

Комбинаторика пространства функций Морса на двумерном торе

Семинар по геометрической топологии

Кудрявцева Елена Александровна
механико-математический факультет МГУ, Москва

15 января 2021

Функция Морса. Топология пространств функций Морса $\mathcal{F}_{k_0, k_1, \dots, k_n}(M)$

Пусть M — гладкое связное замкнутое ориентируемое многообразие, $\dim M = n$.

Определение

Функция $f \in C^\infty(M)$ называется **морсовской**, если любая ее критическая точка $p \in M$, $df(p) = 0$, невырождена: $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \neq 0$.

По лемме Морса $f|_{U(p)} = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} u_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n u_i^2$, где λ наз. **индексом Морса** точки p .

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{k_0, k_1, \dots, k_n}(M)$ — множество функций Морса $f \in C^\infty(M)$, имеющих k_λ критических точек индекса λ , $\forall \lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$. Ясно, что $\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda k_\lambda = \chi(M)$.

Основной результат [KP]–[K4]: в случае $n = \dim M = 2$ мы описали **гомотопический тип** пространства \mathcal{F} , снабженного C^∞ -топологией, и его **разложение на $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(M)$ -орбиты**. Здесь $\mathcal{D}^0(M)$ — компонента единицы в группе $\mathcal{D}(M) = \text{Diff}^+(M)$. Группа $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M)$ действует на \mathcal{F} “лево-правыми заменами координат”.

Основные методы: оснащение функции (для функций с фиксированными локальными особенностями), пространства модулей оснащенных функций Морса, косые цилиндрически-полиэдральные комплексы.

[KP] Е.А. Кудрявцева, Д.А. Пермяков. Оснащенные функции Морса на поверхностях // Матем. Сб. 201:4 (2010), 501–567.

[K1] Е.А. Кудрявцева. О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // Матем. сб. 204:1 (2013), 79–118. <http://arxiv.org/abs/1104.4796>.

[K2] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций Морса на поверхностях // Матем. Заметки. 92:2 (2012), 241–261. <http://arxiv.org/abs/1104.4792>.

[K3] Е.А. Кудрявцева. Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. No. 4 (2012), 14–20. [arXiv:1106.3116](https://arxiv.org/abs/1106.3116).

[K4] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций с заданными особенностями на поверхностях // Докл. Акад. Наук 468:1 (2016), 139–142.

Строгие функции Морса. Топологически эквивалентные функции. Камеры

Обозначим $\mathcal{C}_f := \{x \in M \mid df(x) = 0\}$ — множество критических точек функции f .

Определение

Функция Морса $f \in \mathcal{F}$ называется **строгой**, если $f(p) \neq f(q) \quad \forall p, q \in \mathcal{C}_f, p \neq q$.

Функции $f, f' \in C^\infty(M)$ называются **топологически эквивалентными**, если они принадлежат одной $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(M)$ -орбите, т.е. $f' = h_0 \circ f \circ h_1$ для некоторых $h_1 \in \mathcal{D}^0(M)$ и $h_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Пусть $[f]$ — класс топологической эквивалентности f .

Если f — строгая функция Морса, то $[f]$ назовем **камерой**.

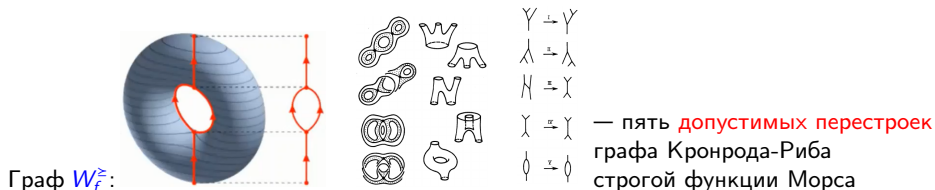
Две камеры $[f], [f']$ назовем **смежными**, если существует путь $\{f_t\}_{-\varepsilon < t < \varepsilon}$ в \mathcal{F} т.ч. $f_t \in [f]$ при $t < 0$, $f_t \in [f']$ при $t > 0$, и число критич. значений $|f_0(\mathcal{C}_{f_0})| = |\mathcal{C}_{f_0}| - 1$.

Сколько камер, смежных данной камере? Их число конечно или бесконечно?

Пример

Пусть $M = S^2$. Тогда число всех камер **конечно**.

Док-во: Сопоставим \forall камере $[f]$ упорядоченный граф Кронрода-Риба W_f^\geq функции f . Тогда \forall строгой $f_0 \in \mathcal{F}$ число возможных графов W_f^\geq , т.ч. $[f]$ смежна с $[f_0]$, **конечно** (рис.). Но для $M = S^2$ сопоставление $[f] \mapsto W_f^\geq$ инъективно. \square



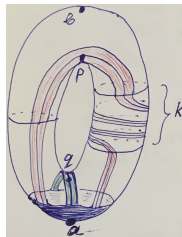
Граф смежности камер в пространстве $\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)$

Пусть \tilde{K} — **граф смежности** камер в \mathcal{F} (т.е. граф, т.ч. **вершины** \longleftrightarrow камеры $[f]$, две вершины соединены **ребром** \iff отвечающие этим вершинам камеры **смежны**).

Теорема 1

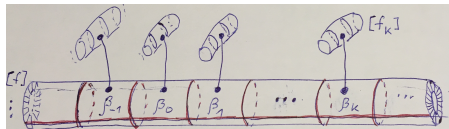
Пусть $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1,2,1}(M)$ ($\Rightarrow \chi(M) = 1 - 2 + 1 = 0$). Пусть $f \in \mathcal{F}$ — строгая функция Морса. Тогда \exists **бесконечное число** камер $[f_k]$, $k \in \mathbb{Z}$, смежных камере $[f]$. Граф смежности \tilde{K} изоморфен графу Фарея F (Farey graph).

Док-во. Пусть $C_f = \{a, b, p, q\}$, $f(a) < f(q) < f(p) < f(b)$. (*)



Пусть ρ_0 — риманова метрика на M , т.ч. \nexists сепаратрисы из q в p . Сопоставим $(f, \rho_0) \mapsto \{e_a^0, e_p^1, e_q^1, e_b^2\} \mapsto \pm([e_p^1], [e_q^1])$ — клеточное разбиение (= разложение на “ручки”) тора M и положительно ориентированный базис в $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^2$. Пусть рим. метрика ρ_k т.ч. соотв. ручка \tilde{e}_p^1 получена k скольжениями ручки e_p^1 вдоль ручки e_q^1 .
 $\Rightarrow (f, \rho_k) \mapsto \{e_a^0, \tilde{e}_p^1, e_q^1, \tilde{e}_b^2\} \mapsto \pm([e_p^1] + k[e_q^1], [e_q^1])$.

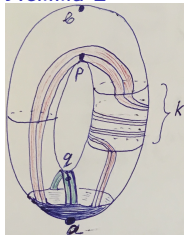
Лемма 1. Существуют $f_k \in \mathcal{F}$ и путь $\{g_t^k\}_{-\varepsilon < t < \varepsilon}$ в \mathcal{F} т.ч. $f_k(p) < f_k(q)$.
 $(g_t^k, \rho_k) \mapsto \{e_a^0, \tilde{e}_p^1, e_q^1, \tilde{e}_b^2\} \mapsto \pm([e_p^1] + k[e_q^1], [e_q^1])$ и $g_t^k \in [f]$ при $t < 0$,
 $(g_t^k, \rho_k) \mapsto \{e_a^0, \tilde{e}_p^1, e_q^1, \tilde{e}_b^2\} \mapsto \pm(-[e_q^1], [e_p^1] + k[e_q^1])$ и $g_t^k \in [f_k]$ при $t > 0$.



Лемма 2. Пусть $f \in \mathcal{F}$ — строгая функция Морса, т.ч. (*). Сопоставим камере $[f]$ 1-цикл $\pm[e_q^1]$. Тогда $[e_q^1]$ несократим, и сопост-е $[f] \mapsto \pm[e_q^1]$ корр. и биективно. \square

Комм.: Каждая камера \approx (утолщенный цилиндр на рис.) $\times T^2$.

Лемма 2



Пусть $f \in \mathcal{F}$ — строгая функция Морса, т.ч.

$$\mathcal{C}_f = \{a, b, p, q\}, \quad f(a) < f(q) < f(p) < f(b). \quad (*)$$

Сопоставим камере $[f]$ 1-цикл $\pm[e_q^1]$.

Тогда $[e_q^1]$ несократим, и сопост-е $[f] \mapsto \pm[e_q^1]$ корр. и биективно.

Доказательство.

Корректность: $(*) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ т.ч. $f(q) < c < f(p)$. Тогда

$f^{-1}(c) = \partial(f^{-1}(-\infty, c]) = \gamma_1 \cup \gamma_2$ — связн. компоненты, $\pm[\gamma_1] = \pm[\gamma_2] = \pm[e_q]$ не зависит от ρ .

Сюръект.: \forall несокр. $z \in H_1(M) \exists h \in \mathcal{D}(M)$ т.ч. $h_*[e_q] = z, \Rightarrow f \circ h^{-1} \mapsto \pm[h(e_q)] = \pm z$.

Инъективность: Если $f \mapsto \pm[e_q]$ и $f' \mapsto \pm[e_q]$, то $(f, \rho) \mapsto \pm([e_p], [e_q])$ и $(f', \rho') \mapsto \pm([e_p'] = [e_p] + k[e_q], [e_q])$, $\Rightarrow \exists \rho'_k$ т.ч. $(f', \rho'_k) \mapsto \pm([e_p], [e_q])$, $\Rightarrow [f] = [f']$.

□

Оснащенная функция Морса. Теорема Пермякова-Кудрявцевой

Обозн. через $\mathcal{E}xtr_f \subset C_f$ множество критических точек локальных экстремумов f .

Определение

Оснащением функции $f \in C^\infty(M^n)$ наз. $\beta \in \Lambda^{n-1}(M \setminus \mathcal{E}xtr_f)$ т.ч. (i) $d\beta = 0$, (ii) $df \wedge \beta|_{M \setminus C_f}$ не имеет нулей и положит. ориентирована, (iii) $\forall p \in C_f \exists$ лок. коорд.

т.ч. $f|_{U(p)} = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} u_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n u_i^2$ И либо $\beta|_{U(p)} = \left[(n-\lambda) \sum_{i=1}^{\lambda} - \lambda \sum_{i=\lambda+1}^n \right] (-1)^i u_i du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_n$,

$0 < \lambda < n$, либо $\beta|_{U(p)} = \frac{\kappa}{(u_1^2 + \dots + u_n^2)^{n/2}} \sum_{i=1}^n (-1)^i u_i du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_n$, $\lambda \in \{0, n\}$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Замечание 1. При $n=2$ в условии (iii) имеем либо $f|_{U(p)} = f(p) - u^2 + v^2$ и $\beta|_{U(p)} = d(uv)$, либо $f|_{U(p)} = f(p) \pm (u^2 + v^2)$ и $\beta|_{U(p)} = \frac{\kappa}{u^2 + v^2} (u dv - v du)$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Замечание 2. $\forall r \in M \setminus C_f \exists (u_j)$ т.ч. $f|_{U(r)} = u_1$, $\beta|_{U(r)} = du_2 \wedge \dots \wedge du_n$. Рассм. вект. поле $\xi_r := \partial_{u_1} \in \ker \beta$, $\xi_r(f) = 1 > 0$.

$\forall p \in C_f$ положим $\xi_p := \left[-(n-\lambda) \sum_{i=1}^{\lambda} + \lambda \sum_{i=\lambda+1}^n \right] u_i \partial_{u_i} \in \ker \beta$ при $0 < \lambda < n$, $\xi_p := \pm \sum_{i=1}^n u_i \partial_{u_i} \in \ker \beta$ при $\lambda \in \{0, n\}$, т.ч. $\xi_p(f) > 0$ на $U(p) \setminus \{p\}$. $\Rightarrow \exists$ глобальное (на всем M) градиентноподобное вект. поле ξ для f т.ч. $\xi|_{M \setminus \mathcal{E}xtr_f} \in \ker \beta$.

Теорема 2 ([КР, теорема 2.5 (Б)])

Пусть $\mathbb{F} := \{(f, \beta) \mid f \in \mathcal{F}, \beta \text{ — оснащение } f\}$ — пространство оснащенных функций Морса, снабженное C^∞ -топологией. Тогда забывающее отображение $\mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $(f, \beta) \mapsto f$, сюръективно и является гомотопической эквивалентностью.

Геометрический смысл оснащения:

- 1) Поле направлений $\ker \beta$ касательно к некоторому градиентно-подобному векторному полю функции f (поэтому имеет смысл говорить о сепаратрисах, интегральных кривых градиенто-подобного поля и т.п.).
- 2) Рассмотрим на M слоение, заданное функцией f . Поле направлений $\ker \beta$ трансверсально слоям слоения, поэтому его можно рассматривать как поле «горизонтальных направлений» в каждой точке слоения, т.е. связность на слоении.
- 3) Форма β задает форму объема на слоях слоения, инвариантную относительно параллельного переноса этой связности.

Док-во сюръективности забывающего отображения $\mathbb{F} \rightarrow \mathcal{F}$ в теореме 2. Построим лок. коорд. (u_i) и оснащение β_p в окрестности $U(p)$ каждой точки $p \in \mathcal{C}_f$. Пусть ξ — градиентно-подобное векторное поле для f т.ч. $\forall p \in \mathcal{C}_f$ выполнено $\xi|_{U(p)} = \xi_p$.

Пусть $c_1 < \dots < c_N$ — критические значения f . Фиксируем $\varepsilon > 0$ столь малое, что $2\varepsilon < c_{i+1} - c_i$. По предположению индукции можем считать, что оснащение β для f построено на $f^{-1}[c_1, c_{i-1} + \varepsilon]$.

Продолжим $\beta|_{f^{-1}(c_{i-1} + \varepsilon)}$ на $f^{-1}[c_{i-1} + \varepsilon, c_i - 5\varepsilon/6]$ т.ч. $\xi \in \ker \beta$, и β инвариантна относительно потока поля ξ . Осталось построить β на $f^{-1}[c_i - 5\varepsilon/6, c_i + \varepsilon]$.

Пусть точка $p \in \mathcal{C}_f$ т.ч. $f(p) = c_i$. Пусть Σ_p — сепаратрисная диаграмма точки p , т.е. объединение точки p и входящих в нее и исходящих из нее сепаратрис поля ξ_p . Выпустим из $\forall E \in f^{-1}(c_i - \varepsilon)$ интегральную кривую γ_E поля $\xi_p|_{f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]}$.

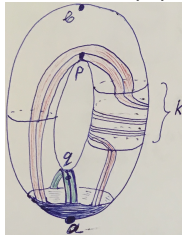
Нетрудно построить гладкое векторное поле $\tilde{\xi}$ в $f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon/2]$, т.ч. (i) $i_{\tilde{\xi}} df > 0$ на $f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i - \varepsilon/2] \setminus \mathcal{C}_f$, (ii) $\tilde{\xi} = \xi$ на $\cup_{p \in \mathcal{C}_f \cap f^{-1}(c_i)} \Sigma_p \cap f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i - \varepsilon/2]$ и на $f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i - 5\varepsilon/6]$ и на $f^{-1}[c_i - 2\varepsilon/3, c_i + \varepsilon]$, (iii) при продолжении 1-формы $\beta|_{f^{-1}(c_i - \varepsilon)}$ на $f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i - \varepsilon/2]$, т.ч. $\tilde{\xi} \in \ker \beta$ и β инвариантна относительно потока поля $\tilde{\xi}$, получим $\beta = \beta_p$ на $U(p) \cap f^{-1}(c_i - \varepsilon/2)$.

Продолжим 1-форму β на $f^{-1}[c_i - \varepsilon/2, c_i + \varepsilon]$ т.ч. $\tilde{\xi} \in \ker \beta$, β инвариантна относительно потока поля $\tilde{\xi}$, и $\beta = 0$ в любой точке $p \in \mathcal{C}_f \cap f^{-1}(c_i)$.

Ясно, что $\beta = \beta_p$ в $U(p) \cap f^{-1}[c_i - \varepsilon/2, c_i + \varepsilon]$, и β — оснащение функции $f^{-1}[c_1, c_i + \varepsilon]$. По индукции существует оснащение функции f на всем M . \square

Доказательство леммы 1

Заменим в формулировке леммы 1 риманову метрику ρ оснащением β функции f :



Лемма 1. Существуют $f_k \in \mathcal{F}$ и путь $\{g_t^k\}_{-\varepsilon < t < \varepsilon}$ в \mathcal{F} т.ч. $f_k(p) < f_k(q)$, $(g_t^k, \beta_k) \mapsto \{e_a^0, \tilde{e}_p^1, e_q^1, \tilde{e}_b^2\} \mapsto \pm([e_p^1] + k[e_q^1], [e_q^1])$ и $g_t^k \in [f]$ при $t < 0$, $g_t^k \in [f_k]$ при $t > 0$.

Док-во леммы 1. Пусть Σ_p^k — сепаратрисная диаграмма точки p , т.е. объединение точки p и входящих в нее и исходящих из нее сепаратрис поля $\ker \beta_k$. Обозначим $\Sigma_p^k \cap f^{-1}(f(a) + \varepsilon) =: \{A, B\}$. Пусть I_A, I_B — малые связные замкнутые окрестности точек A, B в кривой $f^{-1}(f(a) + \varepsilon)$.

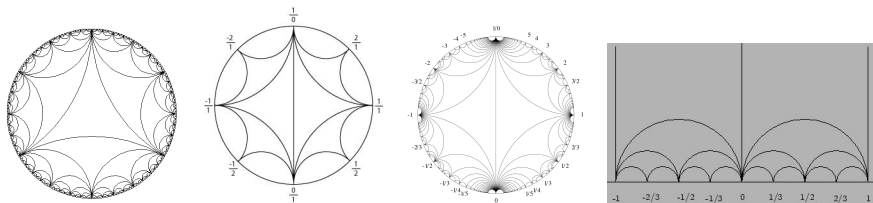
Выпустим из $\forall E \in f^{-1}(f(a) + \varepsilon)$ интегральную кривую γ_E поля $\ker \beta_k|_{f^{-1}[f(a)+\varepsilon, f(b)-\varepsilon]}$. Введем координату w на I_A т.ч. $w(A) = 0$, $dw = \beta|_{I_A}$. Аналогичную функцию w введем на I_B . Без ограничения общности $w \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ на I_A и на I_B .

Рассмотрим регулярную окрестность X_p^k сепаратрисной диаграммы Σ_p^k , где $X_p^k := \Sigma_p^k \cup (\cup_{E \in I_A \cup I_B} \gamma_E)$. Продолжим функцию w на X_p^k т.ч. $w|_{\Sigma_p^k} = 0$, w постоянна на

кривых γ_E , $E \in I_A$. Введем аналогичную окрестность X_q^k сепаратрисной диаграммы Σ_q^k и функцию w на X_q^k . Определим функцию g_t^k на X_p^k формулой $g_t^k(x) := h_{t, |w(x)|}(f(x))$, на X_q^k формулой $g_t^k(x) := h_{t, |w(x)|}^{-1}(f(x))$, а на $M \setminus (X_p^k \cup X_q^k)$ формулой $g_t^k(x) := f(x)$. Здесь $h_{t,u}(c)$ — гладкое семейство функций, т.ч. $h_{t,u}|_{[f(a), f(p)] \cup [f(q), f(b)]} = \text{id}$, $h_{0,u} = \text{id}$, $h_{t,u}|_{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]} = \text{id} + t(f(q) - f(p))$ при $|u| \leq \varepsilon/4$, $h_{t,u} = \text{id}$ при $3\varepsilon/4 \leq |u| \leq \varepsilon$, $h'_{t,u}(c) > 0$.

Тогда g_t^k — функция Морса с оснащением β_k , $0 < t < 1$, с нужными свойствами. \square

Граф Фарей в единичном круге и в верхней полуплоскости



Пусть F — граф Фарей (Farey graph [Farey]), показанный на рис. Он является плоским графом с вершинами в рациональных граничных точках двумерного диска $D = D^2$ (при гомеоморфном отождествлении $\partial D \approx \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, где число $\infty = \frac{1}{0} \in \overline{\mathbb{R}}$ и отвечающая ему граничная точка считаются рациональными). Этот граф задает триангуляцию диска D^2 , из границы которого выкинуты все иррациональные точки. Если гомеоморфно отождествить $\partial D \approx \overline{\mathbb{R}}$, то точки $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ соединены ребром в графе Фарей F тогда и только тогда, когда $mq - np = \pm 1$. Хорошо известно, что любое ребро $(\frac{m}{n}, \frac{p}{q})$ в графе Фарей F является границей ровно двух треугольников данной триангуляции, а именно треугольников с вершинами $(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{m+p}{n+q})$ и $(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{m-p}{n-q})$ (т.е. третья вершина треугольника получается из первых двух согласно “вульгарному правилу сложения дробей” [Farey]).

[Farey] J. Farey. On a curious property of vulgar fractions // London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 47 (1816), 385.

Теорема 3

(А) Пространство функций Морса $\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)$ имеет **гомотопический тип** $T^2 \times F^\circ$, где F° — **хордовая диаграмма**, получающаяся из графа Фарей F заменой каждой вершины окружностью (т.е. операцией “раздутие вершин”). В частности, $\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2) \sim T^2 \times (\bigvee_{\mathbb{N}} S^1)$, и **гомотопические группы** и **группы гомологий**

$$\pi_k(\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 \times (*_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}), & k = 1, \\ 0, & k \neq 1; \end{cases} \quad H_k(\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, & k = 1, 2, 3, \\ 0, & k > 3. \end{cases}$$

(В) Пространство функций Морса $\mathcal{F}_{1,2,1}(T^2)$ состоит из **бесконечного числа лево-правых орбит** (т.е. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(T^2)$ -орбит, т.е. классов топологической эквивалентности функций Морса). Каждая орбита имеет коразмерность **0** или **1**, причем **открытые орбиты** находятся во взаимно-однозначном соответствии с **вершинами** графа Фарей F (т.е. с окружностями хордовой диаграммы F°), а **неоткрытые орбиты** — с **ребрами** графа Фарей (т.е. с хордами хордовой диаграммы F°). Каждая открытая орбита **гомотопически эквивалентна** 3-мерному тору $T^2 \times S^1$, а каждая неоткрытая орбита — двумерному тору T^2 .

Док-во: Согласно [K1]–[K3], $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1,2,1}(T^2) \sim T^2 \times \mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{1,2,1}(T^2)$ — “цилиндрически-полиэдральный комплекс” [K1], состоящий из “цилиндрических ручек” $D_{[f]}$, $f \in \mathcal{F}$. Для строгой функции Морса f ручка $D_{[f]} \sim S^1$. Для нестрогой функции Морса $g = g_0^k$ (см. лемму 1) ручка $D_{[g]}$ является отрезком с концами на $D_{[f]}$ и $D_{[f']}$. С учетом теоремы 1 имеем $\mathbb{K} \sim F^\circ$. \square