q}(\zeta_{2^a})^+, \quad \theta = \text{id}.$$

Тогда

$$m = n = 2^{a-2}, \quad \text{а}$$

$(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична корневой решётке $\mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{A}_1^{2^{a-2}-1}$.

Решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобные корневым решёткам смешанного типа: примеры

Пример

Пусть $b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$, а

$$K = \mathbb{Q}(\zeta_{3^b})^+, \quad \theta = \text{id}.$$

Тогда

$$m = n = 3^{b-1} \quad \text{а}$$

$(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична корневой решётке $\mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{A}_2^{(3^{b-1}-1)/2}$.

Решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобные корневым решёткам смешанного типа: примеры

Пример

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $a > 2$, а

$$K = \mathbb{Q}(\zeta_{2^a} - \zeta_{2^a}^{-1}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{2^a}),$$

θ — комплексное сопряжение

(поле K является чисто мнимым квадратичным расширением вполне вещественного поля $\mathbb{Q}(\zeta_{2^{a-1}})^+$). Тогда

$$m = n = 2^{a-2}, \quad \text{а}$$

$(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична корневой решётке $\mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{A}_1^{2^{a-2}-1}$.

Решётки $(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta})$, подобные корневым решёткам смешанного типа: примеры

Пример

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > 1$, $b > 1$, а

$$K = \mathbb{Q}(\zeta_{2^a}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{3^b})^+ = \mathbb{Q}(\zeta_{2^a}(\zeta_{3^b} + \zeta_{3^b}^{-1})) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{2^a 3^b}),$$

θ — комплексное сопряжение.

Тогда

$$m = n = 2^{a-1} 3^{b-1} \quad \text{и}$$

$(\mathcal{O}, \text{tr}_{K,\theta}/m)$ изометрична корневой решётке $\mathbb{Z}^{2^{a-1}} \oplus \mathbb{A}_2^{2^{a-2}(3^{b-1}-1)}$.