Положительные неподвижные точки нелинейных операторов на $\mathbb{R}^2$ и их приложения

Нодиров Шохрух Дилмуродович

Научный руководитель –
проф., д.ф.-м.н. Эшкабилов Юсуп Халбаевич

Карши, 24 декабр, 2020

Введение

Теория неподвижных точек операторов относится к области нелинейного функционального анализа, которая вызывает растущий исследовательский интерес в последние годы. Нелинейные операторы возникают из различных нелинейных задачах во многих областях, таких как дифференциальные уравнения, нелинейная эргодическая теория, теория игр, теория генетики, статистическая механика и т.д. При этом особую роль занимает теория неподвижных точек операторов.

Классическими теоремами теории неподвижных точек являются теоремы Тарки, Бурбаки, Банаха, Перова, Люксембург-Юнга, Брауэра, Шаудера, Тихонова и Браудера-Годе-Кирка и т.д. Методы исследований положительных решений операторных уравнений, разработанные М.А. Красносельским, являются удобными для анализа неподвижных точек нелинейных положительных операторов заданных на конусе.

Введение

Одна из центральных проблем статистической физики является исследование существования фазовых переходов. Фазовые переходы связаны с теорией мер Гиббса для моделей статистической механики. В работе У. Розикова, Ю. Эшкабилова (2010) впервые показано, что положительные неподвижные точки нелинейных интегральных операторов играют решающий роль в теории мер Гиббса для моделей с континуальным множеством значения спина. Проблема описания трансляционно-инвариантных мер Гиббса для таких моделей была сведена к анализу положительных неподвижных точек нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна.

Диссертационная работа посвящена исследованию положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна с вырожденным ядром. Эта задача сведена к изучению неподвижных точек нелинейного оператора на конусе в конечномерном вещественном пространстве. Такие операторы также встречаются в стохастическом виде на конечномерном симплексе, которые являются важном объектом в задачах популяционной генетики.

Введение

Теория меры Гиббса для моделей с континуальным множеством значений спина на дереве Кэли развивалась в работах Ю.Х. Эшкабилова, У.А. Розикова, Г.И. Ботирова, Ф.Х. Хайдарова, B. Jahnel (Германия), C. Kulske (Германия) и других.

В работах Р.Н. Ганиходжаева, Н.Н. Ганиходжаева, У.А. Розикова, Ф.М. Мухаммедова, У.У. Жамилова, M. Ladra (Испания), А.Ю. Хамроева, Ф.А. Шахидии и других исследован свойств и характеров неподвижных точек квадратичных и кубических стохастических операторов заданных на симплексе.

Мера Гиббса на дереве Кэли

Дерево Кэли Γ_k (или решетка Бете по другой терминологии) порядка $k \in \mathbb{N}$ есть бесконечное дерево, то есть граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер. Пусть $\Gamma_k = (V, L)$, где V есть множество вершин и L-множество ребер(дуг).

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $[0,1]$, и расположены на вершинах дерева. Для $A \subset V$ конфигурация σ_A на A является произвольной функцией $\sigma_A : A \to [0,1]$. Обозначим $\Omega_A = [0,1]^A$ множество всех конфигураций на A. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in [0,1]$; множество всех конфигураций совпадает с $[0,1]^V$.

Рассмотрим следующий гамильтониан:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \xi_{\sigma(x),\sigma(y)}, \quad \sigma \in \Omega_V, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\xi : (u,v) \in [0,1]^2 \to \xi_{u,v} \in \mathbb{R}$ -ограниченной, измеримой функцией.

расщепленная мера Гиббса

Говорят, что $x < y$, если путь из x^0 в y проходит через x. При этом вершина y называется "прямым потомком"вершины x, если $y > x$ и x, y являются ближайшими соседями. $S(x)$- множество прямых потомков вершины x.

Пусть $h: \ x \in V \mapsto h_x = (h_{t,x}, t \in [0,1]) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ является отображением вершины $x \in V \setminus \{x^0\}$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$f(t,x) = \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{t,u}) f(u,y) du}{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{0,u}) f(u,y) du}, \tag{2}$$

где $f(t,x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x}), \ t \in [0,1], \ \beta = \frac{1}{T}, \ T > 0$ является температурой и $du = \lambda(du)$-мерой Лебега.

В работе [1] было доказано, что расщепленная мера Гиббса модели H (1) соответствует решению уравнения (2).

[1] Rozikov U.A. and Eshkabilov, Yu.Kh.: On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations. *Math. Phys. Anal. Geom.* **13** (2010), 275-286.

Трансляционно-инвариантные меры Гиббса

Рассмотрим решение уравнения (2) в классе трансляционно-инвариантных функций $f(t,x)$, т. е. $f(t,x) = f(t)$ для всех $x \in V$. Рассмотрим следующий оператор в конусе $C_+[0,1] = \{f \in C[0,1] : f(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$:

$$(R_k f)(t) = \left(\frac{\int_0^1 K(t,u) f(u) du}{\int_0^1 K(0,u) f(u) du} \right)^k \quad k \in \mathbb{N},$$

где $K(t,u) = \exp(J\beta\xi_{tu}) > 0, f(t) \not\equiv 0, t,u \in [0,1]$.

Нас интересуют положительные непрерывные решения уравнения

$$R_k f = f, \tag{3}$$

т.е. такие, что $f(t) \in C_+^0[0,1] = C_+[0,1] \setminus \{\theta = 0\}$.

[2] Eshkabilov, Yu.Kh., Haydarov, F.H., Rozikov, U.A.: Non-uniqueness of Gibbs Measure for Models With Uncountable Set of Spin Values on a Cayley Tree *J.Stat.Phys.* **147** (2012), 779-794.

Известные результаты

В случае $k = 1$ была показана единственность расщепленной меры Гиббса [1]. Было найдено достаточное условие единственности периодической расщепленной меры Гиббса для произвольного $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ [2]. Доказано существование фазовых переходов на дереве Кэли порядка $k \geq 2$ для некоторых гамильтонианов.

Также рассмотрены задачи описания множеств трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей с параметрами $\theta \in \mathbb{R}$. Такие задачи были сведены к исследованию положительных неподвижных точек нелинейных операторов на $\mathbb{R}^2$.

Например, в одной из таких моделей, для ядра $K(t, u)$ имеет место равенство [Эшкабилов, Ботиров, Хайдаров(2020)]:

$$K(t, u) = 1 + \theta \sqrt[2n+1]{(t - 0.5)(u - 0.5)}, \tag{4}$$

где $\theta \in \left[-4^{\frac{1}{2n+1}}, 4^{\frac{1}{2n+1}}\right], \quad t, u \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$

Положительные операторы

Пусть $E-$ вещественное банахово пространство.

Definition

Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется конусом, если из $x \in K$ и $x \neq \theta$ вытекает что $\alpha x \in K$ при $\alpha \geq 0$ и $\alpha x \notin K$ при $\alpha < 0$.

Каждый конус K определяет в банаховом пространстве E полуупорядоченность: пишут $x \geq y$, если $x - y \in K$.

Definition

Нелинейный оператор A называется монотонным на множестве $T \subset E$, если из $x \leq y$ $(x, y \in T)$ следует $Ax \leq Ay$.

Definition

Оператор A на множестве $T \subset E$ называется положительным, если $AT \subset K$.

Оператор A назовем однородным порядка s, если $A(tx) = t^s A(x)$, $(x \in K, t > 0)$.

Положительные операторы

Definition

Оператор A, действующий в пространстве E с конусом K, назовем вогнутым, если существует такой ненулевой элемент $u_0 \in K$, что для любого ненулевого $x \in K$ справедливы неравенства $\alpha u_0 \le Ax \le \beta u_0$, где $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ положительны, и если для каждого такого $x \in K$, что $\alpha_1(x) u_0 \le x \le \beta_1(x) u_0$, $(\alpha_1(x), \beta_1(x) > 0)$, справедливы соотношения

$$A(tx) \ge tA(x) \qquad (0 \le t \le 1)\,. \tag{5}$$

Definition

Вогнутый оператор A назовем u_0-вогнутым $(u_0 \in K, u_0 \neq 0)$, если для каждого положительного числа $t_0 \in (0, 1)$ можно указать такое $\eta = \eta(x, t_0) > 0$, что $A(t_0 x) \ge (1 + \eta)\, t_0 Ax$. Здесь, как и в условии (5), рассматриваются такие $x \in K$, что $\alpha_1(x) u_0 \le x \le \beta_1(x) u_0$, $(\alpha_1(x) > 0, \beta_1(x) > 0)$.

Положительные операторы

Definition

Оператор A назовем u_0-выпуклым $(u_0 \in K, u_0 \neq 0)$ на T, если для каждого ненулевого $x \in T$ выполнены неравенства $\alpha u_0 \leq Ax \leq \beta u_0$, где $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ положительны, и если для каждого такого $x \in T$, что $\alpha_1(x) u_0 \leq x \leq \beta_1(x) u_0$, $(\alpha_1(x) > 0, \beta_1(x) > 0)$, и для каждого положительного числа $t \in (0,1)$ можно указать такое $\eta = \eta(x, t_0) > 0$, что

$$A(t_0 x) \leq (1 - \eta)\, t_0 Ax.$$

Есть известная теорема, что произвольные u_0- вогнутые монотонные операторы не имеют более одной положительной неподвижной точки в конусе. К сожалению, нет аналога такого теоремы для неподвижных точек монотонных u_0-выпуклых операторов A, такие операторы могут иметь несколько различных неподвижных точек в конусе K. Это обстоятельство вызывает интересы специалистов для исследований положительных неподвижных точек u_0-выпуклых операторов.

Интегральный оператор типа Гаммерштейна

Для $k \geq 2$ рассматриваем u_0- выпуклый $(u_0(t) \equiv 1)$ интегральный оператор типа Гаммерштейна H_k на конусе $C_+[0,1]$:

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 K(t,u) f^k(u) du.$$

Lemma

Пусть $k \geq 2$. Интегральное уравнение (3) имеет нетривиальную положительную решению тогда и только тогда, когда интегральный оператор H_k имеет нетривиальную положительную неподвижную точку, а также справедливо $N_>^{fix}(R_k) = N_>^{fix}(H_k)$, где $N_>^{fix}(T)$-количество нетривиальных положительных неподвижных точек оператора T.

[3] Eshkabilov Yu.Kh, Haydarov F.H., Rozikov U.A.: Uniqueness of Gibbs Measure for Models With Uncountable Set of Spin Values on a Cayley Tree. *Math. Phys. Anal. Geom.* **16** (2013), 1-17.

Постановка задачи

Мы исследуем неподвижные точки оператора H_k на $C_+^0[0,1]$, когда ядро $K(t,u)$ вырожденное и принимает строго положительные значения т.е.

$$K(t,u) = \phi_1(t)\varphi_1(u) + \phi_2(t)\varphi_2(u), \tag{6}$$

где функции $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ и $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ из $C_+^0[0,1]$ являются попарно линейно независимыми.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ определим конус $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0\}$.

Положим

$$a_i = \int\limits_0^1 \varphi_1(u)\,\phi_1^{k-i}(u)\,\phi_2^i(u)\,du, \quad b_i = \int\limits_0^1 \varphi_2(u)\,\phi_1^{k-i}(u)\,\phi_2^i(u)\,du, i = \overline{0..k},$$

Определим следующий нелинейный u_0- выпуклый ($u_0 \equiv (1,1)$) оператор $\mathcal{Q}_k$ на $\mathbb{R}_+^2$:

$$\mathcal{Q}_k(x,y) = \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i a_i x^{k-i} y^i, \ \sum_{i=0}^{k} C_k^i b_i x^{k-i} y^i \right).$$

Нелинейный оператор $\mathcal{Q}_k$ на $\mathbb{R}^2$

Lemma

Пусть $k \geq 2$ и ядро $K(t,u)$ имеет вид (6). Интегральный оператор Гаммерштейна H_k имеет нетривиальную положительную неподвижную точку тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{Q}_k$ имеет нетривиальную положительную неподвижную точку и справедливо равенство $N^{fix}_{>}(H_k) = N^{fix}_{>}(\mathcal{Q}_k)$.

Задача:

- *Исследовать количество строго положительных неподвижных точек нелинейного u_0- выпуклого оператора $\mathcal{Q}_k$ при $k \geq 2$:*
  - $N^{fix}_{>}(\mathcal{Q}_k) = ?, \quad (k \geq 2).$

Таким образом задача связана с изучением положительных неподвижных точек интегрального оператора H_k с вырожденным ядром, которая возникает в теории меры Гиббса для моделей с гамильтонианом

$$\xi_{t,u}(\beta) = \frac{1}{J\beta} \ln \left(\phi_1(t)\varphi_1(u) + \phi_2(t)\varphi_2(u)\right).$$

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на шести параграфы, заключения, списка литератур из 82 наименований.

В первой главе приведены основные обозначения и необходимые сведения, и постановка задач исследования. Задача исследования положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна H_k с вырожденном ядром сведена к задачу исследования положительных неподвижных точек оператора $\mathcal{Q}_k$ на $\mathbb{R}^2$. Доказаны, некоторые вспомогательные утверждение.

Во второй главе исследовано количество положительных неподвижных точек оператора $\mathcal{Q}_k$ в случаях $k = 2, 3, 4$. Доказаны теоремы, о количестве положительных неподвижных точек операторов $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$. Приведены примеры по выполнению условий теоремы.

В третьей главе исследуются неподвижные точки кубического стохастического оператора со строго положительными коэффициентами на симплексе. Получены теоремы для количества неподвижных точек строго положительного кубического стохастического оператора.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_0 = a_k, \quad \mu_i = \frac{k!}{(k-1)!(i-1)!}\left(\frac{a_{i-1}}{k-i+1} - \frac{b_i}{i}\right), \quad i = \overline{1,..,k}, \quad \mu_{k+1} = -b_0,$$

и определим полином $P_{k+1}(\xi)$ степени $k+1$:

$$P_{k+1}(\xi) = \mu_0\xi^{k+1} + \mu_1\xi^k + ... + \mu_k\xi + \mu_{k+1}.$$

Положим

$$\mathbb{R}^2_> = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 0\}.$$

Lemma

Если $\omega_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_>$ является неподвижной точкой нелинейного оператора $\mathcal{Q}_k$, тогда $\xi_0 = \frac{y_0}{x_0}$ является корнем уравнения

$$P_{k+1}(\xi) = 0. \tag{7}$$

Lemma

Если ξ_0 является положительным корнем алгебраического уравнения (7), то $\omega_0 = (x_0, \xi_0 x_0) \in \mathbb{R}^2_>$ является неподвижной точкой нелинейного оператора $\mathcal{Q}_k$, где

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^{k} C_k^i a_i \xi_0^i}}.$$

Theorem

Нелинейный оператор $\mathcal{Q}_k$ имеет хотя бы одну неподвижную точку на $\mathbb{R}^2_>$.

Глава II. (§ 2.1) Квадратичный оператор $\mathcal{Q}_2$

Обозначим $D = \mu_1^2 - 3\mu_0\mu_2$ и в случае $D > 0$ определим

$$\alpha = -\frac{\mu_1 + \sqrt{D}}{3\mu_0}, \quad \beta = -\frac{\mu_1 - \sqrt{D}}{3\mu_0}.$$

Theorem

Пусть $D > 0$ и $\alpha > 0$. Если многочлен $P_3(\xi)$ удовлетворяет одному из следующих условий
$(f) P_3(\alpha) = 0$,
$(g) P_3(\beta) = 0$,
тогда квадратичный оператор $\mathcal{Q}_2$ имеет две неподвижные точки на $\mathbb{R}^2_>$ и $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_2) = 2$.

Theorem

Пусть $D > 0$ и $\alpha > 0$. Если многочлен $P_3(\xi)$ удовлетворяет условия
$(h) P_3(\alpha) > 0, P_3(\beta) < 0$,
то оператор $\mathcal{Q}_2$ имеет три неподвижные точки на $\mathbb{R}^2_>$ и $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_2) = 3$.

Обозначим

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

где $p = -\frac{3\mu_1^2}{16\mu_0^2} + \frac{3\mu_2}{2\mu_0}$, $\quad q = \frac{\mu_1^3}{32\mu_0^3} - \frac{3\mu_1\mu_2}{8\mu_0^2} + \frac{\mu_3}{4\mu_0}$.

Theorem

Пусть $Q \geq 0$. Тогда кубический оператор $\mathcal{Q}_3$ имеет единственную неподвижную точку на $\mathbb{R}^2_>$ и $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3) = 1$.

При $Q < 0$ определим

$$\theta_j = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi(k-2)}{3}\right), \quad j = \overline{1,2,3},$$

где $\cos\alpha = -\frac{q}{2}\left(-\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha \in [0,\pi]$.

Глава II. (§ 2.2) Кубический оператор $\mathcal{Q}_3$

Введем обозначения:

$$\gamma_1 = \theta_3 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}, \quad \gamma_2 = \theta_1 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}, \quad \gamma_3 = \theta_2 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}.$$

Theorem

Пусть $Q < 0, \gamma_2 > 0$. Если выполняются одно из следующих условий
$(d) P_4(\gamma_2) = 0,$
$(e) P_4(\gamma_3) = 0,$
тогда кубический оператор $\mathcal{Q}_3$ имеет две неподвижные точке на $\mathbb{R}^2_>$ и $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3) = 2$.

Theorem

Пусть $Q < 0, \gamma_2 > 0$. Если выполняются следующие условия
$(f) P_4(\gamma_2) > 0, \quad P_4(\gamma_3) < 0,$
тогда кубический оператор $\mathcal{Q}_3$ имеет три неподвижные точки на $\mathbb{R}^2_>$ и $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3) = 3$.

Мы используем следующие обозначения:

$$a = -\frac{p^2}{12} - r, \quad b = -\frac{p^3}{108} + \frac{pr}{3} - \frac{q^2}{8},$$

где

$$p = \frac{15\mu_0\mu_2 - 6\mu_1^2}{25\mu_0^2}, \quad q = \frac{50\mu_0^2\mu_3 + 8\mu_1^3 - 30\mu_0\mu_1\mu_2}{125\mu_0^3},$$
$$r = \frac{15\mu_0\mu_1^2\mu_2 - 50\mu_0^2\mu_1\mu_3 - 3\mu_1^4 - 125\mu_0^3\mu_4}{625\mu_0^4}.$$

Положим

$$Q = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

В случае $Q < 0$, мы определим следующие число:

$$z_0 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{p}{3},$$

где $\cos\alpha = -\frac{b}{2}\left(-\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha \in [0, \pi]$.

Также определим

$$\xi_{1,2}^{ext} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2z_0} \pm \sqrt{2z_0 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}\right) - \frac{\mu_1}{5\mu_0},$$

$$\xi_{3,4}^{ext} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2z_0} \pm \sqrt{2z_0 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}\right) - \frac{\mu_1}{5\mu_0}.$$

В случае $z_0 > 0$, введем следующие обозначение:

$$\xi_{min} = \min\{\xi_1^{ext}, \xi_2^{ext}, \xi_3^{ext}, \xi_4^{ext}\}, \quad \xi_{max} = \max\{\xi_1^{ext}, \xi_2^{ext}, \xi_3^{ext}, \xi_4^{ext}\}.$$

Theorem

Пусть $Q < 0$, $z_0 > 0$, $\xi_{min} > 0$. Если многочлен $P_5(\xi)$ удовлетворяет одно из следующих условий:

(a) $P_5(\xi_{min}) = 0$,

(b) $P_5(\xi_{max}) = 0$,

тогда квартический оператор $\mathcal{Q}_4$ имеет хотя бы две неподвижные точки на $\mathbb{R}^2_>$, т.е., $N_>^{fix}(\mathcal{Q}_4) \geq 2$.

Глава II. (§2.3) Квартический оператор $\mathcal{Q}_4$

Введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{A} = \{\xi_1^{ext}, \xi_2^{ext}, \xi_3^{ext}, \xi_4^{ext}\},$$

$$\lambda_1 = \xi_{min}, \quad \lambda_2 = \min\left(\mathfrak{A}\backslash\{\xi_{min}\}\right), \quad \lambda_3 = \max\left(\mathfrak{A}\backslash\{\xi_{max}\}\right), \quad \lambda_4 = \xi_{max}.$$

Для количества неподвижных точек оператора $\mathcal{Q}_4$ получены следующие результаты:

Пусть выполнены соотношения $Q < 0$, $z_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$.		
	Достаточные условия	$N_{>}^{fix}(\mathcal{Q}_4)$
1.	$P_5(\lambda_1) < 0, \quad P_5(\lambda_3) < 0$	1
2.	$P_5(\lambda_1) = 0, \quad P_5(\lambda_3) < 0$	2
3.	$P_5(\lambda_1) < 0, \quad P_5(\lambda_3) = 0$	
4.	$P_5(\lambda_2) > 0, \quad P_5(\lambda_4) = 0$	
5.	$P_5(\lambda_2) = 0, \quad P_5(\lambda_4) > 0$	
6.	$P_5(\lambda_2) > 0, \quad P_5(\lambda_4) = 0$	

Пусть выполнены соотношения $Q<0$, $z_0>0$, $\lambda_1>0$.		
	Достаточные условия	$N^{fix}_{>}(\mathcal{Q}_4)$
7.	$P_5(\lambda_1)=0, \quad P_5(\lambda_4)=0$	3
8.	$P_5(\lambda_1)=0, \quad P_5(\lambda_3)=0$	
9.	$P_5(\lambda_2)=0, \quad P_5(\lambda_4)=0$	
10.	$P_5(\lambda_2)>0, \quad P_5(\lambda_4)<0$	
11	$P_5(\lambda_1)<0, \quad P_5(\lambda_3)>0, \quad P_5(\lambda_4)<0$	
12.	$P_5(\lambda_1)>0, \quad P_5(\lambda_2)<0, \quad P_5(\lambda_4)>0$	
13.	$P_5(\lambda_1)=0, \quad P_5(\lambda_3)>0, \quad P_5(\lambda_4)<0$	4
14.	$P_5(\lambda_1)>0, \quad P_5(\lambda_3)=0$	
15.	$P_5(\lambda_2)=0, \quad P_5(\lambda_4)<0$	
16.	$P_5(\lambda_1)>0, \quad P_5(\lambda_2)<0, \quad P_5(\lambda_4)=0$	
17.	$P_5(\lambda_1)>0, \quad P_5(\lambda_2)<0, \quad P_5(\lambda_3)>0, \quad P_5(\lambda_4)<0$	5

Таблица 1.

Рассмотрим кубический стохастический оператор (КСО) со строгими положительными коэффициентами на $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x + y = 1\}$:

$$\mathcal{C}(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}x^3 + 3a_{12}x^2y + 3a_{21}xy^2 + a_{22}y^3, \\ b_{11}x^3 + 3b_{12}x^2y + 3b_{21}xy^2 + b_{22}y^3 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $a_{ij} > 0, \;\; b_{ij} > 0, \;\; a_{ij} + b_{ij} = 1, \;\; i, j \in \{1, 2\}$.

Множество неподвижных точек оператора (8) обозначим через $\mathrm{Fix}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Fix}(\mathcal{C}) = \{\omega \in S^1 : \mathcal{C}\omega = \omega\}$.

Определим многочлен третьей степени:

$$P_3(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3. \tag{9}$$

где $c_0 = a_{11} - a_{22} + 3(a_{21} - a_{12}), \;\; c_1 = 3a_{22} + 3a_{12} - 6a_{21},$

$$c_2 = 3a_{21} - 3a_{22} - 1, \;\; c_3 = a_{22}.$$

Введем обозначение $D := c_1^2 - 3c_0c_2$.

($\S$3.2) Теоремы о количествах неподвижных точек: случай $c_0 < 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 < 0$

В случае $D > 0$ определим величины α и β:

$$\alpha = \frac{1}{3c_0}\left(-c_1 + \sqrt{D}\right), \quad \beta = \frac{1}{3c_0}\left(-c_1 - \sqrt{D}\right).$$

Theorem

Пусть $D > 0$, $\beta < 1$. Если выполняется одно из следующих условий
(*e*) $P_3(\alpha) = 0$,
(*f*) $P_3(\beta) = 0$,
то КСО (8) имеет две неподвижные точки на S^1 и $|Fix(\mathcal{C})| = 2$.

Theorem

Пусть $D > 0$, $\beta < 1$. Если выполняются условия
(*g*) $P_3(\alpha) < 0$ *и* $P_3(\beta) > 0$,
то КСО (8) имеет три неподвижные точки на S^1 и $|Fix(\mathcal{C})| = 3$.

Введем следующее обозначение: $\Delta = 2 - (3a_{12} + a_{22})$.
В случае $\Delta \neq 0$ определим число: $D^* = 1 - 4 \cdot \frac{a_{22}}{|\Delta|}$.

Theorem

Пуст $a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21} = 1$. Если одно из следующих условий выполняется:
(e) $\Delta \geq 0$,
(f) $\Delta < 0$, $D^* \leq 0$,
то КСО (8) имеет единственную неподвижную точку $\omega_0 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ на S^1.

Theorem

Пусть $a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21} = 1$ и выполняются соотношения $\Delta < 0$ и $D^* > 0$, тогда КСО (8) имеет три неподвижные точки

$$\omega_1^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D^*}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D^*}}{2}\right), \quad \omega_2^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \omega_3^* = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D^*}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D^*}}{2}\right),$$

на S^1.

Список опубликованных работ

1. Eshkabilov Yu. Kh. , Nodirov Sh. D. , Haydarov F. H. Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures. *Positivity,* **20** No.4, (2016), 929-943. (Scopus IF 0.69)

2. Eshkabilov Yu. Kh. , Nodirov Sh. D. Positive Fixed Points of Cubic Operators on $\mathbb{R}^2$ and Gibbs Measures. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics.* 12(6),(2019), 663-673. (Scopus IF 0.274)

3. Нодиров Ш. Д. О неподвижных точках строго положительных кубических стохастических операторов на одномерном симплексе. *Илм сарчашмалари.* научно-методический журнал УрГУ. 12,(2019), 10-16.

4. Eshkabilov Yu. Kh. , Nodirov Sh. D. On the positive fixed points of quartic operators. *Bulletin of the Institute of Mathematics.* 2020, №3, pp.27-36.

Список опубликованных работ

5. Ю.Х. Эшкабилов, Ш.Д. Нодиров. О положительных неподвижных точках положительных квадратичных операторов на конусе, //Труды МК "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий- Аль-Хорезми 2014г. Самарканд, 15-17 сентябрь, (2014), стр. 275-277.

6.Yu.X. Eshkabilov., Sh.D. Nodirov. Positive fixed points of Hammerstein's integral operators and Gibbs measures, // International conference "Mathematical analysis and it's application to mathematical physics " September 17-20 (2018) , 44-45 pp, Samarkand.

7. Ю.Х. Эшкабилов, Ш.Д. Нодиров. О положительных неподвижных точках интегрального оператора типа Гаммерштейна с вырожденным ядром,// XIV школа-конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы Казань 7-12 сентября (2019), стр. 382-385.

8. Eshkabilov Yu.Kh. Nodirov Sh.D., On the positive fixed points of quartic operators,// Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики, Карши, 25 сентября (2020), стр. 12-13.

Список опубликованных работ

9. Eshkabilov Yu. Kh., Nodirov Sh. D., Translation invariant Gibbs measures for model on the Cayley tree of order three// Republican scientific conference "Actual problems and applications of analyis"58-59 p.p., KarSU., Karshi c., 4-5 october 2019.

10. Нодиров Ш.Д., Жамолов Ш.Ж., О неподвижных точках строго положительных кубических стохастических операторов на одномерном симплексе // Республиканская научная конференция "Актуальные проблемы и применения анализа"84-86 стр, КарГУ., г. Карши., 4-5 октябрь 2019 г.

11. NodirovSh.D., Maxmatrayimov A.T. On the uniqueness of Gibbs measures and fixed point of integral operator Hammerstein's type. // "Matematikaning zamonaviy muammolari"Ilmiy onlayn-konferensiya tezislari to'plami, 20 may 2020 yil NUKUS, 42-43.

Спасибо за внимание