

55. *Киселев А. А., Онуфриева Л. А.* Применение биортогональных систем Чебышева и Маркова для приближения функций.— В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961, с. 181—189.
56. *Онуфриева Л. А.* О методе интерполирования Чебышева в случае большого числа данных.— Ист.-мат. исслед., 1983, вып. 27, с. 259—274.
57. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.

К ИСТОРИИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. С. Демидов

1. Введение *. Речь здесь пойдет о замечательной аналогии с алгебраическими уравнениями, во многом определившей развитие теории линейных дифференциальных уравнений на протяжении XIX в. Для самой теории алгебраических уравнений это столетие было героическим периодом в ее истории. Рядом выдающихся результатов (достаточно назвать доказательство Н. Г. Абелем неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени и теорию Галуа) было в известном смысле завершено многовековое развитие этой теории, содержание которой на протяжении столетий в значительной мере ассоциировалось со всей алгеброй. Во всяком случае, еще во второй половине XIX в. в своем широко известном «Курсе высшей алгебры» Ж. А. Серре писал: «Алгебра, по существу говоря, — Анализ уравнений» [1, с. 1]. В начале XX в. такой взгляд начнет казаться устаревшим, создастся новое понимание алгебры, как науки об (по выражению Н. Бурбаки) алгебраических структурах. Теория же алгебраических уравнений мало-помалу превратится в главу университетского курса алгебры. Но это уже в нынешнем веке, а в XIX столетии алгебраическими уравнениями заняты крупнейшие математики, к ним привлечено всеобщее внимание и каждый достигнутый здесь успех вызывает новые исследования не только в их теории, но и вовне, там, где обнаруживается благодатная почва для развития сходных идей. Такой почвой оказалась теория линейных дифференциальных уравнений. Разработка аналогии между

* Автор считает приятным долгом выразить благодарность А. П. Юшкевичу и А. Н. Паршину, ознакомившимся с рукописью и сделавшим ряд замечаний, учтенных при окончательной ее редакции.

двумя этими теориями, насколько нам известно, не становилась объектом специального историко-математического исследования, хотя отдельные ее аспекты, связанные преимущественно с работами последней трети XIX в. (в этот период соответствующие исследования, проводимые Л. Фуксом, С. Ли, А. Пуанкаре и др., становятся особо интенсивными), неоднократно обсуждались в литературе. Мы сосредоточим внимание на работах первых двух третей века, посвященных построению аналога теории наибольшего общего делителя и теории исключения для линейных дифференциальных уравнений. Именно на этом направлении были сделаны первые шаги в разработке аналогии. Начнем с предыстории вопроса — работ Ж. Лагранжа и Ж. Даламбера.

2. Теорема Лагранжа. В письме от 26 января 1765 г. Ж. Даламберу Ж. Лагранж сообщил [2, с. 30—31] о найденном им методе интегрирования уравнения

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = X(x) \quad (1)$$

в случае, когда известны $(n - 1)$ частных решений соответствующего ему однородного уравнения

$$L_n(y) = 0. \quad (2)$$

Сам метод он изложил в первых параграфах обширного мемуара «Решение некоторых задач интегрального исчисления», опубликованного в 1766 г. в третьем томе сочинений Туринской академии за 1762—1765 гг. [3]. Домножив обе части уравнения (1) на неопределенную функцию $z(x)$ переменной x , Лагранж интегрирует полученное соотношение по x :

$$\int L_n(y) z dx = \int X(x) z dx.$$

Интегрируя по частям, он находит (мы используем отличные от оригинальных обозначения)

$$A(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)}) + \int y L_n^*(z) dx = \int X(x) z dx, \quad (3)$$

где $A(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)})$ — билинейная функция y, z и их производных до порядка $(n - 1)$ включительно, а

$$L_n^*(z) \equiv (-1)^n (z)^{(n)} + (-1)^{n-1} (a_1(x) z)^{(n-1)} + \dots \\ \dots - (a_{n-1} z)' + a_n z.$$

Если известно частное решение $z = z_1$ уравнения

$$L_n^*(z) = 0$$

(так впервые появляется уравнение, названное впоследствии ¹ сопряженным уравнению (2)), то, подставляя его в равенство (3), получаем уравнение

$$A(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z_1 z_1', \dots, z_1^{(n-1)}) = \int X(x) z_1 dx$$

порядка на единицу меньшего, линейное относительно y и ее производных. Таким образом, задача интегрирования уравнения (1) сводится к интегрированию линейного уравнения порядка на единицу меньшего. Если известно p таких решений $z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_p$, то, подставляя их в равенство (3), получаем систему

$$A(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z_i, z_i', \dots, z_i^{(n-1)}) = \\ = \int X(x) z_i dx \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

исключая из которой $y^{(n-1)}, \dots, y^{(n-p+1)}$, получаем линейное уравнение порядка $(n - p)$, к интегрированию которого сводится задача интегрирования уравнения (1).

Если, наконец, известны n решений уравнения $L_n^*(z) = 0$, то, действуя аналогичным образом, можно получить общее решение уравнения (1).

В силу свойства $(L_n^*)^* = L_n$ (Лагранж его доказывает) знание n частных решений $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_n$ уравнения (2) позволяет получить общее решение уравнения $L_n^*(z) = 0$, а следовательно, n частных его решений $z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_n$, при помощи которых указанной выше процедурой Лагранж получает искомое общее решение уравнения (1).

Если известно лишь $(n - 1)$ частных решений $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_{n-1}$ уравнения $L_n(y) = 0$, то применение описанной процедуры к $L_n^*(z) = 0$ приведет к уравнению $Vz + U \frac{dz}{dx} = W$, где V, U, W — функции x и произвольных констант $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$; его интегрирование даст общее решение уравнения $L_n^*(z) = 0$, при помощи которого указанной выше процедурой интегрируется уравнение (1).

Вряд ли следует сомневаться в том, что Лагранж понимал, что частные решения, участвующие в его рассмотрении, должны быть существенно различными, однако он этого даже не оговаривает, тем более не пытается выяснить смысл этого различия (линейная независимость!). Впрочем Лагранж дает метод интегрирования уравнения (1), возможность реализации которого и будет зависеть от того, различны (линейно независимы) или нет используемые частные решения.

Заметим, что метод понижения порядка линейного дифференциального уравнения с помощью частных интегралов, сопряженного ему уравнения, получил широкое распространение в последующей литературе (см., например, [4]).

2 марта 1765 г. Даламбер сообщает [2, с. 33—34] Лагранжу свой метод интегрирования уравнения (1) в случае, когда известны $(n - 1)$ решений соответствующего уравнения (2). Этот метод он излагает в статье, озаглавленной им по договоренности с Лагранжем (см. [2, с. 35]) «Извлечение из различных писем господина Даламбера к господину де Лагранжу, написанных в 1764—1765 гг.» [5]. Если известно частное решение $y = y_1$ уравнения (2), то при помощи замены

$$y = y_1 \int z dx \quad (4)$$

Даламбер приводит его (мы используем обозначения, отличные от оригинальных) к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1} L_n \left(y_1 \int z dx \right) &\equiv L_{n-1}(z) \equiv z^{(n-1)} + b_1(x) z^{(n-2)} + \dots \\ &\dots + b_{n-2}(x) z' + b_{n-1}(x) z = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

порядка на единицу меньшего.

Если известно второе частное решение $y = y_2$ (о независимости решений Даламбер, как и Лагранж, не говорит ни слова) уравнения (2), то

$$z = z_1 \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)$$

будет частным решением уравнения (5). Тогда уравнение (5) при помощи замены

$$z = z_1 \int u dx \quad (6)$$

приводится к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} L_{n-1} \left(z_1 \int u dx \right) &\equiv L_{n-2}(u) \equiv \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + c_1(x) \frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} + \dots \\ &\dots + c_{n-3}(x) \frac{du}{dx} + c_{n-2}(x) u = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

порядка на единицу меньшего.

Если известны m ($m < n$) частных решений (линейно независимых — добавим мы), то интегрирование уравнения (1) сводится к интегрированию аналогичного уравнения порядка $n - m$.

Даламбер рассматривает неоднородное уравнение (1). Пусть известны $n - 1$ частных решений (мы добавим — ли-

нейно независимых) $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_{n-1}$ соответствующего ему однородного уравнения (2). Тогда, применяя к уравнению (1) введенный выше алгоритм понижения порядка, основывающийся на заменах типа (4), Даламбер сводит задачу к интегрированию неоднородного уравнения первого порядка. Таким образом Даламбер решает задачу интегрирования уравнения (1) при условии, что известны $(n - 1)$ частных решений соответствующего уравнения (2); искомое решение связывается с решением последнего уравнения первого порядка цепочкой равенств:

$$y = y_1 \int z dx = y_1 \int [z_1 \int u dx] dx = \dots \quad (8)$$

Метод Даламбера проще и удобнее, он широко используется и сегодня (см., например, [4, 6]).

Лагранж и Даламбер в рассмотренных выше фрагментах сосредоточили свое внимание на проблеме интегрирования уравнения (1) при условии, что известны $(n - 1)$ частных решений соответствующего однородного уравнения (2). По ходу дела они оба (различными методами) доказали следующее утверждение: если известно p (линейно независимых — добавим мы) частных решений уравнения (2), то его интегрирование сводится к интегрированию линейного однородного уравнения порядка $(n - p)$. Это утверждение (которое Либри — см. ниже — назвал теоремой Лагранжа) не выделено специально ни самим Лагранжем, ни Даламбером. Ни тот, ни другой, занятые своей конкретной задачей, не обратили внимание и на то, что знание n частных решений определяет коэффициенты уравнения (2). А два этих факта, взятые в совокупности, наводят на мысль об аналогии линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими уравнениями. Теореме Лагранжа соответствует при этом предложение, согласно которому знание p различных корней алгебраического уравнения n -го порядка сводит задачу его решения к нахождению корней уравнения порядка $(n - p)$, второму факту — выразимость коэффициентов алгебраических уравнений через его корни.

3. Мемуар Либри 1833 г. Первым, кто обратил внимание на эту аналогию и подчеркнул ее значимость, был Г. Либри. В заметке, опубликованной в 1836 г. в первом томе журнала Лиувилля, он говорил об этом так: «Я, полагаю, был первым, кто обратил внимание геометров на отношения, которые существуют между корнями алгебраических уравнений и частными интегралами линейных дифференциальных уравнений... Сходство этих двух классов уравнений распространяется очень далеко и позволяет трактовать линейные диф-

ференциальные уравнения методами, аналогичными тем, которые использовались в теории алгебраических уравнений» [7, с. 10].

Первые результаты Либри по этому вопросу содержатся во второй части «Мемуара о решении алгебраических уравнений, корни которых находятся меж собой в заданном отношении, и об интегрировании линейных дифференциальных уравнений, частные интегралы которых могут выражаться друг через друга» [8]. Этот мемуар, первая часть которого, как видно из самого заглавия, относится к теории алгебраических уравнений, был представлен им Парижской академии наук 30 сентября 1830 г. и опубликован в 1833 г. в 10-м томе журнала Крелле.

Либри начинает с доказательства теоремы Лагранжа при помощи цепочки (8) замен типа (4) — все это с точностью до обозначений совпадает с соответствующими рассуждениями Даламбера, приведенными выше. Либри на Даламбера не ссылается, представляя замену (4) и основанное на ней доказательство теоремы Лагранжа как собственное открытие. Есть, однако, очень серьезные основания полагать (см. Приложение), что Либри — превосходному знатоку математической литературы — был известен этот фрагмент, ускользнувший от внимания других математиков. Во всяком случае, поначалу эти результаты были восприняты как новейшие, и лишь в 1837 г. Ж. Лиувилль обратил внимание [9] на их принадлежность Даламберу (этой заметкой Лиувилль начинает свое выступление в печати против Либри — см. Приложение).

Однако содержание мемуара [8] в части, относящейся к теории линейных дифференциальных уравнений, не сводилось к переизложению результатов Даламбера и указанию на параллель между теоремой Лагранжа и соответствующим предложением для алгебраических уравнений как на основании далеко идущей аналогии. В разработке этой аналогии делался следующий шаг. Повторяя даламберовский ход рассуждений, Либри получил из цепочки равенств (3) громоздкую формулу, выражающую общее решение уравнения (1) через n частных решений (Даламбер исходит из знания $(n - 1)$ -го частного решения) уравнения (2) и через $X(x)$. (Либри, конечно, понимает, что эти частные решения должны быть в некотором определенном смысле «различными»², однако, как и Лагранж и Даламбер, даже не считает нужным это оговорить.)

Используя этот же алгоритм, он получает выражение для коэффициентов уравнения (2) через (линейно независимые —

надоедливо повторяем мы) частные его решения $y = y_1$, $y = y_2, \dots, y = y_n$. Замена (4) переводит уравнение (2) в уравнение (5), при этом

$$a_1 = -\frac{n}{y_1} \frac{dy_1}{dx} + b_1.$$

Следующая аналогичная замена (6) переводит уравнение (5) в уравнение (7), при этом

$$b_1 = \frac{-(n-1) \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)} + c_1.$$

Продолжая шаг за шагом эту процедуру, Либри получает в итоге следующее громоздкое выражение для a_1 :

$$a_1 = -\frac{n}{y_1} \frac{dy_1}{dx} - \frac{(n-1) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)} - \\ - \frac{(n-2) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d(y_3/y_1)}{d(y_2/y_1)} \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{d(y_3/y_1)}{d(y_2/y_1)} \right)} - \dots$$

«Мы можем, — пишет он, — с помощью подобного анализа получить выражения для всех коэффициентов $a_2, a_3, \dots, a_n$, как функций частных интегралов $y_1, y_2, \dots, y_n$; и вообще, если дано n функций x вида

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$$

(следовало бы добавить — линейно независимых. — С. Д.), то можно определить коэффициенты линейного дифференциального уравнения порядка n , которое будет иметь интегралами эти n функций; существует только одно линейное дифференциальное уравнение порядка n , которое удовлетворяло бы этому условию, как существует только одно алгебраическое уравнение определенной степени, которое имеет n данных корней» [8, с. 191].

Либри замечает также, что выражения для коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ уравнения (2) через частные его решения можно получить еще одним способом, разрешая относитель-

но $a_1, a_2, \dots, a_n$ систему алгебраических уравнений:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y_1 = 0,$$

$$\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y_2 = 0,$$

.....

$$\frac{d^n y_n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y_n = 0.$$

Исследование этой системы приводит к определителю, получившему впоследствии имя Вронского, и к понятию линейной независимости решений уравнения (2) — его Либри не приводит, ограничиваясь записью самой системы.

Он особо останавливается на характере зависимости коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ уравнения (2) от частных его решений $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_n$, подчеркивая, что a_i , как функции $y_1, y_2, \dots, y_n$, представляют «особый случай» симметрических функций, ибо они не меняют своего значения не только при перестановке y_i между собой, но и при замене y_i некоторыми их линейными комбинациями (мы выразимся точнее — если применить к $y_1, \dots, y_n$ линейную подстановку с ненулевым определителем). И здесь Либри усматривает аналогию с алгебраическими уравнениями. Как коэффициенты алгебраических уравнений являются симметрическими функциями их корней, так и коэффициенты уравнения (2) оказываются симметрическими функциями их частных решений.

Итак, в мемуаре [8] впервые приводятся формулы для выражения коэффициентов линейного уравнения (2) через его частные решения и следующая отсюда конструкция этого уравнения по заданным частным решениям — соответствующие рассуждения, правда, проводятся не вполне строго, отсутствует даже намек на то, что соответствующие частные решения должны быть в известном смысле независимыми (мы бы сказали — образовывать фундаментальную систему). К тому же выкладки и окончательные результаты выглядят чрезвычайно громоздко, ибо не используется аппарат теории определителей. Отмечается, что коэффициенты уравнения (2) являются симметрическими функциями особого рода системы (фундаментальной) его частных решений. Наконец, и это главное, мы находим здесь настойчиво подчеркиваемую и проводимую автором аналогию с теорией алгебраических уравнений.

Эта аналогия навела Либри на мысль о возможности использования априорного знания (если таковое имеется) конкретной формы зависимости между частными решениями уравнения (2) для понижения его порядка. Соответствующие рассуждения Либри довольно неясны и при буквальном прочтении могут показаться даже ошибочными. Однако мысль его, по существу, верна и лучше всего выражается приведенным им примером. Он рассматривает уравнение $d^2y/dx^2 = y$. Допустим, пишет он, нам априори известно, что два его частных решения $y = y_1$ и $y = y_2$ связаны соотношением $y_1 = 1/y_2$. Тогда $y = y_1$ будет удовлетворять также уравнению $d^2(1/y)/dx^2 = 1/y$, или, что то же самое, уравнению $d^2y/dx^2 - (2/y)(dy/dx)^2 + y = 0$. Исключая d^2y/dx^2 из двух уравнений, он получает, что $y = y_1$ должно удовлетворять уравнению первого порядка $(dy/dx)^2 = y^2$ или $dy/dx = \pm y$.

Это замечание Либри, содержащее лишь намек на некоторую неоформившуюся идею, дало Г. Фробениусу основание видеть в нем начало той линии развития, которая привела его в 1873 г. к теории приводимости дифференциальных уравнений (см. ниже, раздел 5).

4. Теорема Либри. 13 мая 1839 г. Либри предлагает Парижской академии наук «Мемуар об общей теории линейных дифференциальных уравнений с двумя переменными» [10]. В этой работе, которую следует рассматривать в контексте его конфронтации с Лиувиллем (см. Приложение), он формулирует следующее утверждение, известное впоследствии как теорема Либри: если даны два линейных однородных дифференциальных уравнения $L_n(y) = 0$ и $L_m(y) = 0$ порядков n и m ($n > m$) соответственно, относительно которых известно, что каждое решение второго является решением первого, то возможно (до всякого интегрирования) построить линейное уравнение $L_{n-m}(y) = 0$ порядка $n - m$, такое, что его решениями будут недостающие $(n - m)$ решений уравнения $L_n(y) = 0$. Таким образом, задача интегрирования уравнения $L_n(y) = 0$ распадается на две: проинтегрировать уравнения $L_m(y) = 0$ и $L_{n-m}(y) = 0$.

Доказательства своей теоремы, являющейся обобщением теоремы Лагранжа, Либри не привел, ограничившись замечанием, что он получил ее с помощью некоторого выражения, «которое соответствует в теории алгебраических уравнений разложению полинома на множители первой степени» [10, с. 735]. Довольно простое ее доказательство предложил на следующем заседании академии Лиувилль [11] (см. Приложение).

Результаты Либри в теории линейных дифференциальных уравнений были хорошо известны его современникам. Их систематическое изложение мы находим уже в вышедшем в 1844 г. втором томе «Лекций по дифференциальному и интегральному исчислению, изложенных, в принципе, согласно методам господина О. Л. Коши и расширенных в соответствии с самыми недавними работами геометров» Ф. Муаньо [12]. Особое внимание автор уделяет (лекция 36) отмеченной Либри аналогии, а также его теореме. Интересно, что в этой книге, пожалуй, впервые считается необходимым отметить, что n частных решений $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_n$ даст общее решение лишь в том случае, если n произвольных постоянных выбрать так, чтобы можно было получить произвольные значения для $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Таким образом, Муаньо, очевидно, вслед за Коши полагает за критерий общности решения возможность получения из него решения задачи Коши при произвольных начальных данных. Современная форма условий линейной независимости решений уравнения (2) с использованием определителя, получившего впоследствии имя Вронского (см. [13]), связана с работами О. Гессе (1857, [14]) и Э. Б. Кристоффеля (1858, [15]). Термин «фундаментальная система» (Fundamentalsystem) был введен Л. Фуксом (1866) [16, с. 126]. Выражение коэффициентов уравнения (2), а также конструкцию самого этого уравнения через n линейно независимых (автор называет их просто независимыми) его решений с помощью аппарата теории определителей, в частности определителя Вронского, мы находим в приложении 3 ко второму тому второго издания «Курса анализа» Ш. Штурма, вышедшего в 1864 г. Приложение написано профессором Тулузской артиллерийской школы Ф. Э. Брассином (1805—1894) (известным работами по дифференциальной и начертательной геометрии, анализу и механике) и озаглавлено «Аналогия линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с алгебраическими уравнениями» [17].

5. Результаты Брассина. В этой работе Брассин дает следующее обобщение теоремы Либри: «...если дифференциальные линейные уравнения порядка $m, m', m'', \dots$ будут иметь p общих решений, то по способу, сходному с отысканием общего алгебраического делителя, найдем уравнение $L_p(y) = 0$, из которого получим эти решения, и интегрирование данных уравнений приведет к интегрированию уравнения $L_p(y) = 0$ и интегрированию других уравнений порядка $m - p, m' - p, m'' - p, \dots$ » (цит. по рус. изд. [17, с. 367]). Для доказательства используется алгоритм, анало-

гичный алгоритму Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов³.

Руководствуясь исключительно аналогией с теорией алгебраических уравнений (Брассин постоянно это подчеркивает) (точнее, с теорией наибольшего делителя и теорией исключения для этих уравнений), Брассин получает целый ряд важных соответствующих предложений для линейных дифференциальных уравнений. Он показывает, каким образом по двум данным уравнениям $L_m(y) = 0$ и $L_p(y) = 0$ можно построить третье уравнение $L_{m+p}(y) = 0$, совокупность решений которого объединяет их решения.

Произведя в уравнении

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (2')$$

замену $y = uv$ (при $v = y_1$ она обращается в даламберовскую (4)), он записывает полученное в виде

$$L_n(v)u + Y_{n-1}(v)\frac{du}{dx} + Y_{n-2}(v) \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2u}{dx^2} + \dots \\ \dots + \left(n \frac{dv}{dx} + a_1(x)v \right) \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + v \frac{d^n u}{dx^n} = 0,$$

где $Y_{n-1}(v)$, $Y_{n-2}(v)$, $\dots$ — линейные дифференциальные операторы от v порядков $(n-1)$, $(n-2)$, $\dots$.

Э. Брассин доказывает следующую теорему: если $L_n(y_1) \equiv Y_{n-1}(y_1) \equiv \dots \equiv Y_{n-p+1}(y_1) \equiv 0$, то уравнение (2') будет иметь p решений вида $y = y_1$, $y = xy_1$, $y = x^2y_1$, $\dots$, $y = x^{p-1}y_1$. Обратно: если $L_n(y) = 0$ будет иметь p таких решений, то $Y_{n-1}(y) = 0$ будет иметь решениями $y = y_1$, $y = xy_1$, $\dots$, $y = x^{p-2}y_1$, $Y_{n-2}(y) = 0$ — $y = y_1$, $y = xy_1$, $\dots$, $y = x^{p-3}y_1$ и т. д.

На эту теорему опирается доказательство следующего утверждения: если $L_n(y) = 0$ имеет p решений $y = y_1$, $y = y_2$, $\dots$, $y = y_p$, $2q$ решений $y = z_1$, $y = xz_1$, $y = z_2$, $y = xz_2$, $\dots$, $y = z_q$, $y = xz_q$ и $3r$ решений $y = u_1$, $y = xu_1$, $y = x^2u_1$, $\dots$, $y = u_r$, $y = xu_r$, $y = x^2u_r$ так, что $n = p + 2q + 3r$, то его интегрирование сводится к интегрированию трех линейных уравнений порядков p , q , r .

Из этой же теоремы, как очевидное следствие, специально, правда, самим Брассином не отмеченное, получается следующее утверждение: если известно, что уравнение (2') имеет два частных решения $y = y_1$ и $y = y_2$, связанных между собой отношением $y_1 = xy_2$, то существует линейное дифференциальное уравнение меньшего порядка, имеющее с данным общие решения. Таким уравнением будет, очевидно, уравнение $X_{n-1}(y) = 0$. Обратил внимание на этот факт, по

существо содержащийся в работе Э. Брассина, Г. Ф. Фробениус в статье «О понятии приводимости в теории линейных дифференциальных уравнений», опубликованной в 1873 г. [18, с. 268]. Согласно Фробениусу, уравнение (2'), коэффициенты которого в рассматриваемой части плоскости являются однозначно определенными аналитическими функциями, неприводимо (*irreductibel*), если оно не имеет общих решений с дифференциальным уравнением меньшего порядка, коэффициенты которого являются однозначными аналитическими функциями в той же части плоскости. Таким образом, по терминологии Фробениуса Брассин доказал приводимость уравнения (2') при условии наличия решений $y = y_1$ и $y = y_2$, связанных между собой отношением $y_1 = xy_2$. Сам Фробениус предложил достаточно общие условия приводимости ⁴ уравнения, частным случаем которых является условие, выведенное Брассином.

В работе [18] упомянут также и Либри, первым поставивший вопрос о том, каким образом знание зависимости между частными решениями уравнения (2') можно использовать для понижения его порядка (см. выше, раздел 3).

6. Заключение. Назвав имя Фробениуса, мы вышли тем самым за границы рассматриваемого нами периода 70-х годов, отмеченных замечательными открытиями в анализе вообще и в разработке теории линейных дифференциальных уравнений в частности. Аналогия с алгебраическими уравнениями играла в этой разработке существенную роль. Вот как писал об этом в 1881 г. в предисловии к одной из первых своих работ — «Мемуару о линейных дифференциальных уравнениях» [19, с. 391—392] — П. Аппель: «Теория наибольшего общего делителя и теория исключения навели господ Либри, Лиувилля (их имена здесь по иронии судьбы свела вместе теорема Либри; см. примеч. 10. — С. Д.) и Брассина на аналогичные теории для линейных дифференциальных уравнений; рассмотрение этих вопросов было недавно возобновлено и продвинуто далее господами Л. В. Томе и Г. Фробениусом (*J. für Math.*, 1872, Bd. 74 и след.). Господин Фробениус ввел понятие неприводимости (см. раздел 5. — С. Д.) линейного дифференциального уравнения (*J. für Math.*, 1873, Bd. 76) и доказал на этот счет много важных теорем, побуждаемый, без сомнения, аналогичными теоремами теории алгебраических уравнений. Разложение полиномов на множители было источником теории разложения левой части линейного дифференциального уравнения на простые символические множители (см. Г. Флоке, *Ann. Ecole Norm* (2), 1879, vol. 8, Supplement). Фундаментальный ме-

муар господина Фукса (*J. für Math.*, 1866, Bd. 66), по-новому изложенный и дополненный господином Ж. Таннери (*Ann. Ecole Norm.* (2), 1874, vol. 3); имевший объектом исследования функции, определяемые линейными дифференциальными уравнениями, содержит не одну аналогию со знаменитым мемуаром господина В. А. Пюизе «Об алгебраических функциях» (*Sur les fonction algébriques.* — *J. math. pures et appl.*, 1850, vol. 15); эта аналогия была продолжена в направлении совершенно неожиданным в недавнем мемуаре господина Фукса (*C. r. Acad. sci. Paris*, т. ХС, р. 678, 735; *J. für Math.*, 1880, Bd. 89) «Об одном классе функций многих переменных, полученных инверсией интегралов решений линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами» (*Sur une classe des fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles*). Наконец, в ином ряду идей находится выполненное в двух заметках господина Э. Лагерра (*C. r. Acad. sci. Paris*, 1879, vol. 88, р. 116, 224) распространение теории инвариантов алгебраических форм на линейные дифференциальные уравнения». Мы добавим к сказанному раскрывшийся в XIX в. замечательный параллелизм между проблемой разрешимости в радикалах алгебраических уравнений и задачей интегрируемости в квадратурах линейных дифференциальных уравнений. Результату Абеля о неразрешимости в радикалах уравнения пятой степени соответствует здесь теорема Лиувилля (1840) о неинтегрируемости в квадратурах уравнения Риккати ⁵ (которое простой заменой сводится к линейному), а теории Галуа — теория Э. Пикара и Э. Вессьо (*Ann. Ecole Norm.* (2), 1881, vol. 10, р. 391—424), основанная на результатах С. Ли, в первую очередь на его теории непрерывных групп (в ней существенно использовалась также цитированная выше работа Апеля 1881 г.).

Столь плодотворным оказалось влияние алгебры на развитие теории дифференциальных уравнений. Влияние это не осталось односторонним — многие идеи, сформировавшиеся в связи с задачами теории линейных дифференциальных уравнений, оказались впоследствии важными компонентами в процессе создания ряда разделов современной алгебры — теории групп и алгебр Ли, дифференциальной алгебры и др. Изучение линейных дифференциальных уравнений, как пишет Н. Бурбаки, «способствовало тому, что было оценено само понятие линейности и все с ним связанное» [20, с. 75], и в итоге содействовало становлению линейной

алгебры. Исследование этого взаимодействия — одна из актуальных проблем истории математики. Его результаты, без сомнения, окажутся чрезвычайно полезными для понимания динамики взаимосвязи алгебры и анализа в ходе их развития, взаимосвязи, играющей столь важную роль в математике сегодняшнего дня.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К биографии Г. Либри

Граф Гульельмо Брутус Ицилиус Тимолеон Либри-Каруччи делла Сомайа (Guglielmo Brutus Icilius Timoléon Libri-Carucci dalla Sommaia) родился в 1803 г. во Флоренции. Он происходил из старинного тосканского рода. Еще в ранней молодости проявил большие способности к наукам, в первую очередь к математическим, и уже в двадцатилетнем возрасте занял кафедру в Пизанском университете. Ученому миру стал известен своими мемуарами по теории чисел, неопределенным уравнениям, математическому анализу, опубликованными в основном отдельными выпусками в Италии (многие из них в 30-е годы были переизданы вновь в журнале Крелле). Замешанный в одно политическое дело, вынужден был в 1830 г. эмигрировать во Францию. Благодаря своим трудам, блестящей эрудиции в истории математических наук (его работы по истории математики сыграли выдающуюся роль в развитии этой дисциплины — об этом мы еще скажем в дальнейшем), личному обаянию, он быстро и легко добился в Париже превосходного положения. Уже в 1832 г. он получил кафедру в Коллеж де Франс, а в 1833 г. был избран членом Парижской академии наук на место, освободившееся после смерти А. М. Лежандра. Впоследствии он стал профессором Сорбонны, генеральным инспектором народного образования.

Лишь постепенно стали открываться парижанам темные стороны его личности: склонность к интригам, неразборчивость в средствах, болезненное тщеславие, наконец, непомерное корыстолюбие. Со временем все больше парижских ученых, в том числе членов академии наук, становились его недоброжелателями. Среди них со временем оказался и чрезвычайно благоволивший к нему поначалу Ф. Араго. Однако мало кто решался вступить с ним в открытую борьбу. Либри умело маневрировал в академии, используя поддержку ряда ее влиятельных членов (в том числе престарелого С. Ф. Лакруа ⁶⁾), а также свои большие связи в правительстве и при дворе — он был в дружбе с крупнейшим государственным деятелем тех лет, выдающимся историком Ф. П. Г. Гизо. Открытую оппозицию к Либри возглавил молодой Ж. Лиувилль. Человек горячий, не боявшийся идти на прямые столкновения, он поставил целью разрушить влияние Либри. Свой удар он решил нанести по его репутации как математика. Надо сказать, позиция была выбрана Лиувиллем удачно. Один из крупнейших аналитиков XIX в., он без труда находил просчеты в трудах Либри — аналитика посредственного, в выводах и доказательствах которого было много приблизительного и недодуманного.

«Атаку» Лиувилль начал с публикации в 1837 г. в своем журнале заметки [9], в которой указывал, что замена (4) и опирающаяся на нее

доказательство теоремы Лагранжа, которые Либри объявил своими открытиями (и которые числил за ним Лакруа ⁷), принадлежат Даламберу и содержатся в его письме к Лагранжу, опубликованному в 1766 г. (см. выше, раздел 2). «Я не понимаю, — с ехидством заключает Лиувиль, как этот отрывок мог ускользнуть от глаз господина Либри, который столь давно занимается историей математических наук» [9, с. 246]. Весьма вероятно, что он действительно не прошел мимо зоркого глаза господина Либри, тем более что третий том туринских записок был ему, наверное, хорошо известен — как раз в нем (непосредственно перед обсуждаемым фрагментом из письма Даламбера [5]) помещен упомянутый выше мемуар Лагранжа [3].

В следующем, третьем томе своего журнала, вышедшего в 1838 г., Лиувиль выступает с критикой ⁸ старого мемуара Либри по теории тепла, представленного Институту Франции еще в 1825 г. и заслужившего одобрительный отзыв Фурье ⁹.

Либри медлит с ответом, выжидая благоприятного момента для выступления. И такой момент представился ему весной 1839 г., когда Лиувиль выставляет свою кандидатуру в академию наук на освободившееся место по разряду астрономии. 13 мая Либри предлагает академии упоминавшийся выше (см. раздел 4) мемуар [10]. Нападение — лучшая защита, конкретная цель — не допустить избрания Лиувилля в академики. Для начала нужно укрепить собственные позиции, в данном случае — пошатнувшуюся в результате действий Лиувилля его репутацию как математика. Затем поставить под сомнение компетентность противника и тем самым отпадет, во всяком случае во мнении научной общественности, необходимость отвечать на его критику, тем более что в ряде случаев отвечать было нечем: действительно имелись просчеты, ликвидировать которые Либри был не в состоянии, в частности и потому, что уже отошел от активной математической деятельности, занявшись в основном историей математики. Там же, где он находил ответ, он не забывал его дать: «Я уверяю, что это истинная правда, что я не знал этого отрывка (из письма Даламбера. — С. Д.), но я хотел бы заметить, что ни господин Лакруа, эрудиция которого столь обширна и глубока, ни сам господин Лиувиль, когда он печатал мою заметку (имеется в виду заметка [7], опубликованная в первом томе журнала Лиувилля. — С. Д.), не были знакомы с этим фрагментом... История науки столь обширна, что довольно трудно быть осведомленным во всем: господин Лиувиль (Либри точно направляет стрелу в цель. — С. Д.) доказал это сам в связи с некоторыми теоремами Абеля...» [10, с. 733].

Либри начинает свой мемуар с того, что отмечает главные результаты работы [8] 1833 г., особо подчеркивая свое первенство в выявлении и разработке аналогии линейных дифференциальных и алгебраических уравнений. Столь ценимые им раньше (см. [7]) замену (4) и основанное на ней доказательство теоремы Лагранжа, после того как они оказались открытиями Даламбера, он не ставит уже столь высоко. Не мучимый излишней скромностью, он утверждает, что к результатам мемуара [8] сводится весь прогресс общей теории линейных дифференциальных уравнений со времени появления работы Лагранжа [3] до сегодняшнего дня «...Я не забыл, — замечает он, — что профессор Политехнической школы господин Лиувиль неоднократно занимался аналогичными вопросами» [10, с. 736]. Однако его результаты, продолжает Либри, опираются на совершенно неудовлетворительную классификацию элементарных трансцендентных функций (речь идет об известной классификации Лиувилля; базируясь на ней, он доказал в 1840 г. неинтегрируемость в квадратурах уравнения Риккати, от-

вергнутой комиссией Академии наук (составленной из С. Д. Пуассона, Лакруа и самого Либри) еще в 1833 г. Таким образом, результаты эти необоснованны, поэтому, продолжает Либри основательно обругав классификацию и бросив тем самым тень на репутацию своего оппонента, как математика, — «я не должен упоминать исследования господина Лиувилля среди тех, которые представляют собой вклад в прогресс общей теории линейных дифференциальных уравнений» [10, с. 738].

И, наконец, решительный ход: «В то же время я не прекращал заниматься этим родом исследований в надежде достичь наконец построения полной теории линейных дифференциальных уравнений» [10, с. 734]. И вот, продолжает Либри, мои усилия увенчались рядом успехов и я представляю вниманию академии наук мемуар. «Невозможно было бы перечислить здесь все теоремы, которые вместе с доказательствами содержатся в этом мемуаре... я ограничусь тем, что упомяну одну, которая служит основанием моих исследований» [Там же]. И он формулирует теорему, известную в теории под его именем (см. раздел 4); прочие теоремы, даже перечислить которые он не брался, так и остались тайной для математиков, во всяком случае в скольконибудь отчетливой форме, их просто не было.

Выложив свою «козырную» карту, что по его замыслу должно было произвести сильное впечатление на присутствующих, Либри в заключение слегка коснулся критики Лиувиллем его мемуара по теории тепла. В противовес ей он процитировал отзыв Фурье и закончил мемуар в таком тоне: я-де слишком погружен в свои исследования по истории математики, не оставляю при этом занятий и самой математикой, в чем мои собратья могли только что убедиться, и мне недосуг подробнее отвечать на безосновательные наскоки молодого профессора, собственные результаты которого не внушают особого доверия. Впрочем, когда представится время, то можно будет и дать подробный ответ на его критику. «Нечего, следовательно, спешить, и я думаю, буду иметь возможность продолжать заниматься своими научными трудами: ответ всегда подоспеет ко времени» [10, с. 740—741].

Да, выступление Либри было сделано «ко времени». И хотя Лиувилль был уже широко известен как выдающийся аналитик, оно могло произвести сдвиги во мнении академиков (в первую очередь, конечно, нематематиков) и воспрепятствовать его избранию. Нужен был тактически правильный ответ. И Лиувилль начинает на следующем заседании академии с очень простого доказательства [11] «теоремы Либри»¹⁰. Уже в самом своем ответе [25] на критику Либри, помещенном в *Comptes Rendus* сразу после заметки [11], он пишет: «Так, теорема, которую Либри дает как основу своей работы и которую он выводит, по его словам, из своих новых принципов, может быть установлена очень простым способом без какой-либо предварительной теории» [25, с. 792]. Никаких же иных, новых по сравнению с мемуаром [8] результатов работа [10] не содержит. Представив присутствующим Либри как математика в невыгодном свете, не стараясь при этом, конечно, быть излишне объективным, Лиувилль далее отверг его критику своей классификации трансцендентностей. Накал полемики, в которой принял также участие Ж. Ш. Ф. Штурм [26], переходящей иногда в перепалку с использованием довольно резких выражений, стоящих на грани допустимого в столь почтенном собрании, ощущается даже при чтении, очевидно, сильно приглаженного текста протоколов в 8-м томе *Comptes Rendus*. Мы не будем здесь погружаться в атмосферу этого скандала, в которой, надо заметить, оба противника чувствовали себя вполне в своей стихии. Скажем только, что поле боя оста-

лось за Лиувиллем: 3 июня он был избран в академию. История эта нанесла ощутимый удар по престижу Либри¹¹, однако положение его оставалось прочным, а научный авторитет достаточно высоким. В 1837—1841 гг. выходят четыре тома его «Истории математических наук в Италии», составившие ему славу одного из крупнейших историков математики XIX в. Он по-прежнему активен, на заседаниях академии вступает в многословные и резкие по тону дискуссии с М. Шалем по вопросам истории математики и астрономии. Ничто, казалось бы, не предвещало катастрофы, разразившейся над ним в 1848 г.: вскрылось совершаемое им на протяжении ряда лет (в течение которых по поручению правительства он обследовал архивы и библиотеки Франции) хищение большого количества ценных книг и документов на общую сумму около 500 000 франков. Вовремя предупрежденный влиятельными друзьями, Либри вместе с награбленным успел пересечь Ламанш и со стороны наблюдать за судебным процессом, в результате которого он был заочно приговорен к 10 годам тюрьмы. Из Англии, где продажей украденного он составил себе большой капитал, он продолжал в письмах к министрам юстиции и народного просвещения, а также членам Института Франции отстаивать свою невиновность, безуспешно добиваясь пересмотра судебного решения, сделавшего его, по его же словам, жертвой судебной ошибки в суматохе революции. Умер Либри в Италии в 1869 г.

Шум вокруг «дела Либри» был настолько велик, что в нем утонула его слава историка математики и его более скромные математические результаты. Нельзя, однако, сказать, что о его результатах забыли вовсе. Чаще всего, естественно, вспоминают его исследования по истории математики. Значительное место отвел им в своем докладе «Об историографии математики» на открытии Второго международного конгресса математиков в Париже в 1900 г. М. Кантор¹². Из математических результатов¹³ Либри наибольшим вниманием в последующей литературе пользовались его достижения в области теории линейных дифференциальных уравнений. Об их изложении в курсе Муаньо и дальнейшем развитии Э. Брассином, а также о ссылке на его работу [8], сделанной Фробениусом, мы говорили выше (см. разделы 3 и 4). Не забыты теоремы Либри и Брассина в фундаментальном обзоре Э. Вессю «Элементарные методы интегрирования. Изучение обыкновенных дифференциальных уравнений с формальной точки зрения», опубликованном в 1910 г. во французском издании энциклопедии математических наук [29] (см. также ее первоначальный немецкий вариант [30]). В обзоре Вессю Либри упоминается также и в связи с построением им линейного однородного уравнения по его частным интегралам. Однако особое значение для развития теории линейных дифференциальных уравнений имели, конечно, не сами эти результаты, аналитически достаточно простые, но особо подчеркнутая им аналогия этих уравнений с алгебраическими, которую он начал систематически разрабатывать. Читая работы Либри о линейных дифференциальных уравнениях, сталкиваешься с интересным (с точки зрения психологии творчества) типом математика — слабого аналитически, но способного неким «шестым чувством» угадывать правильное направление развития вопроса и даже предчувствовать некоторые нетривиальные фрагменты будущих теорий (вроде «теории неприводимости» Фробениуса), оказываясь при этом не в состоянии выразить свои предчувствия в сколько-нибудь отчетливой форме.

Примечания

- ¹ Сам термин «сопряженное» (adjungiert) уравнение принадлежит Л. Фуксу (J. Math., 1877, vol. 76, S. 183).
- ² В работе [7], еще раз разъясняя идею доказательства теоремы Лагранжа, Либри, между прочим, замечает, что нельзя, например, взять $y_1 = y_2$
- ³ Так, например, линейное однородное уравнение, решения которого — общие решения двух данных уравнений $L_{m+p}(y) = 0$ и $L_m(y) = 0$, строится следующим образом. Составляется цепочка равенств:

[illegible]

где $K, \dots, M$ — функции от x . Если $L'_m(y) = NL_m(y)$, где N — функция x , то все решения уравнения $L_m(y) = 0$ — решения уравнения $L_{m+p}(y) = 0$. Если $L'_m(y) \neq NL_m(y)$, то составляется следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} L_{m+1}(y) &= M \frac{d}{dx} (L_m(y)) + PL_m(y) + L_{m-1}(y), \\ L_m(y) &= Q \frac{d}{dx} (L_{m-1}(y)) + RL_{m-1}(y) + L_{m-2}(y), \\ &\vdots \end{aligned}$$

где P, Q, R — функции x . Если, продолжая этот процесс, получим на некотором шаге равенство

$$L_{k+1}(y) = S \frac{d}{dx} (L_k(y)) + S' L_k(y),$$

где S, S' — функции x , то искомым уравнением будет $L_k(y) = 0$. Если в итоге этот ряд равенств приведет к ненулевому остатку $y \cdot \Phi(x)$, то исходные уравнения не имеют общих решений (кроме $y \equiv 0$).

- ⁴ Фробениус доказал [18, с. 268—269], что если один из двух различных интегралов $y = y_1$, $y = y_2$ однородного линейного уравнения (2'), коэффициенты которого однозначные аналитические функции, связан с другим соотношением типа

$$y_1 = q_0 \frac{d^k y_2}{dx^k} + q_1 \frac{d^{k-1} y_2}{dx^{k-1}} + \dots + q_k y_2,$$

где q_i — однозначные аналитические функции x , то такое уравнение приводимо.

- ⁵ Это соответствие в рамках аналогии алгебраических и линейных дифференциальных уравнений выявилось лишь после появления работ С. Ли, в которых была поставлена задача построения аналога

теории Галуа для дифференциальных уравнений. К 1840 г. — моменту появления результата Лиувилля — результаты Галуа были практически неизвестны. Основные работы Галуа были опубликованы Лиувиллем в 1846 г. в XI томе его журнала.

- ⁶ Из письма Лиувилля П. Г. Лежен-Дирихле от 7 июля 1840 г.: «Нет нужды говорить Вам, что господин Лакруа полностью за Либри (речь идет о вакансии на кафедру рациональной механики Сорбонны, где основными претендентами оказались Штурм и Либри. — *С. Д.*). Нужно же так случиться, что человек, столь честно послуживший, заслуживший все наше уважение, заканчивает свою карьеру рабом и игрушкой подлого интригана» [21, с. 60].
- ⁷ В пятом издании своего известного «Элементарного трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» [22, *Corrections et additions*] Лакруа писал по этому поводу: «Господин Либри... развил теорию линейных дифференциальных уравнений чрезвычайно элегантно и плодотворным способом».
- ⁸ «Я выяснил, — пишет Лиувилль, — что формулы, данные господином Либри, не точны, а общий принцип, на который он опирается, неприемлем» [23, с. 351].
- ⁹ «Метод, которому он (Либри. — *С. Д.*) следовал, и результаты, которых он достиг, заслуживают полного внимания геометров» (цит. по [10, с. 740]).
- ¹⁰ В связи с доказательством, предложенным Лиувиллем, Либри заявил следующее: «Господин Лиувилль представил академии доказательство одной из теорем, которую я объявил на последней сессии. В тот самый момент, когда господин неприменный секретарь объявил об этом академии, я срочно написал доказательство на маленьком листочке бумаги — это доказательство было немедленно подписано Араго; я должен сказать, что доказательство Лиувилля, которое мне сообщили на следующий день, отличается от моего лишь в деталях, не имеющих особой важности» [24, с. 799].
- Формулируя в 1844 г. теорему Либри, Муаньо писал: «Господин Лиувилль первым опубликовал доказательство этой фундаментальной теоремы». И он приводит именно это доказательство. Так, по иронии судьбы два врага оказываются связанными в истории одной теоремой.
- ¹¹ Из письма Лиувилля к Дирихле, написанного между 6 мая и 7 июля 1840 г.: «Есть в этом, без сомнения, нечто, что сто раз компенсирует досаду, которую я испытал, занимаясь господином Либри, человеком, которого начинают презирать в академии почти настолько, насколько он этого заслуживает» [21, с. 55—56].
- ¹² М. Кантор писал: «Бесспорно, Либри сослужил Историографии Математики огромную службу. Он изучил большое количество рукописей, из которых дал выдержки, большей частью очень точные... он обладал выдающимся даром слова. Его «История математики в Италии» читается как роман даже в тех ее частях, где она таковым не является» [27, с. 36—37]. Добавим, что, приводя большие выдержки из средневековых латинских рукописей, Либри ввел в оборот историков многие малоизвестные тогда произведения средневековых европейских и арабских авторов, среди них, к примеру, сочинения Моххамеда ибн Мусы и Леонардо Пизанского.
- ¹³ О претензиях Либри в связи с доказательством утверждения Гаусса о делении лемнискаты на равные части см. вышедшую недавно книгу Е. П. Ожиговой [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Serret J. A.* Cours d'algèbre supérieure. 5^e éd. P., 1885. T. 1.
2. *Lagrange J. L.* Oeuvres. P., 1882. Vol. XIII.
3. *Lagrange J. L.* Solution de différents problèmes de calcul intégral.— *Miscellanea Taurinensia*, 1762—1765 (1766), vol. III, p. 179—380; Oeuvres. P., 1867, vol. I, p. 471—668.
4. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. 6-е изд. М.: Гостехиздат, 1953.
5. *D'Alembert J. L.* Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. De La Grange écrites pendant les années 1764 et 1765.— *Miscellanea Taurinensia*, 1762—1765 (1766), vol. III, p. 381—396.
6. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е изд. М.: Наука, 1964.
7. *Libri G.* Note sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences. — *J. math. pures et appl.*, 1836, t. I, p. 10—13.
8. *Libri G.* Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particuliers peuvent s'exprimer les unes par les autres.— *J. reine und angew. Math.*, 1833, Bd. X, S. 167—194.
9. *Liouville J.* Sur une lettre de d'Alembert à Lagrange.— *J. math. pures et appl.*, 1837, t. 2, p. 245—247.
10. *Libri G.* Mémoire sur la théorie générale des équations différentielles linéaires à deux variables.— *C. r. Acad. sci.*, P., 1839, t. 8, p. 732—741.
11. *Liouville J.* Demonstration d'un théorème de M. Libri.— *C. r. Acad. sci. Paris*, 1839, t. 8, p. 790—792.
12. *Moigno F. N. M.* Leçons de calcul différentielle et de calcul intégral rédigées principalement d'après les méthodes de M. A.-L. Cauchy et étendues aux travaux les plus récents des géomètres. P., 1844. T. 2.
13. *Петрова С. С., Романовска Д.* Об универсальном ряде Гёне-Вронского.— *Ист.-мат. исслед.*, 1977, вып. 24, с. 158—175.
14. *Hesse O.* Über die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.— *J. reine und angew. Math.*, 1857, Bd. 54, S. 227—273.
15. *Christoffel E. B.* Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.— *J. reine und angew. Math.*, 1858, Bd. 55, S. 281—299.
16. *Fuchs L.* Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.— *J. reine und angew. Math.*, 1866, Bd. 66, S. 121—160.
17. *Brassinne E.* Analogie des équations différentielles linéaires à coefficients variables avec les équations algébriques.— In: Sturm J. Ch. F. Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique. 2^e éd. P., 1864, t. 2; см. также: *Штурм К.* Курс анализа: Рус. пер. со 2-го изд. СПб.; М., 1868, Т. 2.
18. *Frobenius G. F.* Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.— *J. reine und angew. Math.*, 1873, Bd. 76, S. 236—270.
19. *Appell P.* Mémoire sur les équations différentielles linéaires.— *Ann. Ecole Norm. Ser. 2*, 1881, t. 10, p. 391—424.
20. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики/Пер. И. Г. Башмаковой; Под ред. К. А. Рыбникова. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

21. Correspondance entre Liouville et Dirichlet. Publié par J. Tannéri.— Bull. sci. math. Sér. 2, 1908, t. 32, p. 47—62.
22. *Lacroix S. F.* Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral. 5^e éd. P., 1837.
23. *Liouville J.* Sur un mémoire de M. Libri, relatif à la théorie de la chaleur.— J. math. pures et appl., 1838, vol. 3, p. 350—354.
24. *Libri G.* Réponse de M. Libri aux Observations de M. Liouville.— C. r. Acad. sci. Paris, 1839, t. 8, p. 798—801.
25. *Liouville J.* Observations sur le Mémoire de M. Libri, inséré dans le Compte rendu de la dernière séance.— C. r. Acad. sci. Paris, 1839, t. 8, p. 792—798.
26. *Sturm J. Ch. F.* Note de M. Sturm, relative au Mémoire de M. Libri inséré dans le précédent Compte rendu.— C. r. Acad. sci., Paris, 1839, t. 8, p. 788.
27. *Cantor M.* Sur l'historiographie des mathématiques.— In: C. r. 2^e Congr. Intern. Math. P., 1902, p. 27—42.
28. *Ожигова Е. П.* Шарль Эрмит. Л.: Наука, 1982.
29. *Vessiot E.* Méthodes d'intégration élémentaire: Étude des équations différentielles ordinaires au point de vue formel.— In: Encycl. sci. math. pures et appl. Paris; Leipzig, 1910, t. 2, vol. 3, fasc. 1, p. 58—170.
30. *Vessiot E.* Gewöhnliche Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden.— Encykl. math. Wissenschaften, Leipzig, 1900, Bd. II, T. 1, H. 2/3, S. 230—293.

О. ХЕВИСАЙД И РАЗВИТИЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

С. С. Петрова

1. Введение. Символическое, или, как его иначе называют, операционное, исчисление часто связывают с именем английского физика О. Хевисайда (1850—1925), с успехом применившего символические методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также некоторых видов уравнений с частными производными, которые он получил, рассматривая задачи электротехники.

Эти методы основаны на том, что оператор дифференцирования рассматривается как алгебраический множитель при искомой функции, и тем самым решение дифференциального уравнения представляется как результат применения обратного оператора к правой части уравнения. Для нахождения явного вида решения Хевисайд разработал приемы (речь о них впереди), с помощью которых искомое решение дифференциального уравнения легко находилось без квадратур.