

Связь между алгебрами Винера и рядами Фурье

Роальд М. Тригуб

§ 1 Банаховы алгебры Винера

§ 2 Тригонометрические ряды Фурье

§ 3 Линейные методы суммирования рядов Фурье
(сходимость по норме)

§ 4 Суммируемость почти всюду и некоторые нерешённые вопросы

§ 1 Банаховы алгебры Винера и Бёрлинга

Если μ — конечная комплекснозначная борелевская мера на $\mathbb{R}$, а $|\mu|$ — её полная вариация, то

$$W(\mathbb{R}) = \left\{ f : f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} d\mu(t), \|f\|_W = |\mu|(\mathbb{R}) \right\}$$

$$W_0(\mathbb{R}) = \left\{ f : f(x) = \widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-itx} dt, \|f\|_{W_0} = \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \right\}$$

$$W_1(\mathbb{R}) = \left\{ f : f = f_0 + c, \|f\|_{W_1} = \|f_0\|_{W_0} + |c|, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$W^+(\mathbb{R}) = \left\{ f \in W(\mathbb{R}) : \|f\|_W = f(0) \right\}$$

$$W_0^*(\mathbb{R}) = \left\{ f : f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g(t) dt, \|f\|_{W_0^*} = \int_0^{\infty} \operatorname{esssup}_{|x| \geq t} |g(x)| dt \right\}$$

(алгебра Бёрлинга–1949)

Свойства алгебр Винера и W^+ собраны в обзоре Е. Liflyand, S. Samko, R. Trigub (Anal., Math. Phys, 2012), а свойства алгебры Бёрлинга см. в статье Е. S. Belinsky, Е. R. Liflyand, R. M. Trigub (J. Fourier Anal, Appl., 3:2 (1997))

A.

Если $f \in W(\mathbb{R})$, то f равномерно непрерывна и сходится несобственный интеграл $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t} dt$ ограниченно, но не обязательно абсолютно.

Если f выпукла на $[a, +\infty)$, $f(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$

$$\int_a^\infty f(t)e^{-itx} dt = \frac{i}{x} f\left(a + \frac{\pi}{|x|}\right) e^{-iax} + \theta F(|x|), \text{ где } F \text{ убывает на } [2, +\infty), \int_2^\infty F \leq V_a^\infty(f)$$

(полная вариация), а $|\theta| \leq c$. Функции из $W_0^* \subset W_0$ могут убывать к нулю сколь угодно медленно.

B.

$$\text{Если } f \in W_0 \cap L_1(\mathbb{R}), \text{ то } \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}) \text{ и } \|f\|_{W_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}|.$$

(Локальное свойство. Отличие только около ∞).

Если $f \in W(\mathbb{R})$, $f(\infty) = 0$ и $f \in V$ около ∞ , то $f \in W_0(\mathbb{R})$ (см. R. Trigub, E. Belinsky, Fourier Analysis and Approximation of Functions (Kluwer-Springer, 2004)). В кратном случае – вариация по Витали.

C. (достаточные условия)

$$\text{Если } f \in AC_{loc}(\mathbb{R}), f_0(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |f(t)| \text{ и } f_1(x) = \operatorname{esssup}_{|t| \geq |x|} |f'(t)| < \infty,$$

$$A_1 = \int_1^{\infty} f_1(x) \log \frac{2}{x} dx < \infty \text{ и } A_{01} = \int_1^{\infty} \left(\int_1^{\infty} f_0(x) f_1(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} dt < \infty, \text{ то } \|f\|_W \leq c(A_1 + A_{01})$$

C₁

Если $A_1 < \infty$, $f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ ($\alpha > 0$), $f'(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ ($\beta \in \mathbb{R}$), а $\alpha + \beta > 1$, то $f \in W_0(\mathbb{R})$. Условие $\alpha + \beta < 1$ не является достаточным.

C₂

Если f и $f' \in L_2(\mathbb{R})$, то $f \in W_0(\mathbb{R})$ (Титчмарш–Бёрлинг). Уже известно, что в других случаях условие $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ не является достаточным, что проверено на одном важном примере (см. введение к вышеупомянутому обзору 2012).

Если $f \in L_p(\mathbb{R})$ ($1 < p < \infty$), $f' \in L_q(\mathbb{R})$ ($1 < q < \infty$), а $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, то $f \in W_0(\mathbb{R})$ (См. кратный случай в Yu. Kolomoitsev, E. Liflyand, 2013).

D

Если $f \in W(\mathbb{R})$ ($W_0(\mathbb{R})$, $W^+(\mathbb{R})$), а l_f — кусочно-линейная непрерывная функция, определяемая значениями $l_f(k) = f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, (ломаная), то $\|l_f\|_W \leq \|f\|_W$ ($\|l_f\|_{W_0} \leq \|f\|_{W_0}$, $l_f \in W^+(\mathbb{R})$, соответственно).
R. R. Goldberg, JAT, 3 (1970), E. Liflyand–R. Trigub (Constr. Apr, 2021).

Применения, доступные в настоящее время, приведены в § 2.

E

Если $|x|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$, а $\frac{d-1}{2} \in \mathbb{N}$, то $f_d(|x|) \in W_0(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда при $t \geq 0$ $\left(t^{\frac{d}{2}-1} f_d(\sqrt{t})\right)_{t=0}^{(k)} = 0$ ($0 \leq k \leq \frac{d-3}{2}$) и $f_1(|x|) \in W_0(\mathbb{R}^1)$, где $f_1(\sqrt{t}) = \sqrt{t} \left(t^{\frac{d}{2}-1} f_d(\sqrt{t})\right)^{\left(\frac{d-1}{2}\right)}$. В случае $\frac{d}{2} \in \mathbb{N}$ производные полуцелого порядка (см. УМЖ, 2010).

§ 2 Тригонометрические ряды Фурье

Если $f \in L_1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, то ряд Фурье имеет вид $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k e_k$, $e_k = e^{ikt}$,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Теорема 1

Ряд $\sum_k c_k e_k$ является рядом Фурье меры (функции) тогда и только тогда, когда $\exists \varphi \in W(\mathbb{R})$ ($\varphi \in W_0(\mathbb{R})$) с условием $\varphi(k) = c_k$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Кроме того, вариация меры на $\mathbb{T}$ равна $|\mu|(\mathbb{T}) = \int_{\mathbb{T}} d|\mu| = \min_{\varphi} \|\varphi\|_W$ ($\varphi(k) = c_k, k \in \mathbb{Z}$) и $\min$ достигается при $\varphi_0(x) = \int_{\mathbb{T}} e^{-itx} d\mu(t)$, а $\mu \geq 0 \Leftrightarrow \exists \phi \in W^+$ (см. 2015, Mathnet.ru).

В силу свойства D этот критерий можно проверять на одной ломаной с узлами (k, c_k) , $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2

1. Ряд $\sum c_k e_k$ — ряд Фурье функции из $AC(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \exists \varphi \in W_0(\mathbb{R})$ с условием $\varphi(k) = c_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), при которой и $\varphi_1 \in W_0(\mathbb{R})$, где $\varphi_1(x) = x\varphi(x)$.

2. Ряд $\sum c_k e_k$ — ряд Фурье функции из $V(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \exists \varphi \in W_0(\mathbb{R})$, а $\varphi_1 \in W(\mathbb{R})$.

Теорема 3 (новые достаточные условия)

- 1) Если $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{k=m}^{\infty} \sup_{|k| \geq m} |c_k| \sup_{|k| \geq m} |c_k - c_{k+1}| \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, то $\sum_k c_k e_k$ — ряд Фурье.
- 2) Если последовательность $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty} \in l_p$ при $p \leq 2$, то $\sum c_k e_k \in L_2$, а если только при $p \in (2, +\infty)$, а $\{c_k - c_{k+1}\}_{-\infty}^{\infty} \in l_q$ и $q \in \left(0, 1 + \frac{1}{p-1}\right)$ (или $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$), то ряд $\sum_k c_k e_k$ — ряд Фурье.

Следствие

Условие $\sup_{|k| \geq m} |c_k| \sup_{|k| \geq m} |c_k - c_{k+1}| = O\left(\frac{1}{m \log^{3+\varepsilon} m}\right)$ является достаточным при $\varepsilon > 0$ и только в этом случае.

Теорема 4

Если $\sum_k c_k e_k \sim d\mu$, $\lim_{|k| \rightarrow \infty} c_k = 0$ и $\sum_k |c_k - c_{k+1}| < \infty$, то $\sum_k c_k e_k$ — ряд Фурье.

А теперь идём от рядов Фурье к алгебрам.

Теорема 5

Для любой $f \in W_0(\mathbb{R})$ $\exists$ чётная функция $g \nearrow +\infty$, для которой и $gf \in W_0(\mathbb{R})$.

Доказательство основано на одной теореме Салема о рядах Фурье.

§ 3 Линейные методы суммирования (сходимость по норме C и L_1)

Фейер (1904) рассмотрел следующие средние рядов Фурье ($(C, 1)$ -метод суммирования):

$$\sigma_n(f, x) = f(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)_+ \widehat{f}_k e^{ikx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Абель-Пуассон: $f_r(x) = \sum_k r^{|k|} \widehat{f}_k e^{ikx} \xrightarrow{r \nearrow 1} f(x).$

Это две свёртки f с положительными ядрами Фейера и Пуассона, т.е. $(1 - |x|)_+$ и $e^{-|x|} \in W_0^+(\mathbb{R})$.

Общий критерий [добавлена непрерывность почти всюду]

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ограничена и непрерывна почти всюду.

Для того чтобы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(f) = f$, $\Phi_\varepsilon(f) \sim \sum_k \varphi(k\varepsilon) \widehat{f}_k e_k$ на всём пространстве $C(\mathbb{T})$ (или $L_1(\mathbb{T})$), необходимо и достаточно: $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0) = 1$ и $\varphi \in W(\mathbb{R})$ (после возможного исправления в точках разрыва).

Ещё в 1968 возник вопрос о сравнении методов суммирования. Н. Shapiro, автор.

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p \asymp \|f - f_r\|_p \quad \left(r = 1 - \frac{1}{n+1}, p \in [1, \infty]\right).$$

(двустороннее неравенство с абсолютными положительными константами)

Теорема 6 (общий принцип сравнения)

Если φ и $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывны, из условия $\psi(x) = 1$ следует, что $\varphi(x) = 1$ (это и необходимо), а "переходная функция" $g = \frac{1 - \varphi}{1 - \psi}$ после доопределения по непрерывности принадлежит $W(\mathbb{R}^d)$, то при любом $p \in [1, \infty]$ и $\varepsilon > 0$

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p \leq \|g\|_W \|f - \Psi_\varepsilon(f)\|_p.$$

Если $\psi \in W_0(\mathbb{R})$, то множитель $\|g\|_W$ при $p = \infty$ уменьшить нельзя. См. монографию 2004

Вопрос: Когда при $D = \frac{d}{dx}$ $\|Q(D)f\|_{L_q} \leq \gamma \|P(D)f\|_{L_p}(\gamma(f))$, $\deg P = r \in \mathbb{N}$,
 $\deg Q = s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p, q \in [1, +\infty]$, $f \in W_p^r$.

Получены три критерия: на множествах $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ (2007).

Теорема 7 (критерий для полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$).

Если $p \neq 1$ и (или) $q < \infty$, то $\sup_{z: \operatorname{Re} z \leq 0} \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right| < \infty$.

Если $p = 1$ и $q = \infty$, то $s < r$ и $\forall \delta > 0$ $\sup_{z: \operatorname{Re} z \leq -\delta} \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|Q(ix)|}{|P(ix)| + |P'(ix)|} < \infty$.

Пример точного неравенства для полуоси

Если $P(z) = (z - \lambda)Q(z)$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то $\forall p \geq 1$ $\|Q(D)f\|_p \leq \left(\frac{p-1}{\rho \operatorname{Re} \lambda} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|P(D)f\|_p (L_p(\mathbb{R}_+))$.

3.1. Приближение класса функций. $\sup_{f: \|f^{(r)}\| \leq 1} \|f - U(f)\| = ?$

U — линейный ограниченный оператор в $L_p(\mathbb{T})$.

Следуя идее Марцинкевича, вводим оператор $U_0(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} U(f^\theta; x) d\theta$

($f^\theta(x) = f(x + \theta)$). Тогда $U_0(f) \sim \sum_k \lambda_{k,n} \hat{f}_k e_k$ (мультипликатор, свёртка).

А так ещё $\|f_\theta^{(r)}\| = \|f^{(r)}\|$, то $\sup_{\|f^{(r)}\| \leq 1} \|f - U_0(f)\| \leq \sup_{\|f^{(r)}\| \leq 1} \|f - U(f)\|$.

Пример

Если при $r > 0$ производная $f^{(r)} \sim \sum_k e^{i\frac{r\pi}{2} \operatorname{sign} k} |k|^r \widehat{f}_k \mathbf{e}_k$, а $\widetilde{f} \sim -i \sum_k \operatorname{sign} k \widehat{f}_k \mathbf{e}_k$, то при a и $b \in \mathbb{C}$, $a \pm bi \neq 0$,

$$\left\| f - \sum_k \varphi(k\varepsilon) \widehat{f}_k \mathbf{e}_k \right\|_p \leq \varepsilon^r \|g\|_{w_0} \|af^{(r)} + b\widetilde{f}^{(r)}\|_p,$$

где $g(x) = \frac{(1-\varphi(x))e^{-i\frac{r\pi}{2} \operatorname{sign} x}}{(a+bi \operatorname{sign} x)|x|^r}$.

Бернштейн (1911) (класс $\operatorname{Lip} \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$)

$$\sup_{f: \omega(f, h) \leq h^\alpha} \|f - \sigma_n(f)\|_\infty \asymp \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in (0, 1)); \quad \frac{\log n}{n} \quad (\alpha = 1).$$

Джексон в диссертации (1911) построил полиномы $\tau_n(f) = \sum_{|k| \leq n} c_k \mathbf{e}_k$:

$$\|f - \tau_n(f)\|_\infty \leq c\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_\infty.$$

Первая книга по теории приближений (Валле-Пуссен, 1919).

Модуль гладкости порядка r и шага $h > 0$ ($\omega_1 = \omega$) $\omega_r(f, h)_p = \sup_{0 < \delta \leq h} \|\Delta_\delta^r f(\cdot)\|_p$ ввёл

Бернштейн, а основные свойства — Маршо (1927).

С. Б. Стечкин (1951): $\min_{\tau_n} \|f - \tau_n(f)\|_p \leq c(r)\omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$.

См. монографии А. Ф. Тимана (1960) и R. A. DeVore, G. G. Lorentz (1993). Bernstein almost proved Jackson's theorem (p. 236), т.к. главный случай — это класс $\operatorname{Lip} 1$.

Ядра полиномов Фейера–Джексона — это чётные степени ядра Дирихле D_n (с соответствующей нормировкой) и применяются оценки сверху моментов ядра.

Для ядра γD_n^3 так получается $O\left(\omega_2\left(f, \frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right)\right)$ и не лучше.

А если применять принцип сравнения, когда учитываются коэффициенты ядра, т.е. спектр интегрального оператора, то получаем точный ответ: $O\left(\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right)\right)$ (2009).

Но прежде мне удалось ввести линеаризованный модуль гладкости

$$\tilde{\omega}_r(f, h)_p = \frac{1}{h} \left\| \int_0^h \Delta_\delta^r f(\cdot) \right\|_p$$

($\sup$ по $\delta \in (0, h]$ заменён на интегральное среднее по $\delta \in (0, h]$):

$$\tilde{\omega}_r(f, h)_p \leq \omega_r(f, h)_p \leq c(r) \tilde{\omega}_r(f, h)_p.$$

Есть разные неравенства типа Маршо (модули гладкости нецелого порядка в разных нормах, см. Yu. Kolomoiytsev, S. Tikhonov, Mem. AMS. arxiv.1711.08163). А. Ф. Тиман (1957) неравенство Маршо вывел из прямых и обратных теорем теории приближений.

Асимптотикой приближения классов функций после статьи Колмогорова (1935) занимались многие математики (С. М. Никольский, Б. С. Надь, С. А. Теляковский и др. См. В. П. Заставный, В. В. Савчук (2011)).

Примеры (1965)

$$\left\| f(\cdot) - \frac{1}{2} \left(S_n \left(f; \cdot + \frac{\pi}{2n} \right) + S_n \left(f; \cdot - \frac{\pi}{2n} \right) \right) \right\| \asymp \omega_2 \left(f, \frac{1}{n} \right),$$

$$\left\| f(\cdot) - \frac{1}{2} \left(S_n \left(f; \cdot \right) + S_n \left(f; \cdot + \frac{\pi}{n} \right) \right) \right\| \asymp \omega \left(f, \frac{1}{n} \right).$$

Оценки сверху были известны ранее.

При некоторой функции $\varphi = \varphi_r$ и средних типа Рогозинского-Бернштейна ($\varepsilon = \frac{1}{n}$)
 $\|f - \Phi_\varepsilon(f)\| \asymp \tilde{\omega}_r(f, \varepsilon) \asymp \omega_r(f, \varepsilon)$. См. там же.

В. В. Жук (1967): $\|f - \sigma_n(f)\| \asymp \omega_2 \left(f, \frac{1}{n} \right) + n\omega_2 \left(\tilde{F}, \frac{1}{n} \right)$.

Strong converse inequalities – так часто называют после статьи (Ditzian–Ivanov (1991)) такие двусторонние оценки приближения, напр., известными полиномами.

Для полиномов Бернштейна-Стечкина (1951) введен специальный модуль гладкости (2013). Тем самым получен ответ на вопрос В. И. Иванова (2011).

В случае средних Бохнера–Рисса на $\mathbb{T}^d$ ($r \in \mathbb{N}$, $\delta > \frac{d-1}{2}$, $\varepsilon > 0$)

$$\left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 - \varepsilon^{2r} |k|^{2r})_+^\delta \hat{f}_k e_k \right\| \asymp \tilde{\omega}_{2r}^0(f, \varepsilon) \asymp \sup_{0 < \delta \leq \varepsilon} \|(\Delta_{2,\delta}^+)^r f(\cdot)\|,$$

где $\tilde{\omega}_{2r}^0(f, h) = \left\| \int_{|u| \leq 1} \sum_{\nu=0}^{2r} (-1)^\nu \binom{2r}{\nu} f(\cdot + (\nu - r)hu) du \right\|,$

$\Delta_{2,\delta}^+ f(x) = \sum_{j=1}^d (f(x - \delta e_j) - 2f(x) + f(x + \delta e_j))$. Подробнее — в обзоре 2020.

Теорема 8 (2020)

Пусть $\alpha > 0$, $2m > \alpha$ и $m_\alpha = \max \{k : k\alpha < 2m\}$. Если $\varphi(0) = 1$, $\varphi^{(2m)} \in V \cap \text{Lip } \delta$ ($\delta > 0$) на $\left[0, \frac{2}{3}\right]$, при $x \geq \frac{1}{3}$ $\varphi \in V \cap \text{Lip } \delta$ (локально) и при $x \rightarrow +\infty$

$|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| = O\left(\frac{1}{x}\right)$, то $\forall f \in C(\mathbb{T})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$f(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(\varepsilon^\alpha |k|^\alpha) \widehat{f}_k e^{ikx} = -2 \sum_{k=1}^{m_\alpha} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \frac{1}{C_{1+k\alpha}} \int_1^\infty \frac{\Delta_{2u\varepsilon}^{2m} f(x)}{u^{1+k\alpha}} du + O(\omega_{2m}(f, \varepsilon)),$$

где $\Delta_{2h}^k f(x) = \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (-1)^\nu f(x + (k - 2\nu)h)$,

а при $q > 1$ $C_q = C_q(m) = (-1)^m 2^{2m+1} \int_0^\infty \frac{\sin^{2m} t}{t^q} dt$.

Связь между рядами и интегралами Фурье

Пусть $n \in \mathbb{Z}$ и при целом $r \geq 0$ f и $f^{(r)} \in V[n, \infty)$, а $f^{(\nu)}(\infty) = 0$ ($0 \leq \nu \leq r$). Тогда при $x \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=n}^\infty f(k) e^{ikx} = \int_n^\infty f(t) e^{itx} dt + \frac{1}{2} f(n) e^{inx} + e^{inx} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(-i)^{\nu+1}}{\nu!} h^{(\nu)}(x) f^{(\nu)}(n) + \frac{\theta}{\pi^r} V_n^\infty(f^{(r)}),$$

где $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{x}{2}$, а $|\theta| \leq 3$.

При $x \rightarrow 0$ получаем формулу Эйлера–Маклорена. Ранее при $r = 1$, когда сумма

Некоторые нерешённые вопросы

Колмогоров, Лузин, Carleson (JCM–1966), Hunt.

Представляя доклад Карлесона на Конгрессе в Москве, Колмогоров сказал, что это лучший результат в анализе за последние 10 лет.

Гипотезу о сходимости почти всюду ряда Фурье любой функции из L_2 Лузин высказал в 1913.

См. J. Arias de Reyna, Pointwise Convergence of Fourier Series, Lecture Notes, 1785 (2002), Springer, p. 180.

Когда $\forall f \in L_1(\mathbb{T})$ почти всюду $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(f, x) = f(x)$?

Лебег: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, x) = f(x)$ во всех точках x с условием:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0 \quad (\text{точки Лебега или } I\text{-точки}).$$

Критерий для общих сингулярных интегралов получил
Д. К. Фаддеев–1936.

Для свёрточных операторов $\Phi_\varepsilon(f)$ критерий такой: $\varphi(0) = 1$, $\varphi \in W_0^*(\mathbb{R})$.
Более широкое множество — это точки дифференцируемости интеграла

$$F(x) = \int_0^x f \text{ (} d\text{-точки)}.$$

Из суммируемости в d -точках следует суммируемость в l -точках, а из суммируемости в l -точках следует сходимость на $C(\mathbb{T})$ и далее $L_1(\mathbb{T})$.

Хан (1916): средние σ_n в d -точках могут расходиться.

Харди: при $\alpha > 1$ $\sigma_n^\alpha(f, x) \rightarrow F'(x)$.

Теорема 9 (критерий для σ_n , 2016)

Для того чтобы для $f \in L_1(\mathbb{T})$ в d -точке x этой функции
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, x) = F'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Фурье

непрерывной функции $F_x(t) = \frac{1}{t} \int_x^{x+t} f(u) du$ сходилась при $t = 0$.

Для вывода отсюда результата Хана применён пример Лебега (Бари, гл. I, §46).

Теорема 10 (общее достаточное условие, 2021)

Пусть $\varphi \in W_0(\mathbb{R})$ (это и необходимо). Если ещё $\varphi(0) = 1$ и $\varphi'_1 \in W_0(\mathbb{R})$ ($\varphi_1(x) = x\varphi(x)$), то $\forall f \in L_1(\mathbb{T})$ во всех её d -точках $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(f, x) = F'(x)$.

При этом условие $\varphi'_1 \in W_0(\mathbb{R})$ не является необходимым, а $\varphi'_1 \in W(\mathbb{R})$ не является достаточным.

Примеры суммируемости в d -точках

Методы Рисса ($\varphi(x) = (1 - |x|^\alpha)_+^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$), Гаусса–Вейерштрасса ($\varphi(x) = e^{-|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$), Пикара ($\varphi(x) = \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Средние Рогозинского–Бернштейна могут расходиться.

Марцинкевич (1938) доказал сходимость на $C(\mathbb{T}^2)$ средних арифметических квадратных частных сумм двойных рядов Фурье и сходимость почти всюду для $f \in L_1 \log_+ L_1(\mathbb{T}^2)$. Л. В. Жижиашвили (1968), используя максимальную функцию Харди–Литтльвуда, доказал сходимость почти всюду $\forall f \in L_1(\mathbb{T}^2)$. В точках Лебега сходимости может не быть (2018).

Заметим, что для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ($d \geq 2$) есть точки Лебега двух типов. Критерии для финитных φ см. Э. С. Белинский (1975).

Рассмотрим теперь один нелинейный метод суммирования — сильное суммирование (Харди, Литтльвуд): $\rho_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |f(x) - S_k(f, x)| \geq |f(x) - \sigma_n(f, x)|$.

Пример

$$\sup_{f: \omega(f, h) \leq h^\alpha} \|\rho_n(f)\| \asymp \sup_{f: \omega(f, h) \leq h^\alpha} \|f - \sigma_n(f)\|.$$

При какой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_1^\infty \forall f \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left\| \sum_{k=1}^m |f(\cdot) - S_{n_k}(f, \cdot)| \right\|_\infty = 0 ?$$

Салем (1955) доказал достаточность степенного роста n_m и общее необходимое условие: $\log n_m = O(\sqrt{m})$.

Оказалось, что при условии выпуклости $\{n_k\}$ это необходимое условие и достаточное (Загородний–Тригуб (1979), Карлесон (1983), а сообщение в Будапеште в 1979).

Обобщение на кратный случай (частные суммы по кубам и др.) — О. И. Кузнецова (1987). См. также Э. С. Белинский (1984).

Сильные средние в точках Лебега могут и расходиться (Харди и Литтльвуд (1913)), а почти всюду сходятся всегда (Марцинкевич).

О. Д. Габисония (1973) указал множество на $\mathbb{T}$ полной меры, на котором есть

сходимость (γ -точки):
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{[2\pi n]} \left\{ \frac{n}{k} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(x+t) - f(x)| dt \right\}^2 = 0.$$

I Сильное суммирование.

$\|f - \sigma_n(f)\|_\infty = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f = \text{const}$, а $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty = O\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \tilde{f} \in \text{Lip } 1$
(Алексич, 1941).

Каков порядок и класс насыщения для $\rho_n(f)_\infty$?

Каков специальный модуль непрерывности ω^* , при котором $\|\rho_n(f)\|_\infty \asymp \omega^*(f, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \searrow 0$ и не зависит от f ?

II Суммируемость почти всюду. Лакуны.

D. Gat (2019) доказал, что если $n_{k+1} > n_k \left(1 + \frac{1}{k^\delta}\right)$ ($k \in \mathbb{N}$, $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$), то почти всюду $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| f(x) - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m S_{n_k}(f, x) \right| = 0$. Это хороший результат. Но давно поставлен вопрос о такой сходимости во всех точках Лебега (Zalcwasser, 1936).

III Сгруппированные ряды.

Для какой последовательности $\{n_k\}_1^\infty$ для любой $f \in V(\mathbb{T})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{|m|=n_k+1}^{n_{k+1}} \widehat{f}_m e_m \right| \in L_1(\mathbb{T})?$$

Ответ (критерий) уже найден: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k+1}} \log(n_{k+1} - n_k + 1) < \infty$.

Достаточность (в другой форме) доказал С. А. Теляковский, а необходимость — автор (2007). См. ещё обзор С. А. Теляковского (2013).

Новый вопрос, как я считал в докладе.

$$\text{Когда для всех } f \in \text{Lip } \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \quad \sum_{k=1}^{\infty} \max_x \left| \sum_{|m|=n_k+1}^{n_{k+1}} \widehat{f}_m e^{imx} \right| < \infty ?$$

Но, как сообщил С. Ю. Тихонов, этот вопрос уже давно решён

В. Н. Темляковым

[[V.N.Temlyakov, On absolute summation of Fourier series by subsequences, Analysis Mathematica, 8 (1982), 71–77.

- Белинский Э. С., Теория функций, функциональный анализ и приложение, Харьков, № 23, (1975), 3–12.
- Belinskii E. S., Anal. Math., 10:4, (1984), 275–282.
- Carleson L., Stud. Math. P. Turan, Budapest, (1983), 411–413.
- Ditzian Z., Ivanov K. G., J. D. Anal. Math., 61, (1991), 61–111.
- Gat D., Constr. Appr., 49, (2019), 59–101.
- Goldberg R. R., J. Appr. Theory, 3, (1970), 149–155.
- Hahn H., Jahresbericht der D. M. V., v. 25, (1916), 359–366.
- Kolomoitsev Yu., Liflyand E., Studia Math., 214:1, (2013).
- Кузнецова О.И., Proc. of the Seminar I.N. Vekua inst. Appl. Math, № 7, (1992).
- Загородний Н. А., Тригуб Р. М., Сб. Теория функций и отображений, Наукова думка, Киев, (1979), 97–101.
- Trigub R.M., East J. Appr., 13:1, (2007), 1–6.
- Trigub R.M., East J. Appr., 15:1, (2009), 25–50.
- Тригуб Р. М., Укр. матем. журнал, 72:7, (2020), 971–996.
- Trigub R.M., Operator Theory and Harmonic Anal., v. 1, Springer, (2021).