# Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры

А.А.Рахимов и М.Э.Нуриллаев

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами

Декабрь 24, 2020

# Оглавление

1. Введение и предварительные сведения
2. История задачи
3. Максимальные инъективные W*-подалгебры
4. Основные результаты
5. ЛИТЕРАТУРА

# C*- и W*-алгебры.

Банахова *-алгебра $A$ над полем $\mathbb{C}$ называется *C*-алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$, для любого $a \in A$. C*-алгебра $M$ называется *W*-алгеброй*, если существует банахово пространство $M_*$ такое, что $(M_*)^* = M$. Пусть $M \subset B(H)$ - *-подалгебра. Подмножество $M' = \{a \in B(H) : ab = ba, \forall b \in M\}$ называется *коммутантом* алгебры $M$. Легко видеть, что $M \subset M'' = M^{(iv)} = \ldots$ и $M' = M''' = M^{(v)} = \ldots$, где $M'' = (M')'$. При этом, если $M = M''$, то $M$ называется *алгеброй фон Неймана*. Известно (теорема о бикоммутанте), что

$$M = M'' \;\Leftrightarrow\; M \text{ - W*-алгебра} \;\Leftrightarrow\; M \text{ - слабо замкнута и } \mathbf{1} \in M.$$

В классических работах Мюррея и фон Неймана получена первичная классификация факторов (W*-алгебр с тривиальным центром), согласно которой факторы распределяется по типам $\mathrm{I}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\mathrm{II}_1$, $\mathrm{II}_\infty$ и III. Факторы типа $\mathrm{I}_n$ были полностью классифицированы с самого начала: это алгебра всех операторов в гильбертовом пространстве размерности $n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$.

# Инъективные W*-алгебры.

Исследуя классификацию факторов типа $\mathrm{II}_1$, фон Нейману удалось построить два неизоморфных фактора типа $\mathrm{II}_1$. Позже были построены сначала конечное (Диксмье и Ланс), а затем, счетное (Сакаи) и континуальное (Мак Дуфф) семейства попарно неизоморфных факторов типа $\mathrm{II}_1$.

Поэтому изучали некоторые специальные случаи, например: инъективные W*-алгебры. $M$ называется *инъективной* (в смысле Хакеда-Томиямы, 1967), если существует проекция $P$ из $B(H)$ на $M$ с $\|P\| = 1$, $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Это эквивалентно тому, что $M$ гиперфинитен, т.е. существует возрастающая последовательность $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конечномерных W*-подалгебр $M$, содержащих единицу $\mathbf{1}$, такая, что $\cup_n M_n$ слабо плотно в $M$. Доказана единственность инъективного фактора типа $\mathrm{II}_1$ (соотв. $\mathrm{II}_\infty$, $\mathrm{III}_\lambda$, $\lambda \neq 0$, А.Конн, У.Хаагеруп).

Что касается неинъективных факторов, они пока особо не изучены. Однако, наиболее интересным является изучение максимальных инъективных W*-подалгебр (или подфакторов) неинъективных W*-алгебр.

# Вещественные W*-алгебры.

1960-е годы были рассмотрены йордановы (неассоциативные вещественные) аналоги алгебр фон Неймана – JW-алгебры, т.е. вещественные линейные пространства самосопряженных операторов из алгебры $B(H)$, которые содержат $\mathbf{1}$, замкнуты относительно йорданова умножения $a \circ b = (ab + ba)/2$ и замкнуты в слабой операторной топологии.

Оказывается изучения этих алгебр в существенном редуцируются к изучению комплексных и вещественных алгебр фон Неймана. Поэтому, параллельно с теорией W*-алгебр началось исследование теории вещественных W*-алгебр. Напомним, что $R \subset B(H)$ - вещественная *-подалгебра называется *вещественной W*-алгеброй*, если она слабо замкнута, $\mathbf{1} \in R$ и $R \cap iR = \{0\}$. Простым примером (некоммутативной) вещественной W*-алгебры является алгебры $M_n(\mathbb{R})$ и $M_n(\mathbb{H})$ - всех вещественных и кватернионных $n \times n$ - матриц, соответственно, относительно обычных алгебраических операций. В последние годы, теория вещественных W*-алгебр получила значительное развитие.

**Теорема 1.** Вещественная W*-алгебра $R$ является инъективной тогда и только тогда, когда её обертывающая W*-алгебра $R + iR$ – инъективна.

# Вещественные инъективные W*-алгебры.

Доказана единственность инъективного вещественного фактора типа $\mathrm{II}_1$ (соотв. $\mathrm{II}_\infty$, $\mathrm{III}_1$); существуют в точностью два инъективных вещественных факторов типа $\mathrm{III}_\lambda$, $0 < \lambda < 0$; что касается для типа $\mathrm{III}_0$, для любого число $n$ существуют в точностью $n$ классов изоморфности инъективных вещественных факторов типа $\mathrm{III}_0$, у которых обертывающие W*-факторы изоморфны.

Как видим, что инъективные (комплексные или вещественные) W*-алгебры, в частности, факторы изучены достаточно хорошо. С другой стороны, в произвольном случае, т.е. в не инъективном случае, исследовать (с точностью до изоморфизма) W*-алгебры, довольно трудно, в частности, как уже сказано, что существует континуум попарно не изоморфных не инъективных факторов типа $\mathrm{II}_1$. Поэтому, представляется интересным изучать максимальные инъективные W*-подалгебры и подфакторы. Есть и другие причины.

# Относительный коммутант и бикоммутант.

Рассмотрим *-подалгебры: $M \subset N \subsetneq B(H)$, в частности, $N$ – W*-алгебра. Легко видеть, что $M'_N \subset M'_{B(H)} = M'$, но, для бикоммутанта, в общем случае имеем:

$$M''_N \not\subset M''_{B(H)} \text{ и } M''_{B(H)} \not\subset M''_N.$$

Поэтому: $M = M'' = M''_{B(H)} \not\Leftrightarrow M = M''_N$, т.е.

$$M \text{ – W*-алгебра } \not\Leftrightarrow M = M''_N.$$

Представляет интерес нахождение условия, при которых выполняется равенство: $M = M''_N$. Оказывается достаточным условием выполнение равенство является неприводимость W*-подалгебры $M$, т.е. $M' \cap N = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

С другой стороны, при исследовании неприводимости W*-подалгебры выясняется, что если $M \subset N$ – факторы и существует абелева W*-подалгебра $B \subset M$, являющаяся максимальной абелевой W*-подалгеброй $N$, тогда $M$ – неприводима:

$$M' \cap N \subset B' \cap N \overset{Bmax}{=} B \cap N = B \subset M \overset{Mfactor}{\Rightarrow} M' \cap N = \mathbb{C}\mathbf{1}$$

Следовательно $M = M''_N$, т.е. верно аналог теоремы о бикоммутанте.

# Неприводимые W*-подалгебры.

В связи с этим, в 1967 году в городе Батон-Руж (США) на международной математической конференции Р.Кадисон на своем докладе на тему: «Проблемы алгебр фон Неймана» сформулировал следующий вопрос (Problem 11):

*если $M$ – неприводимый подфактор фактора $N$, то существует ли абелева W*-подалгебра $B \subset M$, которая является максимальной абелевой W*-подалгеброй фактора $N$?*

В 1981 году Сорин Попа решил эту проблему в частном случае: If $N$ is a separable factor and let $M \subset N$ be a semifinite subfactor such that $M' \cap N = \mathbb{C}\mathbf{1}$ and such that there exists a normal conditional expectation of $N$ onto $M$, then ... (Popa Sorin, On a problem of R.V. Kadison on maximal abelian *-subalgebras in factors. // Invent, Math. 1981, 65, P. 269-281)

Эта проблема до сих пор не решена в общем случае. В этом конференции Р.Кадисон сформулировал гипотезу, о том, что всякая сепарабельная абелева W*-подалгебра фактора содержится в некотором гиперфинитном подфакторе. Однако, предположение Кадисона оказалось неверным (в 1983 году С.Попа построил контрпример).

# Максимальные инъективные W*-подалгебры.

## Определение.

W*-подалгебра $M \subset N$ называется *максимальной инъективной* подалгеброй в $N$, если она инъективна и максимальна, т.е. не существует другой инъективной W*-подалгебры $N$, содержащей $M$.

Всякая W*-алгебра $N$ имеет, по крайне мере одну максимальную инъективную W*-подалгебру. Заметим также, что максимальность инъективной W*-подалгебры и максимальность инъективного (гиперфинитного) подфактора не связаны друг с другом, т.е. одно не влечёт другое.

С самого начала, Мюррей и фон Нейман предполагали, что всякий сепарабельный фактор типа $II_1$ содержит гиперфинитный (инъективный) подфактор как максимальную инъективную W*-подалгебру. Этот результат доказал С.Попа (1983г.). Без условия сепарабельности доказал Ж.Фанг (2007г.).

## Максимальные инъективные W*-подалгебры.

С другой стороны, оказывается, максимальность инъективной W*-подалгебры связана с неприводимостью подалгебры. Именно: в 2007 году Ж.Фанг показал, что если $M$ – максимальный гиперфинитный подфактор фактора $N$, то $M$ – максимальная инъективная W*-подалгебра тогда и только тогда, когда $M$ – неприводима, т.е. $M' \cap N = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Таким образом, хронологически имеем:

теорема о бикоммутанте $\leftrightarrow$ неприводимость

$\leftrightarrow$ максимальный инъективность

# Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

## Теорема 2.

Пусть $R$ – вещественная W*-алгебра и $Q \subset R$ – вещественная W*-подалгебра. Если $Q + iQ$ – максимальная инъективная W*-подалгебра $R + iR$, тогда $Q$ – максимальная инъективная в $R$.

Справедливость обратное утверждение остается открытым. Возможно, максимальная инъективность $Q$ не влечет максимальная инъективность $Q + iQ$.

## Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

Получен вещественный аналог теоремы Ж.Фанга, который является решением проблемы Мюррея и фон Неймана для вещественных факторов.

### Теорема 3.

Пусть $R$ – вещественный фактор и пусть $Q$ – максимальный инъективный вещественный подфактор $R$. Алгебра $Q$ является максимальной инъективной вещественной W*-подалгеброй в $R$ тогда и только тогда, когда алгебра $Q$ – неприводима в $R$, т.е. $Q' \cap R = \mathbb{R}\mathbf{1}$.

Следующая теорема есть вещественный аналог теоремы Ге-Кадисона, называемый «теоремой о расщеплении».

### Теорема 4.

Если $R_1$ – конечный вещественный фактор, $R_2$ – конечная вещественная W*-алгебра и $R$ – вещественная W*-подалгебра $R_1 \overline{\otimes} R_2$, содержащая $R_1 \overline{\otimes} \mathbb{R}\mathbf{1}$, тогда существует некоторая вещественная W*-подалгебра $Q_2 \subset R_2$ такая, что $R = R_1 \overline{\otimes} Q_2$: $\quad R_1 \overline{\otimes} \mathbb{R}\mathbf{1} \subset R \subset R_1 \overline{\otimes} R_2 \Rightarrow R = R_1 \overline{\otimes} Q_2$.

## Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

Рассмотрим следующую задачу, которую, в комплексном случае, сформулировал С.Попа:

*если $R_1$, $R_2$ – вещественные W*-алгебры, $Q_1$ и $Q_2$ – соответственно их максимальные инъективные W*-подалгебры, то будет ли максимальной инъективной подалгеброй алгебра $Q_1\overline{\otimes}Q_2$ в алгебре $R_1\overline{\otimes}R_2$?*

В общем случае эта проблема остается открытым. Скорее всего, она неверна в общем случае. Задача, как в комплексном случае, так и в вещественном случае решена в некоторых частных случаях.

Случай 1, $Q_1 = R_1$ и $R_2$ - сепарабельна.

### Теорема 5.

Пусть $R_1$ – инъективная вещественная W*-алгебра и $R_2$ – сепарабельная вещественная W*-алгебра. Если $Q_2$ – максимальная инъективная вещественная W*-подалгебра $R_2$, то $R_1\overline{\otimes}Q_2$ – максимальная инъективная вещественная W*-подалгебра $R_1\overline{\otimes}R_2$.

## Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

Случай 2, $Q_1$ - фактор и $R_1$ - сепарабельна.

### Теорема 6.

Пусть $R_i(\subset B(H_i))$ – вещественная W*-алгебра, $Q_i$ – максимальная инъективная вещественная W*-подалгебра $R_i$ $(i = 1, 2)$. Если $R_1$ – сепарабельна и $Q_1$ – вещественный фактор, то $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ является максимальной инъективной вещественной W*-подалгеброй $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

Пусть $R \subset B(H)$ – вещественная W*-алгебра. Ясно, что если $Q$ – максимальная инъективная вещественная W*-подалгебра $R$, тогда $Q'$ является минимальной инъективной вещественной W*-алгеброй, содержащей алгебру $R'$. Поэтому для любой такой алгебры всегда существует как максимальная инъективная вещественная W*-подалгебра, так и минимальное инъективное W*-расширение.

## Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

Случай 3. $R_1$ - сепарабельна и центр алгебры $Q_1$ – атомический. Напомним, что алгебра фон Неймана называется *атомической*, если каждый ненулевой проектор алгебры мажорирует ненулевой минимальный проектор (атом), т.е. под каждым ненулевым проектором имеется атом.
Сформулируем вспомогательный результат, который сам по себя является интересным.

### Теорема 7.

Пусть $Q$ – вещественная W*-алгебра и $R$ – минимальная инъективная вещественная W*-алгебра, содержащая $Q$. Если $\theta$ – *-автоморфизм алгебры $R$ такой, что $\theta(x) = x$, $\forall x \in Q$, тогда $\theta(y) = y$, $\forall y \in R$.
То есть если *-автоморфизм является тождественным на вещественной W*-алгебре, то он является тождественным и на минимальном инъективном расширении.

## Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

### Теорема 8.

Пусть $R_i (\subset B(H_i))$ – вещественная W* -алгебра и $Q_i$ – максимальная инъективная вещественная W*-подалгебра $R_i$ $(i = 1, 2)$. Если $R_1$ сепарабельна и центр $Q_1$ – атомический, тогда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ является максимальным инъективным в $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

## Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

Случай 4. $R_1$, $R_2$ – факторы.

### Теорема 9.

Пусть $R_i(\subset B(H_i))$ – вещественный фактор, и $Q_i$ – максимальный инъективный вещественный подфактор $R_i$ $(i = 1, 2)$. Если $Q_1' \cap R_1 \cong \mathbb{R}^N$ $(1 \leq N \leq \infty)$ и $Q_2' \cap R_2 = \mathbb{R}\mathbf{1}$, тогда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ – максимальный инъективный вещественный подфактор $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

### Следствие 1.

Пусть $R_i$ – вещественный фактор, $Q_i$ – неприводимый максимальный инъективный вещественный подфактор $R_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ – неприводимый максимальный инъективный вещественный подфактор $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

## Максимальные инъективные вещественные W*-подалгебры.

В доказательстве некоторых теорем используются схемы доказательств соответствующих теорем в комплексном случае, а некоторые теоремы доказываются, используя метод перехода обертывающей W*-алгебры. Для перехода обертывающей W*-алгебры во многих случаях используются следующая теорема, которая доказана нами

### Теорема *.

Пусть $R$ и $Q$ – вещественные W*-алгебры, $\mathcal{U}(R) = R + iR$ и $\mathcal{U}(Q) = Q + iQ$ – их обертывающие W*-алгебры, соответственно. Тогда

$$\mathcal{U}(R\overline{\otimes}Q) = \mathcal{U}(R)\overline{\otimes}\mathcal{U}(Q), \text{ т.е. } (R + iR)\overline{\otimes}(Q + iQ) = R\overline{\otimes}Q + i(R\overline{\otimes}Q).$$

### Замечание.

Напомним, что йордановый аналог теоремы доказан в работе [Jamjoom F,1995].

## Максимальные инъективные W*-подалгебры.

Изложенные результаты с подробными доказательствами отправлена в журнал «Математические Труды» (с последующей публикацией в «Siberian Advances in Mathematics»). В данный момент работа находится в рецензии.

1. Popa S. A short proof of "injectivity implies hyperfiniteness" for finite von Neumann algebras. // J. Operator Theory, Vol. 16, 1986, P. 261-272.
2. Popa S., Maximal injective subalgebras in factors associated with free groups. // Adv.Math., 1983, 50, P. 27-48.
3. Popa S., On a problem of R.V. Kadison on maximal abelian *-subalgebras in factors. // Invent, Math. 1981, 65, P. 269-281.
4. Fang J. On maximal injective subalgebras of tensor products of von Neumann algebras. // Journal of Functional Analysis, 2007, Vol. 244, P. 277-288.
5. Fuglede B., Kadison R.V. On a conjecture of Murray and von Neumann. // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 1951, 37(7), P. 420-425.
6. Gao M. On maximal injective subalgebras. // Proceedings of the American mathematicle society, 2010, Vol.138, N. 6, P. 2065-2070.
7. Ge L. On maximal injective subalgebras of factors. // Advances in mahtematics, 1996, Vol. 118, P. 34-70.

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!**