НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР И ПОЛУПОЛЕЙ

Чилин В.И.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

vladimirchil@gmail.com

4 февраля, 2021

Введение

В настоящем докладе дается краткий обзор основных результатов теории топологических булевых алгебр и полуполей. Формулируются главные нерешенные до настоящего времени проблемы, относящиеся к топологичес структуре полуполей и булевых алгебрах.

Теория топологических полуполей и топологических булевых алгебр, созданная в 60-х годах прошлого столетия, стала источником многочисленн исследований, относящихся к общей топологии и функциональному анализ Эта теория по сути дела положила основу для формирования научных школ общей топологии и функционального анализа в Узбекистане, хорошо известных в настоящее время всему математическому миру.

Основателем этого направления в топологии и функциональном анализе был академик АН Республики Узбекистан Ташмухамед Алиевич Сарымсако при активном участии профессоров Антоновского М.Я и Болтянского В.Г. (см. монографии: М.Я. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсако *Топологический полуполя*. 1960; М.Я. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков, *Топологические алгебры Буля*. 1963, и подробный обзор: М.Я. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков, *Очерк теории топологических полуполей*. Успехи математических наук. 1963. С. 185–218).

Топологическое полуполе есть это решеточно упорядоченная топологическ алгебра, являющаяся алгебраическим и топологическим аналогом хорошо известной в теории меры алгебры измеримых функций, наделенной топологией сходимости локально по мере. Топологические полуполя позволили метризовать все регулярные топологические пространства и открыли новое направление в функциональном анализе, связанное с исследованиями банаховых и гильбертовых модулей над полуполями.

Множество всех идемпотентов топологического полуполя (E, t) образует полную булеву алгебру ∇, которая в индуцированной из (E, t) топологии τ является топологическом булевским кольцом, при этом, топология τ мажорируется (o)-топологией $\tau_0(\nabla)$ в ∇. Впоследствии, полную булеву алгебру ∇, наделенную отделимой топологией $\tau \leq \tau_0(\nabla)$, относительно которой пара (∇, τ) есть топологическое булевское кольцо, стали называть топологической булевой алгеброй.

Следует отметить, что одновременно в Петербургской школе функционалы анализа активно строилась и развивалась теория нормированных и банахов решеток, и относящаяся к этому направлению теория порядково полных коммутативных алгебр. В конце 70-х годах прошлого столетия, выяснилось что топологические полуполя это есть порядково полные коммутативные алгебры, наделенные топологией, согласованной с алгебраическим операци и частичным порядком этих алгебр.

Это обстоятельство способствовали еще большему интересу к теории топологических полуполей и топологических булевых алгебр, и к всевозмож приложениям этой теории к теории меры, теории вероятностей и эргодичес теории.

В настоящее время исследования, относящиеся к теории топологических полуполей и булевых алгебр, в целом, закончились. С одной стороны, это это объясняется завершением решения многих задач, связанных с этой проблематикой. А с другой стороны, те задачи теории топологических полуполей и булевых алгебр, которые пока остались нерешенными, являют достаточно трудными и их возможное решение требует дополнительных кропотливых исследований.

Цель настоящего доклада есть аккуратное изложение нерешенных проблем
теории топологических полуполей и булевых алгебр с надеждой привлечени
исследователей к возможному их разрешению. Одновременно излагаются
аналогичные проблемы для топологических логик, являющихся некоммута
вариантом топологических булевых алгебр.

Пусть $(X, \leq)$ произвольное частично упорядоченное множество. Сеть элементов $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$ называется (o)-*сходящейся* к элементу $e \in X$, если найдутся такие возрастающая сеть $q_\alpha \uparrow e$ и убывающая сеть $p_\alpha \downarrow e$, $\{q_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$, $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$, что $q_\alpha \leq e_\alpha \leq p_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Сильнейшая из топологий в $(X, \leq)$, для которых из (o)-сходимости сетей следует их топологическая сходимость, называется (o)-*топологией* в $(X, \leq)$ и обозначается через $\tau_0(X)$.

Частично упорядоченное множество $(X, \leq)$ называется *решеткой* или *структурой*, если для любых $e, \ q \in X$ существуют точные верхняя грань $e \vee q$ и нижняя грань $e \wedge q$. Говорят, что решетка X *полна*, если для любого подмножества $Y \subset X$ существуют точные верхняя грань $\sup Y$ и нижняя грань $\inf Y$. Решетка $(X, \leq)$ называется дистрибутивной, если в ней для любых элементов e, p, q выполняется равенство $(e \vee p) \wedge q = (e \wedge q) \vee (p \wedge q)$.

Пусть X решетка с нулем (наименьшим элементом) $\mathbf{0}$ и единицей (наиболь
элементом) $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$. Отображение $e \to e^{\perp}$ из X в X называется *ортодополне*
если выполнены следующие свойства:

1). $e \leq p \Longrightarrow p^{\perp} \leq e^{\perp}$; 2). $e^{\perp\perp} = e \ \ \forall\, e \in X$; 3). $e \vee e^{\perp} = \mathbf{1} \ \ \forall\, e \in X$.

Решетка X с ортодополнением называется *логикой*, если для любых $e, \ p \in X, \ e \leq p$, существует такой элемент $q \in X$, что $e \leq q^{\perp}$ и $e \vee q = p$.

Примерами логик служат решетки всех замкнутых линейных подпространст
гильбертова пространства, а также решетки всех подмножеств фиксирован
множества.

Дистрибутивная логика называется *булевой алгеброй*. В этом случае используют обозначение $Ce = e^{\perp} \in \nabla$, $e \in \nabla$. Относительно алгебраическ операций $e\Delta q = (e \vee q) \wedge C(e \wedge q)$ и $e \cdot q = e \wedge q$ каждая булева алгебра является коммутативным кольцом с единицей $\mathbf{1}$, в котором $e^2 = e \ \forall e \in \nabla$ (такие кольца называют *булевскими кольцами*).

Согласно теореме Стоуна (см., например, Д.А. Владимиров *Булевы алгебр* 1969, Глава I, § 3) каждая булева алгебра ∇ реализуется как булева алгебра открыто замкнутых множеств вполне несвязного компакта $Q(\nabla)$, при этом, если ∇ полная булева алгебра, то компакт $Q(\nabla)$ является экстремальным (Д.А. Владимиров *Булевы алгебры.*, Глава III, § 1). Напомн что вполне несвязный компакт есть компакт, в котором базу топологии образуют открыто-замкнутые множества; такой компакт называют экстрем если замыкание всякого открытого множества в нем есть снова открытое множество. Обычно компакт $Q(\nabla)$ называют *стоуновским компактом*, отвечающим булевой алгебре ∇.

Пусть X произвольная полная логика. Функция $m : X \to [0, \infty)$, заданная на логике X, называется *внешней оценкой*, если

$$1).\ m(0) = 0; \quad 2).\ m(e) \leq m(q) \quad \forall\ e \leq q;$$

$$3).\ m(e \vee q) \leq m(e) + m(q) \quad \forall\ e,\ q \in X.$$

Говорят, что внешняя оценка *строго положительна*, если $m(e) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$. Внешняя оценка $m : L \to [0, \infty)$ называется (o)-*непрерывной*, если $m(e_\alpha) \downarrow 0$ для любой сети $e_\alpha \downarrow \mathbf{0}$, $\{e_\alpha\} \subset X$.

Говорят, что внешняя оценка внешняя оценка $m : X \to [0, \infty)$ является *оценкой*, если $m(e \vee q) = m(e) + m(q) \ \ \forall\ e,\ q \in X,\ e \wedge q = 0$. В случае когда логика X есть булева алгебра ∇, внешнюю оценку (соответственно, оценку) на ∇ обычно называют *внешней мерой* (соответственно, *мерой*).

Элементы $e, q \in X$ называют ортогональными (в случае булевой алгебры $X = \nabla$, называются дизъюнктными), если $e \leq q^{\perp}$ (равносильно: $q \leq e^{\perp}$)(в случае булевой алгебры, равносильно, $e \wedge q = \mathbf{0}$. Говорят, что логика X имеет счетный тип, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных элементов из X не более чем счетно. Если на логике X существует строго положительная оценка, то X обязательно имеет счетный тип (Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В.И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*. 1983, гл. I).

Пусть X произвольная полная логика и τ хаусдорфова топология на X, обладающая следующими свойствами:
$(T1)$. Операции $e \vee q$, $e \wedge q$ и ортодополнение $e^{\perp}$ непрерывны по совокупности переменных $e, q \in X$;
$(T2)$. Если $e_{\alpha} \downarrow \mathbf{0}$, то $e_{\alpha} \xrightarrow{\tau} \mathbf{0}$.
В этом случае, пара (X, τ) называется *топологической логикой*.

Известно, что топологическая логика (X, τ) метризуема в том и только в том случае, когда X имеет счетный тип (Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В.И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, гл. I). Кроме того, если τ_1 и τ_2 две топологии в X, относительно которых X есть топологическа логика, то обязательно верно равенство $\tau_1 = \tau_2$. Единственную топологию τ в полной логике X, относительно которой пара (X, τ) есть топологическая логика, называют *R-топологией*.

В любой топологической логике (X, τ) ее R-топология τ всегда мажорирует (o)-топологией $\tau_0(X)$. Если, при этом, X имеет счетный тип, то обязательн верно равенство $\tau = \tau_0(X)$ (Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В.И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, гл. I).

Если (X,τ) топологическая логика, и $X=\nabla$ есть булева алгебра, то пара (∇,τ) называется *топологической булевой алгеброй*. Хронологически понятие топологической булевой алгебры было введено значительно раньше, чем понятие топологической логики (см. М.Я. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков, *Топологические алгебры Буля*. 1963).

Каждая полная булева алгебра с разделяющим семейством (o)-непрерывных мер является топологической булевой алгеброй. В частности, любая полная атомическая булева алгебра есть топологическая булева алгебра относительно интервальной топологии (Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В.И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, гл. I, § 9, теорема 3).

Следует отметить, что в первоначальном определении топологической булевой алгебры в книге "Топологические алгебры Буля " требовалось дополнительно существование базиса заполненных окрестностей нуля (напомним, что множество $V \subset \nabla$ называется заполненным, если $q \leq e \in V, \; q \in \nabla \Longrightarrow q \in V$.) Впоследствии, было установлено, что это требование является излишним.

Полная логика (булева алгебра) счетного типа называется *регулярной*, если в ней выполнен следующий принцип диагонали: для любой двойной последовательности $\{e_{n,m}\} \subset \nabla$, удовлетворяющей условию $e_{n,m} \xrightarrow{(o)} e_n$ при $m \to \infty$ для любого фиксированного n, и $e_n \xrightarrow{(o)} e \in \nabla$ при $n \to \infty$, существует диагональная последовательность $\{e_{n,m_n}\}$, (o)-сходящаяся к элементу e.

Каждая топологическая логика алгебра счетного типа обязательно являетс регулярной логикой (Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В.И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, гл. I, § 10, предложение 3). В частности, любая атомическая полная булева алгебра счетного типа есть регулярная булева алгебра. В то же время, существуют неатомические полные нерегуля булевы алгебры счетного типа (см. пример в [Д.А. Владимиров, Булевы алгебры., Глава VI, § 4]).

Первая нерешенная проблема, относящаяся к теории топологических булевых алгебр, связана с существованием ненулевых (o)-непрерывных мер на таких алгебрах. В связи с этой проблемой следует вначале сказать о следующем важном факте.

Теорема 1 (Т.А.Сарымсаков, Ш.А.Аюпов, Дж.Хаджиев, В.И.Чилин, *Упорядоченные алгебры*, гл. I, § 9)

Полная логика L счетного типа является топологической логикой в том и только в том случае, когда на L существует строго положительная (o)-непрерывная внешняя оценка.

Следовательно, на любой топологической булевой алгебре счетного типа всегда имеется строго положительная (o)-непрерывная внешняя мера. До сих пор не решена следующая задача:

(A).

Всегда ли на топологической булевой алгебре счетного типа существует ненулевая (o)-непрерывная мера?

Для топологических логик проблема (A) решается отрицательно, т.е. существуют примеры топологических логик счетного типа, на которых нет ни одной ненулевой (o)-непрерывной оценки [Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В.И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, гл. I, § 8].

Как уже отмечалось выше, каждая топологическая булева алгебра счетного типа является регулярной булевой алгеброй. Справедливость обратной импликации составляет содержание следующей нерешенной задачи:

(B).

Всегда ли на регулярной булевой алгебре существует R-топология?

В направлении решения этой проблемы известен следующий результат:

Теорема 2 (Д.А. Владимиров, Булевы алгебры., Глава VI, § 4, теорема 7.)

Если на регулярной булевой алгебре ∇ существует строго положительная мера, то на ∇ существует и строго положительная (o)-непрерывная мера, в частности, ∇ допускает R-топологию.

Для топологических логик проблема (B) решается отрицательно, т.е. существуют примеры регулярных логик, для которых не существует R-топология [Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В.И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, гл. I, § 8].

Следующая нерешенная задача для топологических булевых алгебр (∇, τ) связана со сравнением R-топологии τ и (o)-топологии $\tau_0(\nabla)$. Уже отмечалось раннее, что в любой топологической булевой алгебре счетного типа (∇, τ) всегда верно равенство $\tau = \tau_0(\nabla)$. При этом имеются топологич булевы алгебры несчетного типа (например, атомические топологические булевы алгебры), для которых такое равенство также сохраняется.

Справедливость аналогичного равенства в общей ситуации есть содержание следующей нерешенной задачи:

(C).

Для каждой ли топологической булевой алгебры (∇, τ) верно равенство $\tau = \tau_0(\nabla)$?

Пусть ∇ полная булева алгебра. Обозначим через $C_\infty(Q(\nabla))$ множество всех непрерывных функций $x : Q(\nabla) \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах. При естественном определении алгебраических операций и частичного порядка в $C_\infty(Q(\nabla))$ это множество становится алгеброй над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и расширенной порядково полной векторной решеткой. Функция $\mathbf{1}_Q$, тождественно равная единице на $Q(\nabla)$, является единицей в алгебре $C_\infty(Q(\nabla))$ (см., например, Кусраев А.Г. *Мажорируемые операторы.* М. «Наука». 2003, п. 1.4.2).

Булева алгебра ∇ естественным образом отождествляется с булевой алгеброй всех идемпотентов из $C_\infty(Q(\nabla))$. При этом отождествлении элемент e из ∇ совпадает с характеристической функцией $\chi_{U(e)}$ открыто-замкнутого подмножества $U(e) \subset Q(\nabla)$, отвечающего элементу e. Обычно считают, что $\nabla \subset C_\infty(Q(\nabla))$.

Подалгебру E в $C_\infty(Q(\nabla))$ называют *заполненной подалгеброй*, если из соотношений

$$0 \leq |x| \leq |y|, \quad x \in C_\infty(Q(\nabla)), \ y \in E$$

следует, что $x \in E$. Ясно, что алгебра $C(Q(\nabla))$ всех непрерывны действительных функций, заданных на стоуновском компакте $Q(\nabla)$ являет заполненной подалгеброй в $C_\infty(Q(\nabla))$.

Имеется следующий удобный критерий для того, чтобы подалгебра E в $C_\infty(Q(\nabla))$ была заполненной подалгеброй:
Подалгебра E заполненная тогда и только тогда, когда $E \cdot C(Q(\nabla)) \subset E$.

Определение 1

Полуполем называется заполненная подалгебра E в $C_\infty(Q(\nabla))$, содержащая булеву алгебру ∇.

Каждое полуполе E обязательно содержит подалгебру $C(Q(\nabla))$, т.е. верны включения $C(Q(\nabla)) \subset E \subset C_\infty(Q(\nabla))$. Примерами полуполей служат алгебры $C(Q(\nabla))$, $C_\infty(Q(\nabla))$, а также алгебры

$$E_A(\nabla) = \{x \in C_\infty(Q(\nabla)) : x(t) = 0 \text{ для всех } t \in A\},$$

где A замкнутое нигде не плотное множество в $Q(\nabla)$.

Пусть E полуполе, и пусть t хаусдорфова топология в E, относительно которой E есть топологическое векторное пространство.

Определение 2

Пара (E, t) называется топологическим полуполем, а топология t — R-топологией на E, если выполнены следующие условия:
$(T1)$. Для любой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля $V \subset U$, что из $x \in V,\ y \in C_\infty(Q(\nabla)),\ |y| \leq |x|$ следует, что $y \in V$ (существование базиса заполненных окрестностей нуля);
$(T2)$. Если $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ и $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$, то $x_\alpha e_\alpha \xrightarrow{t} 0$ для любой сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E$;
$(T3)$. Если $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$ и $e_\alpha \downarrow 0$, то $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

Перечислим основные известные свойства топологических полуполей (E, t).

1). (E, t) метризуемо тогда и только тогда, когда булева алгебра ∇ имеет счетный тип;

2). (E, t) полное равномерное пространство тогда и только тогда, когда $E = C_\infty(Q(\nabla))$;

3). Если $t_1,\ t_2$ две R-топологии на полуполе E, то $t_1 = t_2$;

4). R-топология t на полуполе E локально выпукла тогда и только тогда, когда булева алгебра ∇ атомическая;

5). R-топология t на полуполе E нормируема тогда и только тогда, когда булева алгебра ∇ конечная;

6). На топологическом векторном пространстве (E, t) нет ни одного ненулевого непрерывного линейного функционала в том и только в том случае, когда булева алгебра ∇ не имеет атомов;

7). Топологическое полуполе (E, t) является топологическим кольцом, т.е. операция умножения в (E, t) непрерывна по совокупности переменных;
8). R-топология t на полуполе E всегда мажорируется (o)-топологией $\tau_0(E)$ в E;
9). Если R-топология t на полуполе E совпадает с (o)-топологией $\tau_0(E)$, то булева алгебра имеет ∇ счетный тип;
10). Если булева алгебра имеет ∇ счетный тип и t — R-топология на $C_\infty(Q(\nabla))$, то $t = \tau_0(C_\infty(Q(\nabla)))$;
11). Если операция сложения $x+y$ непрерывна по совокупности переменных относительно (o)-топологии в $C_\infty(Q(\nabla))$, то $\tau_0(C_\infty(Q(\nabla)))$ есть R-топология в $C_\infty(Q(\nabla))$.

Первая нерешенная проблема, относящаяся к теории топологических полуполей, связана с нахождением критерия для совпадения R-топология t на полуполе E с (o)-топологией $\tau_0(E)$. Связи между этими топологиями отражены в свойствах 8) — 11). Возникает следующая естественная гипотеза.

(D).

R-топология t на полуполе E совпадает с (o)-топологией $\tau_0(E)$ в том и только в том случае, когда $E = C_\infty(Q(\nabla))$.

Эта задача до сих пор не решена.

Следующая важная нерешенная задача в теории топологические полуполей связана с выяснением полноты системы аксиом для R-топология t на полуполе E. Известно, что нормированная топология на полуполе $C(Q(\nabla))$ порожденная равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$, удовлетворяет аксиомам $(T1)$ и $(T2)$, но не удовлетворяет аксиоме $(T3)$.

Пусть $L^\infty[0,1]$ есть полуполе всех ограниченных измеримых функций, заданных на отрезке $[0,1]$ (равные почти всюду функции отождествляются). Топология на $L^\infty[0,1]$, индуцируемая нормированной топологией из $L^2[0,1]$ удовлетворяет аксиомам $(T1)$ и $(T3)$, но не удовлетворяет аксиоме $(T2)$.

Возникает естественная следующая задача.

(E).

Существует ли полуполе E, имеющее хаусдорфову векторную топологию, удовлетворяющую аксиомам топология в $(T2)$ и $(T3)$, но не удовлетворющую аксиоме $(T1)$?

Эта задача до сих пор не решена. Напомним, что в случае топологических булевых алгебр (∇, τ) существование базиса заполненных окрестностей нуля в R-топологии τ есть следствие других аксиом R-топологии.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!