

$\mathbb{Z}$ -модели пространств флагов

глава 2

симплектические точки

$SU(n)$
непрерывный предел

$\mathbb{Z}$ -модели на флагах
(конструкция Haldane
'1981 $SU(2) \rightarrow S^2$)

Ian Affleck

- meron
- fractional instanton

Flag manifold $\mathbb{Z}$ -models: spin chains
and integrable theories

I. Affleck, D. Bykov, K. Wanner
arXiv: 2101...

глава 1

Общие пом. свойства пространств флагов

- G/H $\rightarrow$ компактен
 $\rightarrow$ полнотелен

... В-поле и т.д. (тензоры)

глава 3

интерпретации
моделей

с кинематр.
терм-пространствами
($\exists$ непрерывные
В-поле)

gauge linear
 $\mathbb{Z}$ -model

модели
Гросса-Неви

замкнути форми $\approx H^2(M, \mathbb{K})$

Теория представлений $SU(n)$

— механика лент в абелевом
канон. поле

$\int A \downarrow$

комплексное квантование

(теория Бернштейн-Ботта-Вейла)

— осцилляторы Швингера-Виллера

Семпл. формы на $\mathcal{F} \leftrightarrow$ кр-е лент
(класс. кр-е)

компоненты состоят для $SU(n)$

↓
конструктивный интеграл для символьных
основ

" " "
($\delta \rightarrow \infty$)

↓
представление

— представление Дайсона-Максвелла
для символьных операторов
комбинаторный порядок
... семпл. формы на них

$$GL(n, \mathbb{C})$$

Пространство / многообразие фазов в $\mathbb{C}^n$
 $\mathbb{CP}^{n-1}$ расслоением $G_{K,n}$

$$(w_1, \dots, w_n) \neq 0$$

$$\lambda (w_1, \dots, w_n), \lambda \in \mathbb{C}^*$$

$$\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$$

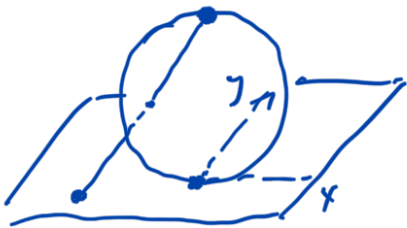
$$\{ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1 \}$$

$$w_1 \neq 0 \Rightarrow w_1 = 1$$

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$(1; w)$$

стереогр.
проекции



$$x + iy = w$$

$$w_1 + iw_2 = \frac{2w}{1 + |w|^2}$$

$$w_3 = \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2}$$

$$h_i = \frac{w^+ \bar{z}_i w}{w^+ w}$$

$$, \text{ где } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

огн. координаты

$$\sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 1$$

$$S^{2n-1}$$

*

мод.
координаты

$$i=1 \quad \exists \text{ сечение } U(1) \subset \mathbb{C}^n$$

$$S^{2n-1}/U(1) \cong \mathbb{CP}^{n-1} \quad \text{расщепление Хопфа}$$

$$(w_1, \dots, w_n) \sim e^{i\alpha} (w_1, \dots, w_n)$$

$$\mathbb{CP}^{n-1} = \{ L \subset \mathbb{C}^n \mid \dim_{\mathbb{C}} L = 1 \}$$

$$G_{k,n} = \{ L^{(k)} \subset \mathbb{C}^n \mid \dim_{\mathbb{C}} L^{(k)} = k \}$$

$$\{ L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{m-1} \subset \mathbb{C}^n \}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} L_k = d_k$$

$$d_k < d_{k+1}$$

цепочка флагов
типа $(d_1, \dots, d_{m-1})$

- однородные кр-ва
 $GL(n, \mathbb{C})$

$$\mathcal{F} = GL(n, \mathbb{C}) / \mathbb{P}$$

стабилизатор модуля гамма-факта

$$\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$$

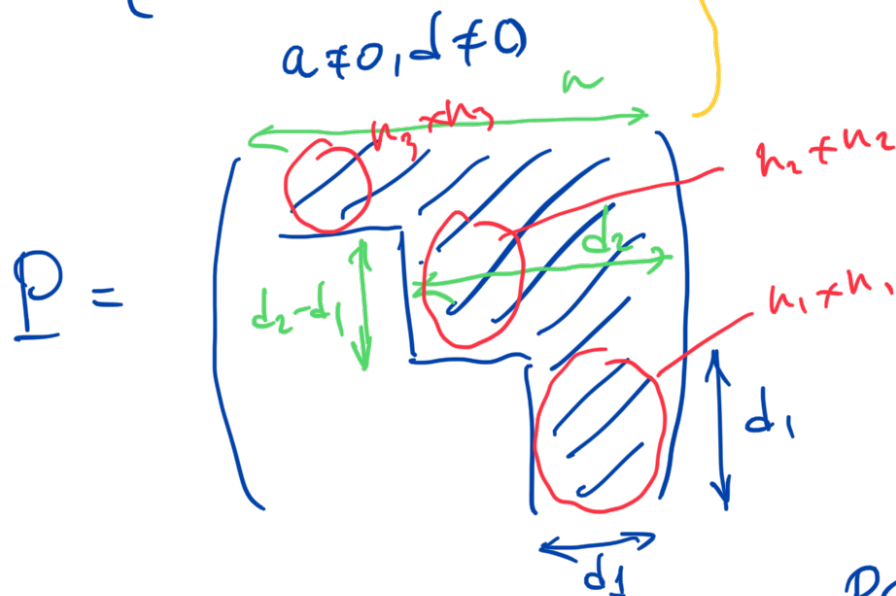
$$\text{Span} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\dots (a) \Rightarrow c=0$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} \subset GL(2, \mathbb{C})$$

$$d_1 = 1, d_2 = 2$$



Параметры

номера

$$P \subset GL(n, \mathbb{C})$$

B - боравык
номера

$$P = B \Leftrightarrow \text{кр-во } n \text{ -го } d_1 = 1, d_2 = 2, \dots, d_k = k \dots$$

Унитарное представление

Матрицы в $\mathbb{C}^n$

$$\text{Ортонормировка: } L_2 = L_1 \oplus L_1^\perp$$

$$L_3 = L_2 \oplus L_2^\perp$$

$U(n)$ трансформации на наборах
линейных номеров

мы не знаем
универсальной

размерности $n_1 \dots n_m$
 $n_1 = d_1, n_2 = d_2 - d_1, \dots, n_k = d_k - d_{k-1}$

$$d_k = \sum_{i=1}^k n_i$$

$$F = \frac{U(n)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_m)}, \quad \sum_{i=1}^m n_i = n$$

(+ комм. структура)

- G/H $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{h}$ отн. некоему скалярному

$G =$ группа

$$F = \frac{SU(n)}{S(U(n_1) \times \dots \times U(n_m))}$$

↙

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_m \end{pmatrix} \quad \det \tilde{g} = 1, \text{ т.е. } \tilde{g} \in SU(n)$$

1-форма Маурера-Картер

$$\omega = -g^{-1}dg, \quad g \in G$$

$\hat{g}_1 + \hat{g}_m$

$$g(x) \mapsto g \circ g(x) = g(\tilde{x}) \underline{h(x)}$$

$$g \mapsto gh, \quad h \in H$$

$$\underline{j_m \mapsto h^{-1} j_m h}$$

x — координата на G/H

h m J $g(x): G/H \hookrightarrow G$
 Справедливо H -inv. тензор на m
 $T^{a_1 \dots a_s}$, $a_1, \dots, a_s = 1 \dots \dim(m)$

$$T := T^{a_1 \dots a_s} (j_m)_{a_1} \dots (j_m)_{a_s}$$

G -inv. тензор на G/H пара 's'.
 (= однородный) $(j_m)_a \rightarrow h_a (j_m)_b$

$$\mathfrak{g} = h \oplus m, \quad m \neq h$$

$$[h, h] \subset h \quad (\text{логично})$$

$$(*) \quad [h, m] \subset m \quad \left. \begin{array}{l} \text{(редуктивно)} \\ \text{абсолютно} \end{array} \right\}$$

$\exists$ ненулевые элементы

$$[h_0, m_1] = m_2 + h_1$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 m h

$$1. \tilde{h} \in h$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

$$\langle \tilde{h}, [h_0, m_1] \rangle = \langle \tilde{h}, h_1 \rangle$$

"

$$- \langle [h_0, \tilde{h}], m \rangle = 0$$

$\uparrow$
 h

$$\langle \tilde{h}, h_1 \rangle = 0 \quad \forall \tilde{h}$$

$$\Rightarrow h_1 = 0$$

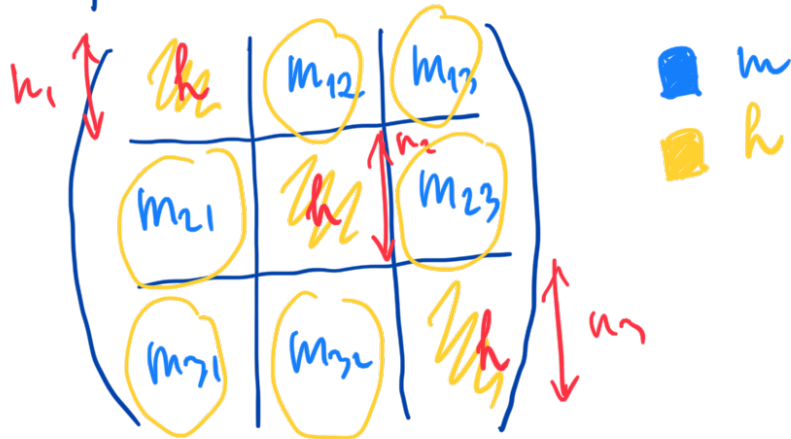
$$\text{Следств. из леммы: } [m, m] \subset h$$

... это НЕ так!

Для пространства в одну ось

тип-во. фазов. симплек. $\leftrightarrow m=2$
(расщеплен)

аннотация m и h представлена на m .



$$m_{12} = h_1 \times h_2$$

$$m_{13} = h_1 \times h_3 \dots$$

$$m_C = \bigoplus_{A \neq B} m_{AB}$$

неприводим. $sp-1$
(Superalgebra)
или $U(n_A) \times U(n_B)$

$$m_{AB} \rightarrow g_A m_{AB} g_B^\dagger$$

$$j_m = \sum_{A \neq B} j_{AB} \cap m_{AB}$$

$$ds^2 = \sum_{A < B} g_{AB} \text{Tr}(j_{BA} j_{AB})$$

самый общий матрица на $\mathcal{F}$

$$a_{AB} > 0$$

$$\Omega = \sum_{A < B} \Omega_{AB} \text{Tr} (j_{BA} \wedge j_{AB})$$

самый общий inv. 2-формы (B-поле).

$SU(m)$
-inv.

$$\# \text{ параметров} = \frac{m(m-1)}{2} \quad G_{\mu\nu}$$

$$\frac{m(m-1)}{2} \quad \Omega_{\mu\nu}$$

симм. кр-во : $m=2 \rightarrow$

$$\begin{matrix} 1 & G_{\mu\nu} \\ 1 & \Omega_{\mu\nu} \end{matrix}$$

(матрица эрмит. с помощью до расширения)

Замкнуты (симм.) формы на $\mathcal{F}$

$$\# \text{ параметров} = m-1 \ll \frac{m(m-1)}{2}$$

$$\Omega = \sum_{A < B} \Omega_{AB} \text{Tr} (j_{AB} \wedge j_{BA})$$

$$d\Omega = 0$$

$$\dots + 0 = 0$$

CP^1 2-разм
с топ. инв. $\theta = 2\pi S$

$U(1)$ -inv.

$$\rightarrow \underline{\Omega_{AB} = \rho_A - \rho_B}$$

$$\Omega_{AB} = \rho_A - \rho_B$$

$$(\rho_1 \dots \rho_m) \bmod (1 \dots 1)$$

$$\Omega = \text{Tr}(\rho \hat{j} \hat{j})$$

$$\rho = \text{Diag}(\rho_1 \dots \rho_m)$$

Формула Кирхгофа
на прямой.
орбите.

$$\mathcal{F} = \text{орбита элемента } \rho' = \\ = \{ g \rho g^{-1}, g \in G/H \}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \rho_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 & & \\ & \tilde{\rho}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \tilde{\rho}_m \end{pmatrix}$$

и строки

полный фаз (и строки)

$$\tilde{\rho}_i \neq \tilde{\rho}_{j'} \text{ при } i \neq j' \Leftrightarrow \Omega \text{ симметричен.}$$

$$\mu = g \rho g^{-1} = \text{отобр. пометки для генераторов } G \text{ на } G/H$$

$$g = \text{su}(n)$$

классический аналог симметрии

$$(\rho, \mu, \Omega)$$

T - оператор. μ - мера
 T корр. Ω : ν - вект. поле на M ,
 отв. гл. T

$$\Omega(\cdot, \nu) = d\mu \quad \uparrow \text{отображение моментов}$$

$$T_a \in \mathfrak{g}$$

$$\bullet \quad d\langle \mu, T_a \rangle = \Omega(\cdot, T_a)$$

μ - "произведение" для расслоенных групп
 $G \curvearrowright (M, \Omega)$

$$\mathbb{CP}^{n-1} \quad (u_1 \dots u_n) : \sum_{i=1}^n |u_i|^2 = 1$$

$$\bullet \quad \mu = \overline{u} \otimes u - \frac{1}{n} \|u\|^2 \in \mathfrak{su}_n$$

$G_{K,n} \quad u^{(1)} \dots u^{(n)}, \quad \overline{u^{(i)}} \otimes u^{(j)} = \delta^{ij}$

$$\bullet \quad \mu = \sum_{i=1}^K \overline{u^{(i)}} \otimes u^{(i)} - \frac{K}{n} \|u\|^2$$

Служ. данные:

- коммутативная алгебра

- quiver

- когомология $H^2(F, \mathbb{R})$

- гомология расслоения

- теплообразование (т.е. в биохимии).