Математическая «археология»: Задачи первой советской олимпиады школьников по математике

Д.ФОМИН

НА ПРОТЯЖЕНИИ МНОГИХ ЛЕТ всем, кто когда-либо интересовался задачами Ленинградских математических олимпиад (ЛМО), было хорошо известно, что варианты первых ЛМО пропали во время войны и блокады или попросту не были сохранены. Да и в первые послевоенные годы эта печальная судьба не обошла северную столицу – пожалуй, только задачи олимпиад второй половины 1950-х годов удалось найти в более или менее полных вариантах (да и то не для каждого года и не для каждого класса).

С одной стороны, это можно понять. Вполне вероятно, что в те годы эти новомодные соревнования не воспринимались как нечто заслуживавшее особого внимания. Тем более, что разные революционные (в полном смысле этого слова) инициативы в образовании сваливались на головы учителей и школьников буквально каждый день. Зачастую не проходило и квартала или двух, как все отменялось, приходили новые министры, директора и другие руководящие энтузиасты, которые изобретали и внедряли совершенно другие способы обучения, новаторские идеи по выявлению молодых дарований, подъему социалистической науки на небывалый уровень и так далее. Не исключено, что многие профессора-организаторы олимпиады не считали нужным хранить все эти многочисленные списки задач, которые – чего уж тут греха таить – поначалу почти ничем особенно и не отличались от обыденных задач школьной программы.

С другой стороны, надо отметить, что в те годы и в Ленинграде и в Москве нашлись энтузиасты, которые уже тогда интуитивно понимали, как важно сохранить для истории эти первые олимпиадные задачи, материалы первых кружков. Они аккуратно сберегали эти тексты в своих архивах, а затем публиковали первые статьи и сборники задач, посвященные математическим соревнованиям. Среди москвичей здесь в первую очередь стоит упомянуть Ростислава Николаевича Бончковского (1905–1942) и Иоасафа Ивановича Чистякова (1870–1942).

Что касается Ленинграда, то известно, например, что руководители кружков Дворца пионеров Михаил Львович Вержбинский (1909–1962) и Марк Константинович Гаврилин (1911–1992) бережно собирали комплекты олимпиадных задач и материалы занятий со школьниками (см. [7]). Но затем они ушли на фронт, а уж что приключилось с их архивами, теперь, наверное, никому не известно. Дочка М.Л.Вержбинского написала в своих воспоминаниях об отце, что во время блокадных зим из-за нехватки дров на растопку порубили хранившуюся в их квартире уникальную мебель фирмы «Чиппендейл». Что уж тут

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200703

говорить о каких-то бумажках с никому не нужными формулами. В 1941 году Ленинградский университет был эвакуирован в Елабугу, а потом в Саратов; многие профессора, аспиранты и студенты ушли на фронт, их записи и архивы пропали – или в блокадном Ленинграде, или во время многочисленных переездов.

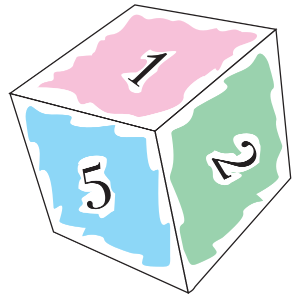
Когда в конце 1980-х годов я попытался разыскать задачи олимпиад тех далеких довоенных лет, то всеобщий консенсус был таков – «это безнадежно». Да и результаты моих раскопок в Государственной публичной библиотеке (ныне Российская национальная библиотека), в документах и отчетах Дворца пионеров и в более чем тридцати личных архивах привели меня к тому же печальному выводу. В первом издании сборника Ленинградских математических олимпиад ([6]) я примерно так и написал, что, мол, найти задачи довоенных олимпиад представляется крайне маловероятным, реальных шансов на это нет.

Тут необходимо упомянуть, что в 1984 году, к пятидесятилетию первой олимпиады, в журнале «Математика в школе» была опубликована любопытная статья Н.М.Матвеева и С.Е.Рукшина [5], в которой авторы, в частности, цитировали воспоминания С.В.Валландера[1], а затем сообщали нам, что «история сохранила первую задачу первой олимпиады». При этом в статье отсутствовала точная атрибуция этого утверждения.

Вот условие приведенной там задачи:

Задача про кубик. *Сколько существует различных способов раскрасить грани кубика шестью цветами? (Два способа раскраски называются различными, если их нельзя совместить поворотом кубика.)*

Когда я прочитал этот текст вскоре после его публикации, то моя первая реакция была – какой приятный сюрприз! Мало того, что удалось найти задачу первой ЛМО, так еще и задачка-то сама весьма



симпатичная и не стандартная, совершенно не похожая на подавляющее большинство других задач математических соревнований тех лет, которые выглядят так, как будто их только что переписали из школьного учебника.

Полюбовавшись на задачу, я немного призадумался, поскольку у меня возникло ощущение, что где-то я ее уже видел. И в самом деле, открыв сборник [3], я тут же обнаружил эту задачу... в варианте первой Московской математической олимпиады 1935 года.

Могли ли москвичи использовать задачу с ленинградской олимпиады предыдущего года? Нечего даже и говорить, что в наше время это было бы абсолютно невозможно. Но тогда, в эпоху самых первых математических соревнований, во времена, когда скорость распространения узкоспециализированной технической информации была крайне невелика, подобные вопросы, конечно же, не воспринимались столь серьезно. Трудно было утверждать что-либо наверняка, хотя мне и показалось, что это (т.е. повторное использование уже опубликованной задачи) все же маловероятно – если даже и допустить, что москвичам так понравилась эта задача, что им без нее никак было не обойтись, то вполне достаточно было бы слегка видоизменить ее условие; сделать это было бы совсем несложно. Поэтому у меня возникла – впрочем, ни на чем не основанная – гипотеза, что за давностью лет произошло этакое непроизвольное «наложение» варианта ММО-1935 на воспоминания об ЛМО-1934.

В кратких воспоминаниях другой участницы первой олимпиады М.Л.Александровой ([4]) приводились некоторые дан-

[1] Сергей Васильевич Валландер – победитель первой ЛМО, в будущем доктор физ.-мат. наук, член-корр. АН СССР, декан математико-механического факультета ЛГУ в 1965–1973 гг.

ные про организацию самого соревнования, но, увы, задач олимпиады она не помнила.

Ясно было, что однозначно разрешить это небольшое и, вообще говоря, не очень существенное разночтение не представлялось возможным. Оставалось только надеяться, что когда наши отдаленные потомки изобретут машину времени, то один из них посетит Ленинград весной 1934 года, и тогда благодарное человечество наконец-то получит в свое распоряжение полный список задач первой в мировой истории городской математической олимпиады.

Однако, почти тридцать лет спустя, при подготовке переиздания сборника ЛМО я предпринял дополнительные поиски в интернете – в основном с целью разыскать какие-либо фотографии тех лет. И довольно скоро (в январе 2020 года), почти по чистой случайности, я натолкнулся на выпуск сборника «Математическое просвещение», изданного в Москве в 1935 году. В этой книжке была опубликована статья И.И.Чистякова [2] под длинным официозным названием «Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А.С.Бубнова». Нечего и говорить, что я был приятно ошеломлен и обрадован.

Во-первых, Чистяков указывал точную дату олимпиады (среда, 18 апреля).

Во-вторых, он более подробно описал схему организации олимпиады, а также сообщил, сколько именно школьников приняло участие во втором и третьем (заключительном) туре – 307 и 48 человек соответственно.

В-третьих, и это было самое важное, в приложении к этой заметке были перечислены одиннадцать задач олимпиады. Впервые за много лет были найдены хотя бы некоторые задачи первой в СССР математической олимпиады!

Вопрос об атрибуции в статье был также полностью опущен, но в данном случае речь шла о работе, написанной по горячим следам только что прошедшего соревнования. Естественно было предположить, что либо сам автор статьи, либо редакция сборника получили список задач непосредственно от организаторов первой ЛМО – в частности, с января 1935 года главный «идеолог» Ленинградской олимпиады Борис Николаевич Делоне уже жил и работал в Москве (в связи с переездом туда Математического института Академии наук СССР).

К сожалению, в статье не было указано, какие именно из этих задач относятся к первому (тренировочному), второму или третьему туру олимпиады. Задача про раскраску кубика отсутствовала (что, однако, ничего не означало, ибо из текста явствовало, что приложение содержало лишь набор из нескольких избранных задач олимпиады).

Однако сам факт обнаружения этой заметки послужил для меня толчком к дальнейшим поискам. Не прошло и нескольких месяцев, как в середине мая 2020 года (хоть какой-то прок от печального короновирусного карантина), продолжая «блуждать» по просторам мировой сети, я обнаружил там копию журнала «Математика и физика в средней школе» (предшественника журнала «Математика в школе») за 1934 год, в котором была опубликована аналогичная статья того же автора [1]. Название этой статьи было более лапидарным («Итоги Ленинградской математической олимпиады»), и за исключением некоторых малосущественных деталей она практически не отличалась от статьи [2]. Однако в этой версии сразу за основным текстом следовало приложение, содержавшее комплект задач третьего тура ЛМО-1934!

В уже упомянутых выше воспоминаниях М.Л.Александрова написала, что каждый участник заключительного тура олимпиады получил две задачи – первая по алгебре, вторая по геометрии. Именно так и выглядит это приложение к статье [1] – оно состоит из восьми вариантов по две задачи. Необходимо указать, что по непонятной причине (не поместилась? потеряна? случайно пропущена при наборе?) отсутствует задача 5(а) – впрочем, не исключено, что эта задача содержится в списке из приложения к статье [2] – см. ниже задачи 1934.X, 1934.Y и 1934.Z.

Теоретически возможно, что это все еще не полный набор всех вариантов. Мне лично верится с трудом в то, что жюри приготовило по отдельному варианту для каждого из 48 участников, тем более что их количество не было заранее известно. Идея многовариантной олимпиады состояла в том, чтобы исключить возможность списывания – даже тогда, на самой первой олимпиаде, на это уже обращали внимание, что, впрочем, и не удивительно. Однако восьми вариантов вполне должно было хватать – Александрова вспоминает, что участников рассадили в несколько аудиторий Главного здания университета. Видимо, организаторы хотели гарантировать, чтобы в каждом помещении сидели школьники с разными вариантами условий – тогда такая организация проведения устного тура выглядит вполне разумно. Конечно, существует ненулевая вероятность того, что количество вариантов могло быть и больше, скажем десять или двенадцать. Но в таком случае, однако, было бы трудно объяснить, почему публикация не содержала полный комплект задач.

Что касается задачи о раскраске кубика, то нельзя полностью исключить, что она была включена в рассылавшийся по школам список тренировочных задач, на основе решения которых школы формировали свои «команды» на второй тур (этот школьный этап был вполне заслуженно назван первым туром ЛМО-1934). Такое предположение теоретически могло бы объяснить воспоминания одного из участников, что эта задача была самой первой задачей олимпиады. Я, однако, честно сознаюсь, что эта гипотеза не кажется мне правдоподобной. В статье [2] упомянуто, что список задач первого тура состоял из «90 задач из различных разделов алгебры, геометрии и тригонометрии»; кстати, многие из них также перечислены в приложении к этой статье под заголовком «Упражнения для учащихся», другой список тренировочных задач приведен в предыдущем выпуске (1934, №3) того же журнала «Математика и физика в средней школе»; ни одной нестандартной задачи в этих списках нет. Если же речь шла о втором туре олимпиады, то он, как и третий тур, был составлен по многовариантному методу, что опять-таки исключало возможность использования такой задачи. Не исключено, однако, что вопрос про кубик был одной из дополнительных задач, которые предлагались школьникам, решившим все задачи основного варианта.

Как бы то ни было, теперь мы можем с достаточно серьезным основанием заявить, что вопрос о задачах основных вариантов заключительного тура первой в истории городской математической олимпиады практически разрешен. Любители математических соревнований, наконец-то, могут ознакомиться со многими задачами Ленинградской математической олимпиады 1934 года. И кто знает, может быть, среди тех, кто читает эти строки, найдутся потомки ленинградских школьников, учителей, студентов или профессоров, в чьих давно забытых семейных архивах до сих пор хранятся задачи или фотографии с олимпиад других довоенных лет. Будем надеяться, что нам не придется ждать еще почти девяносто лет до следующей публикации, посвященной истории Ленинградских городских математических олимпиад. Впрочем, на худой конец, у нас всегда остается вариант с машиной времени.

* * *

А теперь – задачи третьего тура первой ЛМО (набор из восьми вариантов, перечисленных в статье [1]). В некоторых местах мною исправлены опечатки и заменена устаревшая терминология.

Третий тур. 10-й класс. 1934 год

1934.01. (а) Покажите, что если a, b, c – стороны треугольника, то корни уравнения

$$b^2x^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)x + c^2 = 0$$

будут мнимые[2].

(б) Треугольник скользит по своей плоскости так, что две его стороны все время

[2] Т.е. эти корни не могут быть вещественными числами.

проходят через две неподвижные точки. Покажите, что третья сторона сохраняет постоянное расстояние от третьей неподвижной точки.

1934.02. (а) Покажите, что если α и β – корни уравнения

$$x^2+px+1=0,$$

а γ и δ – корни уравнения

$$x^2+qx+1=0,$$

то

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

(б) Пересеките данную трехгранную пирамиду плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

1934.03. (а) Исключите θ и φ из уравнений

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m,$$
$$b\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi=n,$$
$$a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi.$$

(б) Две окружности пересекаются в точках A и B; через точку A проведена секущая окружностей в точках P и Q. Какую линию описывает середина M отрезка PQ, когда секущая вращается вокруг точки A?

1934.04. (а) Найдите

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}.$$

(б) Две касательные к кругу неподвижны, а третья катится по кругу. Докажите, что отрезок третьей касательной, заключенный между первыми двумя, виден из центра под постоянным углом.

1934.05. (б) Три грани трехгранного угла с взаимно перпендикулярными ребрами пересекают шар по трем кругам. Докажите, что сумма площадей этих кругов не изменится, если повернуть этот трехгранный угол вокруг его вершины так, чтобы его грани не перестали пересекать шар.

1934.06. (а) Решите систему уравнений

$$x^2=a+(y-z)^2,$$
$$y^2=b+(z-x)^2,$$
$$z^2=c+(x-y)^2.$$

(б) Покажите, что касательные к двум пересекающимся кругам, проведенные из произвольной точки на продолжении их общей хорды, равны между собой.

1934.07. (а) Докажите, что

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=$$
$$=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}.$$

(б) Докажите, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть среднее пропорциональное[3] между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных в концах этой хорды.

1934.08. (а) Докажите, что если $\sec\alpha\sec\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma$, то $\cos 2\gamma\le 0$.

(б) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке, делящей каждую из этих прямых в отношении 3 : 1.

* * *

Здесь же перечислим и те несколько задач из статьи [2], которые не вошли в предыдущий список, – по всей видимости, они были предложены на первых двух турах. Не исключено, что одна из них является пропущенной задачей 5 (а).

1934.X. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

при вещественных a, b и c не имеет мнимых[4] корней.

1934.Y. Найдите предел величины

$$\left(\cos\frac{a}{x}\right)^x,$$

[3] То же самое, что среднее геометрическое.

[4] Т.е. невещественных.

когда x неограниченно возрастает, принимая последовательно целые значения $x = 1$, 2, 3, … до бесконечности.

1934.Z. Докажите, что

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+p+1)!}.$$

* * *

Позволим себе несколько заключительных замечаний.

Во-первых, с более чем восьмидесятилетнего «расстояния» сразу видны определенные недостатки многовариантной олимпиады, особенно в ситуации, когда требовалось большое количество вариантов. Совершенно очевидно, что не все варианты ЛМО-1934 примерно равнозначны. Так, например, геометрическая задача первого варианта 1934.01(б), с нашей точки зрения, заметно сложнее, чем аналогичная задача шестого варианта. Аналогично, стереометрические задачи обычно сложнее для школьников, чем задачи по планиметрии. Нахождение предела в задаче 1934.04(а), скорее всего, вызывало у школьников большие трудности, нежели исключение переменных в 1934.03(а) или решение системы уравнений в 1934.06(а). Хотя никакой статистики у нас, увы, не имеется, но задача 1934.Y выглядит существенно более трудной для решения, нежели алгебраические задачи других вариантов.

Во-вторых, интересно обратить внимание на то, что школьникам, учившимся в старших классах обычных советских школ середины 1930-х годов, здесь предлагались задачи по вычислению пределов и решению уравнений в комплексных числах. Контраст с математической программой современной средней школы налицо.

С другой стороны, если опять обратиться к сборнику [3], то мы увидим, что в вариантах московских олимпиад тех лет нет никаких пределов, комплексных чисел и т.п. Эти темы довольно быстро пропадают и из ленинградских олимпиадных задач. Был ли это кратковременный и географически локализованный эксперимент? Судя по всему, в течение следующих лет школьные программы были постепенно стандартизованы по всей стране и несколько упрощены – из них постепенно исчезли и пределы и комплексные числа.

Литература

1. *И.И.Чистяков.* Итоги Ленинградской математической олимпиады. – «Математика и физика в средней школе», 1934, № 4 (М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1935).
2. *И.И.Чистяков.* Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А.С.Бубнова. – «Математическое просвещение», 1935, № 3 (М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935).
3. *А.А.Леман.* Сборник задач московских математических олимпиад. – М.: Просвещение, 1965.
4. *М.Л.Александрова.* Первая математическая олимпиада. – «Квант», 1984, № 9.
5. *С.Е.Рукшин, Н.М.Матвеев.* 50 лет математических олимпиад. – «Математика в школе», 1984, № 4.
6. *Д.В.Фомин.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994.
7. *С.Е.Рукшин.* Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге. Первые 50 лет. – Ростов-на-Дону: Издательский центр МарТ, 2000.