

О плотнейшей упаковке шаров в размерности 8

Весна 2021

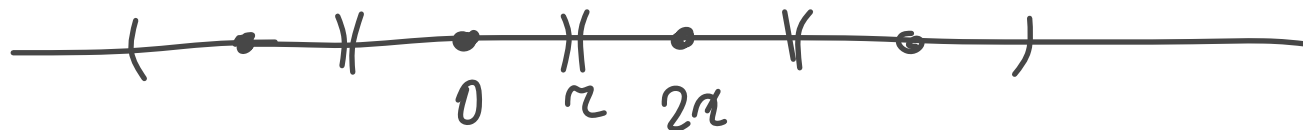
Лекция 1.

Задача: рассл. - или $\mathbb{R}^n$ со станд. - а метрикой. Пусть $B(x, R)$ - шар радиуса R с центром в точке x .

$$(B(0, R) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| \leq R\}).$$

Нос сколько плотно можно заполнить $\mathbb{R}^n$ непересекающимися шарами одинакового радиуса?

$n=1$:



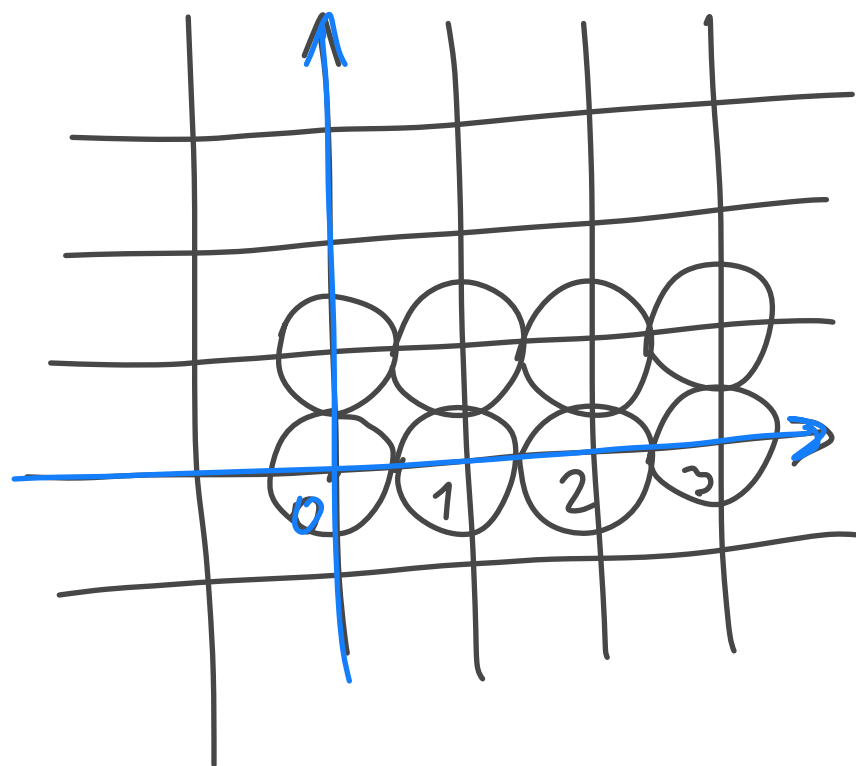
ρ — плотность покрытия.

Здесь $\rho = 1$.

Замечание:

Поскольку шары у нас одинаковые, то можно для покрытия задавать центры шаров. При этом минимальное расстояние между центрами — это максимально возможный диаметр шаров в нашей задаче.

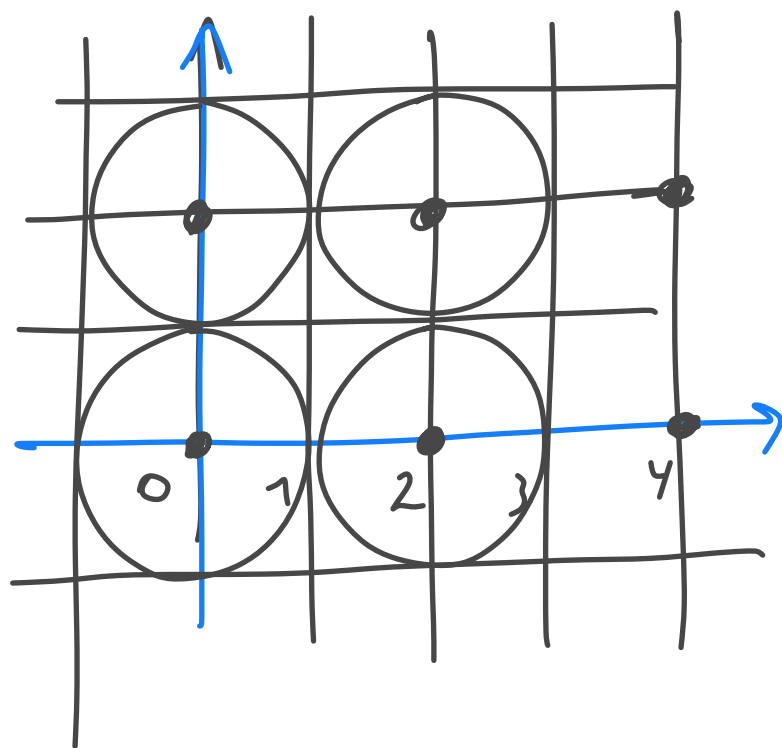
$n=2$:



$\mathbb{Z}^2$ задаёт центры, берём
шары (круги) радиуса $\frac{1}{2}$.

$$\rho_{\mathbb{Z}^2} = \frac{\pi}{4}.$$

А давайте растянем $\mathbb{Z}^2$ и упакуем $\mathbb{R}^2$
непересекающимися кругами максимально
возможного диаметра с центрами в
растянутой решётке. Какова новая
плотность?

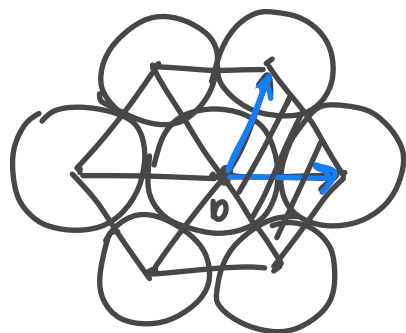


Центры задаются
точками из $2\mathbb{Z}_2$.
При этом диаметр
шаров равен 2.

и плотность не изменилась: $\rho = \frac{\pi}{4}$.

Положив теперь под словом „упаковка“ —
мн-во центров, можно считать, что
упаковки **эквивалентны**, если одна
получается из другой поворотом,
отражением либо гомотетией.

Рассм. в $\mathbb{R}^2$ упаковку $A_2 = \{ \langle (1,0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \rangle_{\mathbb{Z}} \}$
 шарами радиуса $\frac{1}{2}$.



$$\rho_{A_2} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,90689\dots$$

1773, Ж.-Л. Лагранж: A_2 — оптимальная упаковка среди решеток.

1890–1892, А. Тейлор: A_2 — плотнейшая среди всех упаковок $\mathbb{R}^2$.

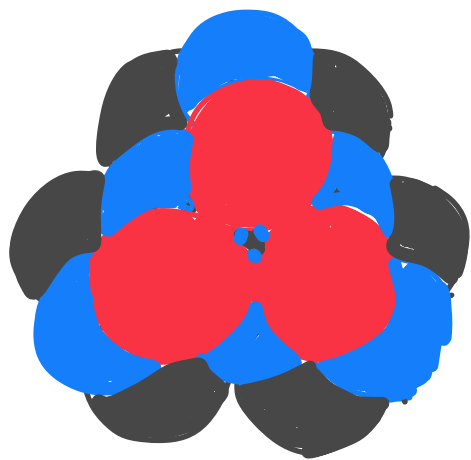
(г-во не вполне полное).

1940, Л. Ф. Тóth: полное г-во про A_2 .

$n=3$: Задача Кеплера (1611 г.).

$$\rho_{\mathbb{Z}^3} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}.$$

Рассм. упаковку D_3 :



$$\rho_{D_3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74048$$

1831 г., К. П. Гаусс: D_3 - плотнейшая
среди регулярных.

1998 г., Т. Хейлс: плотность упаковки
в $\mathbb{R}^3$ $\leq \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$

Что известно в больших размерностях?

$$\rho_{\mathbb{Z}^n} = \text{vol } B_n\left(\frac{1}{2}\right), \text{ где } \text{vol } B_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot r^n$$

Так, при фиксированном n

$$\rho_{\mathbb{Z}^n} \ll \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}} = \left(\frac{\pi e}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n^{n/2}} \ll n^{-cn}, \quad c < \frac{1}{2}, \quad n \geq n(c).$$

Утв.:

$\rho_n \geq 2^{-n}$, где ρ_n — максимальная плотность упаковки в $\mathbb{R}^n$.

Д-во:

рассм. произв.-ую упаковку X в $\mathbb{R}^n$ шаров радиуса $r = \frac{1}{2}$ такую, что более нельзя добавить ещё один шар, не пересекая данных.

Тогда увеличив радиус шаров до 1, мы покроем или все $\mathbb{R}^n$.
Объём каждого шара увеличится в 2^n .

Обозначим через $C(0, R) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq R \}$.

Получим:

$$\rho_X = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}(X \cap C(0, R))}{\text{Vol } C(0, R)} = 2^{-n} \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{2^n \text{Vol}(X \cap C(0, R))}{\text{Vol } C(0, R)} \geq 2^{-n}.$$

1905 г., H. Minkowski:

$$\rho_n \geq 2 \cdot 2^{-n} \quad (\text{можно } \geq \frac{S(n)}{2^{n-1}}).$$

1922 г., K. Ball:

$$\rho_n \geq 2n \cdot 2^{-n}$$

2012 г., A. Venkatesh:

$$\rho_{n_k} \geq \frac{e^{-\delta}}{2} n_k \ln \ln n_k \cdot 2^{-n_k}$$

для некот. $n_k \rightarrow +\infty$.

1978 г., Т. Кабатянский, В. Левинштейн:

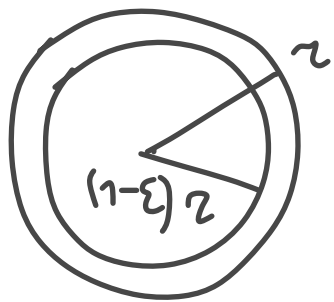
$$\rho_n \leq 2^{-0,599n}$$

Но: явных построений хороших упаковок даже как в трив.-ом утв.-ии нет!

Замечание 1:

$$\frac{\text{Vol } B(0, (1-\varepsilon)r)}{\text{Vol } B(0, r)} = (1-\varepsilon)^n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

$1 > \varepsilon > 0$



Т.е. узкая область границы становится содержательной в задаче об упаковках.

Замечание 2:

в больших размерностях уже перемётчатые упаковки дают более плотное покрытие, нежели известные перемётчатые.

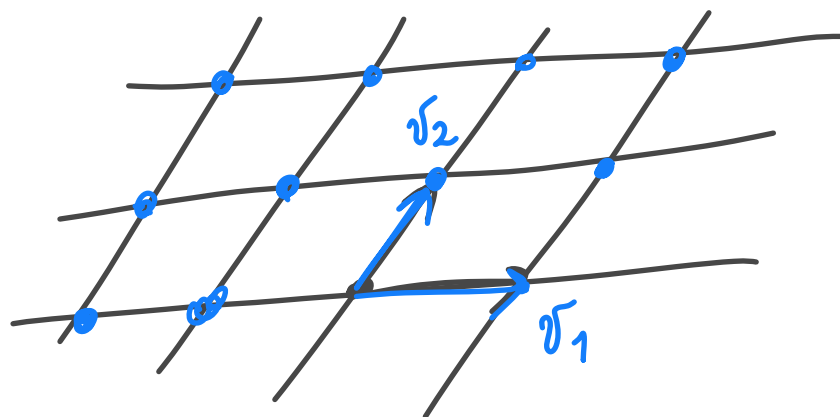
Решётки, периодические упаковки,
плотность упаковок.

Опр.: Λ - решётка в $\mathbb{R}^n$, если

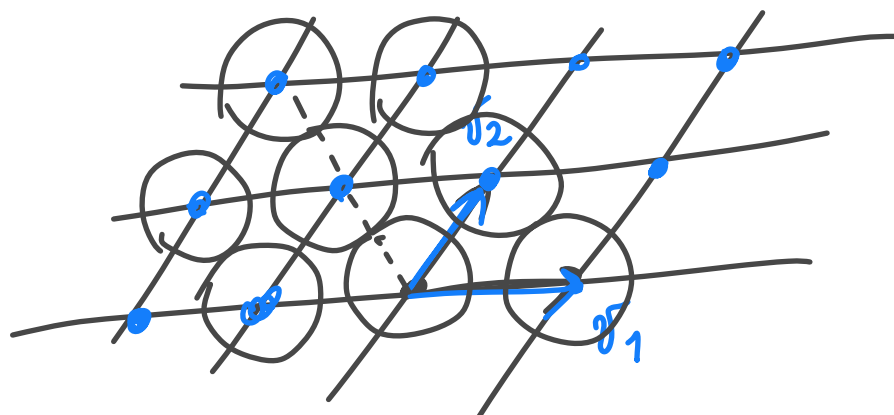
$$\Lambda = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{Z}}, \text{ где } \{v_1, \dots, v_n\} - \text{базис } \mathbb{R}^n.$$

Опр.: упаковка наз.-ся периодической, если её центр представляются как объединение конечного числа сдвигов некоторой решётки $\{\Lambda + x_i, x_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=1}^l$.

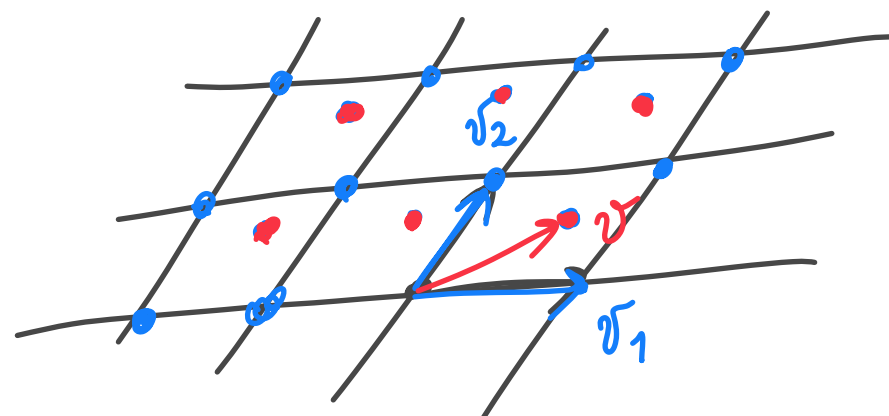
Примеры:



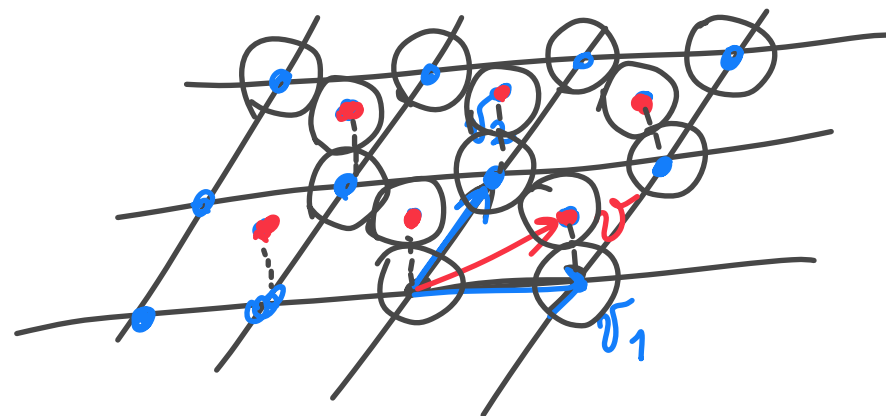
Решётка $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{Z}} := \underline{\Lambda}$



Решётчатая
упаковка



$\underline{\Lambda} \sqcup (\underline{\Lambda} + v)$



$\underline{\Lambda} \sqcup (\underline{\Lambda} + v)$

Трёхугольная
упаковка

Плотность упаковок.

Утв.: $\exists$ периодические упаковки, плотность которых как угодно близки к плотности оптимальной упаковки (в $\mathbb{R}^n$).

D-ли потом.

Опр.: X — упаковка, $C(0, R) = \{ \bar{x} : |x_i| \leq R \}$ — куб

Тогда плотность упаковки X

$$\rho_X := \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \rho_X(R), \text{ где } \rho_X(R) = \frac{\text{Vol}(X \cap C(0, R))}{\text{Vol } C(0, R)}.$$

Почему $\overline{\lim}$?

Пример

Рассм решётку $\mathbb{Z}^2$ и выброшим из неё центр, у которых максимум модуля коорд-т находится внутри $[(2k!), (2k+1)!]$, $k = 1, 2, \dots$

Найдём верхний и нижний пределы $\rho_{\mathbb{Z}^2}(R)$.

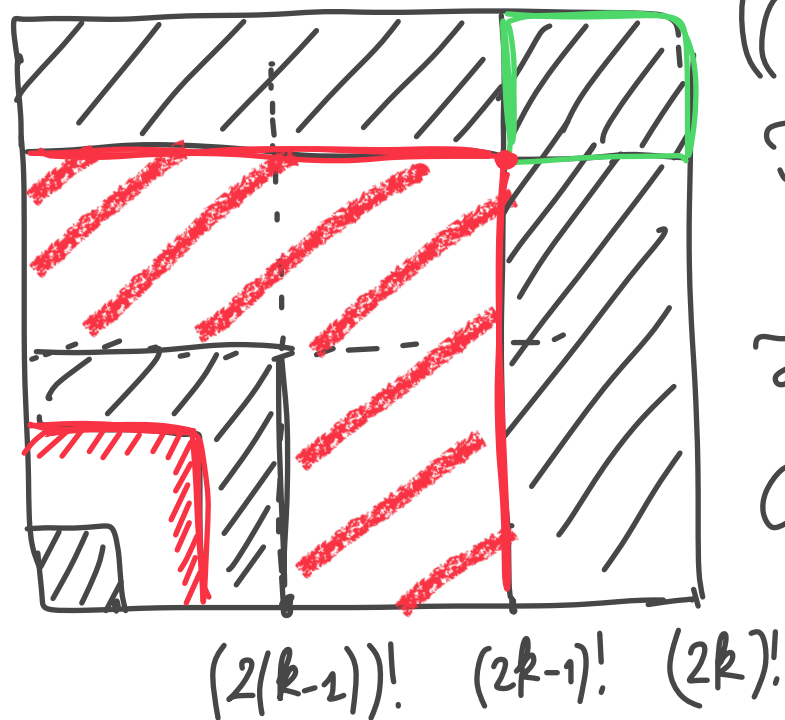
$$\rho_{\mathbb{Z}^2}((2k+1)!) \leq \frac{((2k)! + 1)^2}{((2k+1)!)^2} = \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)!} \right)^2 \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty.$$

Пл.о. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \rho_{\mathbb{Z}^2}(R) = 0.$

Но $\rho_{\mathbb{Z}^2}((2k)!) \geq \text{vol } B_2(\frac{1}{2}) \cdot C$, где

$$C = \frac{((2k)! - (2k-1)! - 1)^2}{((2k)!)^2} = \left(1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{(2k)!} \right)^2 \geq 1 - \varepsilon, \text{ если } k \geq k(\varepsilon).$$

Пл.о. $\overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \rho_{\mathbb{Z}^2}(R) = \text{vol } B_2(\frac{1}{2}) = \rho_{\mathbb{Z}^2} = \frac{\pi}{4}.$



Опр.: $\rho_n := \sup_X \rho_X$, где X — упаковки в $\mathbb{R}^n$.

Утв.: В $\mathbb{R}^n \exists$ упаковка X : $\rho_X = \rho_n$.

D-во:

либо $\exists X$: $\rho_X = \rho_n$, либо $\exists X_1, X_2, \dots$: $|\rho_n - \rho_{X_i}| \leq \varepsilon_i = \frac{1}{i}$.

По опр.-ию ρ_{X_i} следует, что $\exists R_i(j) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \infty$:

$$|\rho_{X_i}(R_i(j)) - \rho_{X_i}| < \varepsilon_i.$$

Построим теперь упаковку X и представим $R_i \rightarrow +\infty$:

$$|\rho_X(R_i) - \rho_n| < 4\varepsilon_i.$$

Предположим, что в упаковках радиус шаров равен $\frac{1}{2}$.

$$\text{Берём } R_1 = \min \left(\{R_1(j)\}_{j=1}^{\infty} \cap [2; +\infty) \right),$$

$$R_2 = \min_{R_2(j) \geq (R_1+1)^2} R_2(j) \quad \text{и т.д.}$$

Строим X так, что во внутренности куба $C(0, R_1)$ узлы - центры совпадают с теми у X_1 , в области $C(0, R_2) \setminus C(0, R_1+1)$ оставляем узлы X_2 и т.д.

$$\text{Тогда } \rho_X(R_i) = \rho_{X_i}(R_i) - \theta \cdot \frac{\text{Vol } C(0, R_{i-1}+1)}{\text{Vol } C(0, R_i)}, \quad |\theta| \leq 1.$$

$$\text{Поскольку } |\rho_{X_i}(R_i) - \rho_{X_i}| < \varepsilon_i,$$

$$|\rho_n - \rho_{X_i}| < \varepsilon_i,$$

$$\frac{\text{Vol } C(0, R_{i-1}+1)}{\text{Vol } C(0, R_i)} \leq \frac{(R_{i-1}+1)^n}{R_i^n} \leq R_i^{-n/2} \leq \left(\frac{1}{i}\right)^{n/2} = \varepsilon_i^{n/2} \leq \varepsilon_i \quad (n \geq 2).$$

$$\text{И.о. } |\rho_X(R_i) - \rho_n| \leq 3\varepsilon_i, \text{ т.е. } \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \rho_X(R) = \rho_X = \rho_n.$$

Утв.: $\forall$ упаковку шаров в $\mathbb{R}^n$ можно приблизить (в смысле близости плотностей) периодической.

Д-во:

пусть X — оптимальная с плотностью ρ_X .

$$\exists R \gg 1 : |\rho_X(R) - \rho_X| \leq \varepsilon.$$

Строим $\tilde{X}$:

в куб $C(0, R+1)$ помещаем центр $X \cap C(0, R)$.

А далее копируем по схеме решетке $2(R+1)\mathbb{Z}^n$.

$$\rho_{\tilde{X}}(R+1) \geq \frac{\text{Vol}(X \cap C(0, R))}{\text{Vol } C(0, R+1)} = \rho_X(R) \cdot \frac{\text{Vol } C(0, R)}{\text{Vol } C(0, R+1)} =$$

$$= \rho_X(R) \cdot \left(1 - \frac{1}{R+1}\right)^n \geq \rho_X(R) - \varepsilon, \text{ если } R \geq R(n, \varepsilon).$$

$$\text{Ит.д. } |\rho_{\tilde{X}}(R+1) - \rho_X| \leq 2\varepsilon.$$

Центральная плотность периодических упаковок.

Опр.: $\rho^c = \rho^c(X)$ — центральная плотность упаковки X с шарами радиуса 1 определяется по ср-це:

$$\rho^c \cdot \text{vol } B(0,1) = \rho_X, \text{ где}$$

$B(0,1)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1.

Пл.о. ρ^c — число центров (единичных шаров) на единичный объём.

Основное утверждение.

Теорема: (2001, H. Cohn, N. Elkies,
2000, D. Фюрбачев)

пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ из класса Шварца, $f \neq 0$,
и удовлетворяет условиям:

①. $f(x) \leq 0, |x| \geq 1$

②. $\hat{f}(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$

Тогда $\forall X \in \mathbb{R}^n$

$$p^c(X) \leq \frac{f(0)}{2^n \hat{f}(0)}.$$

Замечание: $f(0) > 0.$

1. Можно доказывать теорему для периодических упаковок X .
2. Д-во опирается на гр-му суммирования Пуассона.

$$\sum_{\substack{x \in \Delta \\ v \in \mathbb{R}^n}} f(x+v) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{t \in \Delta^*} e^{2\pi i (v \cdot t)} \hat{f}(t)$$

$D - \text{во:}$

пусть $z = \frac{1}{2}$; Δ - решетка, N - число центров вgrund.-ой ячейке, $v_1, \dots, v_N$ - вектора, задающие расположение центров. Запишем ф-лу Фурье в виде:

$$\sum_{x \in \Delta} f(x+v) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{t \in \Delta^*} e^{2\pi i (v \cdot t)} \hat{f}(t) \Rightarrow$$

$$\sum_{j,k=1}^N \sum_{x \in \Delta} f(x + v_j - v_k) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{t \in \Delta^*} \hat{f}(t) \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i (v_k, t)} \right|^2$$

$x + v_j - v_k$ — вектор, соединяющий
центры шаров упаковки X в т. $x + v_j$ и v_k .

Если $|x + v_j - v_k| < 1$, то шары
совпадают, т.е. $x + v_j = v_k$.

Тогда такое может быть?

Ответ: $x = 0$, $v_j = v_k$. ($j = k$).

Воспользуемся условием теоремы.

$$\sum_{j,k=1}^N \sum_{x \in \Lambda} f(x + v_j - v_k) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{t \in \Lambda^*} \hat{f}(t) \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i (v_k, t)} \right|^2 \quad (*)$$

левая часть $(*) \leq N f(0)$.

Из правой части $(*)$ все слагаемые неотрицательные, т.е.

$$\text{правая часть} \geq \frac{1}{|\Lambda|} N^2 \hat{f}(0).$$

$$\text{Итого: } N^2 \frac{\hat{f}(0)}{|\Lambda|} \leq N f(0), \quad \text{или}$$

$$N \leq \frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \cdot |\Lambda|.$$

Используя $N \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} \cdot |\underline{\Delta}|$

и то, что $z_{\max} = \frac{1}{2}$, найдем:

$$\rho^c \cdot \text{vol } B(0,1) = \rho_{\tilde{x}}, \quad \text{или}$$

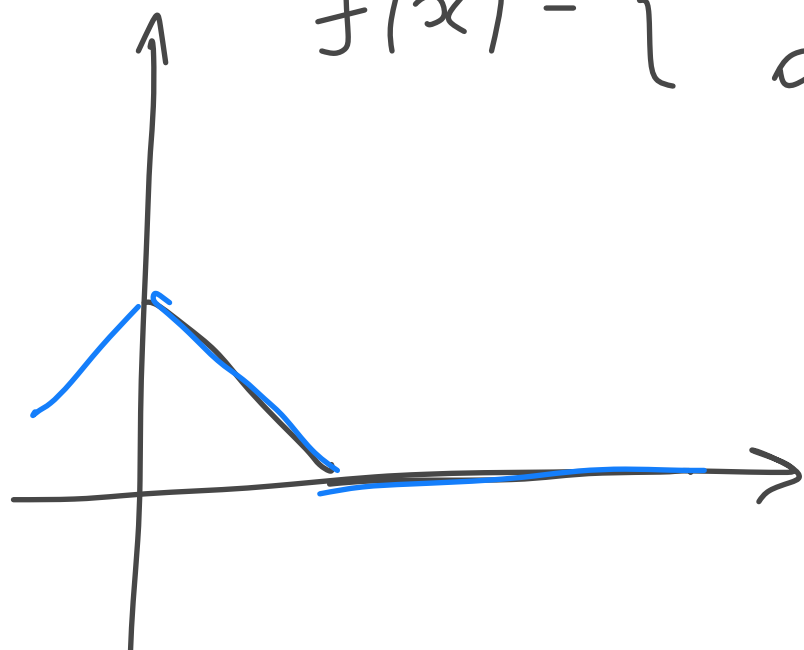
$$\rho^c = \frac{N \text{vol } B(0, \frac{1}{2})}{|\underline{\Delta}| \cdot \text{vol } B(0,1)} = \frac{N}{|\underline{\Delta}|} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\rho^c = \frac{N z^n}{|\underline{\Delta}|} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{N}{2^n |\underline{\Delta}|} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Пример:

$n=1$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$\rho^c = ?$$

$$\hat{f}(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2}$$

