

Г.Б. Шабат,
КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ
В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Лекция 1 (8 февраля 2021)

Введение

1.0. О классификации всего сущего	1
...1.0.0. Аристотель	1
...1.0.1. Естественно-научные достижения	2
...1.0.2. Классификация в гуманитарных науках	3
...1.0.3. Начальные объекты	4
1.1. Что вносит математика?	4
...1.1.0. Бесспорные достижения	4
...1.1.1. Категорный язык	6
...1.1.2. Конкретные категории	8
...1.1.3. Малые категории	9
...1.1.4. Изоморфизмы и небольшие категории	10
...1.1.5. Классификация с точностью до изоморфизма	12
1.2. Алгебро-геометрическая специфика (предварительно)	12
...1.2.0. "Самоописание" в алгебраической геометрии	12
...1.2.1. Пространства модулей	13
Задачи	13
Литература	14

1.0. О классификации всего сущего

1.0.0. Аристотель. Этот удивительный человек (384-322 до Р.Х.) занимался самыми разными вопросами¹. Для математиков он прежде всего – несомненный основатель логики; его учение о *силлогизмах* пережило тысячелетия. Для нашего же курса особо важны его идеи о *классификации*.

Современному человеку общие классификации Аристотеля могут показаться не очень убедительными – так, *первоначалами* всего сущего объявлялись *материя, форма, производящая причина и цель*². (Впрочем, положения более тонкой классификации понятнее; например, материя далее подразделяется на пять *стихий* – *воздух, вода, земля, огонь и эфир*, и четыре из этих стихий остаются вполне современными – лишь от *эфира*³ пришлось отказаться. Более частные классификации осмысленны и в 21-м веке: *науки* делятся на *теоретические, практические и творческие*, *животные* – на *снабжённых кровью и бескровных* (в современной терминологии на *позвоночных и беспозвоночных*) и т. п. Некоторые понятия, выработанные Аристотелем и его учеником Теофрастом (371–286 до р.Х), которого иногда называют *отцом ботаники*, сохраняют

¹Вот некоторые названия трудов Аристотеля: *О памяти и воспоминании, О сне и бодрствовании, О долготе и краткости жизни, О движении животных, О дыхании, О цветах, О добродетелях и пороках, Политика, Экономика, Поэтика*.

²Вероятно, не очень точный перевод с греческого – *Википедия*.

³Эта *небесная субстанция* – прозрачный и лучезарный слой воздуха в прозрачный и лучезарный слой воздуха, которым дышат боги, которым дышат боги в *надлунном мире*...

своё значение до наших дней.

Для нашего курса, разумеется, важны не конкретные классификационные результаты Аристотеля, а его общие постановки задач классификации и подходы к их решению. Отметим два положения, которые можно извлечь из его работ.

- Хорошая классификация достаточно обширного класса объектов является, как правило, многоуровневой.
- Классификация объектов, являющихся предметом изучения живых наук, обычно не является окончательной. О качестве классификации часто можно судить по её приспособленности к модификациям, требуемым развитием наук.

Терминология Аристотеля, к сожалению, несовместима с нашей: исходным понятием для него являются десять *категорий* (предназначенных для перечисления всего, что может быть выражено *без состава или структуры* – см. [Аристотель1978]). В современной же математике термин *категория* имеет другой и совершенно точный смысл – см. некоторые напоминания ниже.

1.0.1. Естественно-научные достижения. Наиболее впечатляющие результаты получены в *химии*. Рекордной по полноте и законченности является *классификация химических элементов* на основе *периодического закона*, открытого Д.И. Менделеевым в 1869-71 годах (см. [Менделеев1958]). Соответствующая таблица, как всем известно, дожила до наших дней, а свойства некоторых веществ, неизвестных во времена Менделеева, были предсказаны на её основе. Современное изложение см., например, в [Scerri2011], о связи с математикой – [RestPach2020].

Классификационные процессы в *биологии*, как уже было отмечено, восходят к Аристотелю. Современные результаты классификации собираются в *филогенетические деревья*, которые сами стремительно эволюционируют; см., например, (случайно выбранную из огромного потока работу) [BIAn2020]. Вероятно, по мере внедрения математических понятий и методов классификация *всего живого* будет усложняться и уточняться; см. хотя бы [CarbGrom2001]. Современная интерактивная компьютерная система *Lifemap* (см. [Vienne2016]) поддерживает работу с деревом, в котором около 1.4 миллиона вершин (в упрощённой версии – около 800 тысяч). Вершины этих деревьев, разумеется, соответствуют *видам* – понятию, которое широко и оживлённо обсуждается.

Физика претендует на понимание всего материального и, в частности, не останавливается на химическом понимании веществ на уровне молекул и атомов. Дальнейшее углубление в микромир приводит к теории *элементарных частиц*, иногда называемой также *субъядерной физикой* – см., например, [ChengLi2006]. Этот раздел физики стремительно развивается, и таблицы часто обновляются; версию 2011 года можно найти в [NakEtAl2011]. В этой версии бозон Хиггса, об открытии которого в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) было объявлено четвертого июля 2012 года (см. разъяснения для широкой публики в [Рубаков2012]) ещё упоминается как гипотетическая частица.

Принято считать, что открытие бозона Хиггса завершает построение так называемой *Стандартной Модели*. Однако большинство физиков-теоретиков не удовлетворено ей; по их мнению, она недостаточно элегантна и в ней слишком много "подгоночных"

параметров. Перспективы развития физики элементарных частиц за пределами стандартной модели – предмет обсуждения многих современных текстов, см., например, [Lykken2010].

Главным же пробелом современной физики, не позволяющем ей стать *теорией всего*, остаётся несогласованность существующих теорий микромира с космологическими теориями – хотя по отдельности и те, и другие существуют и прекрасно согласуются со всеми экспериментальными данными. Предполагается, что сегодняшние теории окажутся предельными случаями теории будущего, в которые в качестве фундаментальных параметров будут входить скорость света c и постоянная Планка $\hbar$, и теория микромира будет получаться при $c \rightarrow \infty$, а специальная теория относительности – при $\hbar \rightarrow 0$. Классификационные результаты в намечаемых теориях в явном виде вряд ли просматриваются, но намечаются гораздо более тесные, чем у классической физики, связи с современной математикой и, в частности, с *пространствами модулей*, главными героями нашего курса. См., например, [Moore2016], [Rossi2017] и т.п.

1.0.2. Классификация в гуманитарных науках. Классификационные проблемы в таких науках, как *искусствоведение*⁴, были поставлены так же давно, как в естественных науках; например, в *Поэтике* [Аристотель1978] классифицируются литературные жанры и даются "определения" эпосу, трагедии, комедии и т.д. Очевидно, за прошедшие тысячелетия не было получено решения этих проблем, сравнимого с таблицей Менделеева по точности и окончательности; впрочем, искусствоведы, как правило, на большее и не претендуют – ср. цитаты ...*Никакой логической и твердой классификации жанров произвести нельзя* – [Томашевский1996], ...*Признаки многообразны, они скрещиваются и не дают возможности логической классификации жанров по одному какому-нибудь основанию* – [Аверинцев1996].

Тем не менее, если исходить из того, что в наступившем тысячелетии именно наукам о ЧЕЛОВЕКЕ предстоит выйти на первый план, упомянутые достижения нельзя недооценивать. Мы – тот *вид*, соответствующий единственной вершине на необъятном филогенетическом дереве, на представителей которого произведения искусства действуют, иногда очень сильно. Для более глубокого, чем в настоящее время, понимания этого действия, необходима и классификация и видов искусства, и его адресатов (модельный вопрос: *что кому смешно?*).

В классификации адресатов, то есть *дифференциальной психологии*, за минувшие тысячелетия (начиная с подразделения Гиппократом людей на *флегматиков*, *холериков*, *сангвиников* и *меланхоликов*) успехи достигнуты умеренные⁵: фигурирует огромное количество методов классификации типов личностей (см., например, недавний обзор [?] с 11 страницами библиографии), не согласованных между собой. Среди них, видимо, нет универсально признанных, и распространена практика приписывания человеку типа на основании сомнительных компьютерных тестов.

Классификация восприятия людьми произведений искусства (подчеркнём, что некоторые реакции наверняка можно регистрировать объективно методами нейрофизиологии), видимо, относится к науке будущего.

Среди гуманитарных наук особое место занимает *лингвистика*, которая постепенно приобретает всё больше черт точных наук. Её важный раздел, *компаративистика*, напоминает упоминавшуюся выше геномику, во-первых, тем, что её результаты носят

⁴Не будем вдаваться в вопрос о том, *наука* ли это, считая его терминологическим.

⁵оценочное суждение...

классификационный характер (то есть в широком смысле слова относится к нашему курсу), во-вторых, тем, что языки эволюционируют, и, в-третьих, тем, что задачи реконструкции составляют существенную её часть. Кроме того, две дисциплины имеют важное пересечение по предмету исследования – *ранней истории человечества*.

Здесь перспективны междисциплинарные проекты с участием не только представителей упомянутых выше наук – лингвистики и геномики – но и не упомянутой, *археологии*; см. [Старостин2003].

1.0.3. Начальные объекты. Мы используем теоретико-категорный термин (см. напоминания ниже), исходя из довольно поверхностных аналогий: в некоторых классификационных задачах предполагается или считается установленным, что классифицируемые объекты развились из некоторого исходного.

- Возможно, все современные люди – потомки одной-единственной женщины, *африканской Евы*, жившей в Африке около 200 000 лет назад, см. [Sykes2001].
- Некоторые лингвисты поддерживают гипотезу *моногонеза*, заключающуюся в том, что все языки мира произошли из *праязыка*, на котором все наши предки говорили 40-50 тысяч лет назад, см. [Старостин2003].
- Биологи говорят об *общем предке всего живого* (он называется LUCA – last universal common ancestor), см. [Wade2016].

Аналоги этих и других структур встретятся в нашем курсе.

1.1. Что вносит математика?

1.1.0. Бесспорные достижения. Перечислим несколько хорошо известных классификационных результатов из разных областей математики; в основном они не относятся к нашему курсу.

Начнём с трёх примеров из **алгебры** – области математики, в которой понятие изоморфизма формулируется особенно просто.

Конечные простые группы. Их классификация сравнительно кратка.

- *Циклические* группы простого порядка C_p ;
- *знакопеременные* группы Alt_n при $n \geq 5$;
- группы *ливского типа* над конечными полями – четыре серии классических (специальные линейные, ортогональные, унитарные и симплектические), и не более одиннадцати⁶ серий исключительных;
- 26 *спорадических* групп.

См. [Aschbacher2004]. Известные на сегодняшний день доказательства классификационной теоремы невероятно длинны и несколько десятилетий вызывали сомнения; сейчас ведутся работы по компьютерной проверке доказательств.

Простые комплексные алгебры Ли. Их классификация тесно связана с предыдущей, но существенно проще.

⁶Их обозначения и разделение по типам не вполне устоялось.

- *Классические алгебры Ли*: *специальные линейные* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, *ортогональные*⁷ $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ и *симплектические* $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$;

- *Исключительные алгебры Ли*: $\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$, $\mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$, $\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$.

См. [Jac1979]. Классификация групп *левского типа* над конечными полями тесно связана с этой классификацией.

Кристаллографические группы. Так называются группы симметрий, которые описывают все возможные симметрии бесконечных дискретных множеств точек в $\mathbb{R}^3$. Другое название – *фёдоровские группы*. Имеется 230 кристаллографических групп со сложной системой обозначений с помощью *символов Германа-Могена*. См. современное изложение в [ВаФрИн1979].

Приведём пример из **топологии**. Полностью расклассифицированы *связные компактные ориентируемые поверхности*. И с точностью до *гомеоморфизма*, и с точностью до *гомотопической эквивалентности* такие поверхности полностью определяются единственным инвариантом, *родом*, который неформально определяется как число *ручек* или *дырок*, а формально – либо как половина первого числа Бетти, либо как минимальное число *разрезов*, требуемых для вложения поверхности в плоскость. См., например, [Thomassen1992].

Два классических примера из теории **дифференциальных уравнений** касаются исключений из правила, согласно которому решения этих уравнений являются “новыми” трансцендентными функциями (не выражаются через “известные” функции, к классу которых относятся коэффициенты уравнений).

Список Шварца. В нём перечислены тройки $a, b, c \in \mathbb{C}$, для которых *гипергеометрическое* дифференциальное уравнение на функцию $y(x)$

$$x(1-x)y'' + (c - (1+a+b))y' - ab \cdot y = 0$$

допускает ненулевое *алгебраическое* решение. Список содержит одну бесконечную серию и 15 троек $a \geq b \geq c$.

a	b	c	Связана с ...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$	n -диэдром
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	тетраэдром
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	тетраэдром
...	...	...	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	икосаэдром
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	икосаэдром

См., например, [BalDwo1979].

Список Пенлеве - Лисового - Тихого. Это – *нелинейный* аналог предыдущего списка. В нём перечислены четвёрки $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, для которых знаменитое уравнение *Пенлеве*-б⁸

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) y'^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' +$$

⁷Принято отдельно рассматривать алгебры кососимметрических матриц чётного и нечётного порядков.

⁸Это устрашающего вида уравнение само возникло в результате классификации уравнений вида $y'' = R \in \mathbb{C}(x, y, y')$, обладающих *свойством Пенлеве* отсутствия так называемых *критических подвижных особенностей*.

$$+ \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right)$$

допускает *алгебраическое* решение.

Список слишком громоздок, чтобы его здесь приводить. Он состоит из четвёрок, полученных во многих работах, а его полнота установлена в работе Лисового-Тихого [LisTyk2014].

Наконец, упомянем пример на стыке алгебры и **комплексного анализа**. Группы *биголоморфных автоморфизмов* комплексных многообразий – довольно тонкая материя. В случае *ограниченных областей* в $\mathbb{C}^n$ эти группы – конечномерные группы Ли (А. Картан), но до их полной классификации ещё довольно далеко. Однако, если ограничиться *симметрическими областями* (для любых двух точек найдётся переставляющая их инволюция), то их полная классификация получена ещё Э. Картаном в [Cartan1935]. Имеются четыре *классические* серии (одна двупараметрическая и три однопараметрических) и две *исключительные* области. Среди серий есть *области Зигеля*, которые (в отличие от остальных рассмотренных примеров) будут играть важную роль в нашем курсе.

Рассмотренные примеры были достаточно разнообразны; однако в них просматриваются общие черты. Сама природа классифицируемых математических объектов часто подсказывает, какие их свойства следует считать *типичными*, а какие – *исключительными*. Наличие исключений не указывает на недостатки правил, по которым производится классификация, а скорее выявляет интересные, обычно *уникальные*, объекты.

1.1.1. Категорный язык. Напомним, как обещали, основные категорные понятия и уточним обозначения, которыми будем пользоваться.

Теория категорий – раздел математики, за которым также укрепилось неакадемичное название *абстрактная чепуха* – это (по крайней мере для математиков, использующих, а не разрабатывающих её) прежде всего *язык*, позволяющий преодолеть ограничения, накладываемые теоретико-множественным взглядом на объекты математики.

Согласно Ю.И. Манину, теория категорий воплощает *социологический подход к математике: объекты рассматриваются не сами по себе, а как члены сообщества себе подобных* (см. недавнее переиздание [Манин2012] курса лекций 1970 г.)

На языке теории *множеств*, введённом Георгом Кантором в последней четверти девятнадцатого века, можно было изложить всю существовавшую тогда математику. Единственное, чего было нельзя – это рассматривать *все* множества разом. *Множества* всех множеств не существует: если бы оно существовало, то по теореме Кантора-Бернштейна было бы строго мощнее самого себя.

Зато существует *категория множеств* $\mathcal{SET}$. Она и является прототипом общего понятия категории.

Главная теоретико-множественная конструкция, аксиоматизируемая в произвольных категориях – сопоставление любой паре множеств множества *отображений* из одного

в другое; эти множества отображений на языке теории категорий называются множествами *морфизмов*. Попадающий в центр внимания конгломерат множеств морфизмов снабжён *композициями*, удовлетворяющими закону "ассоциативности"; кроме того, в каждом множестве *эндоморфизмов*, то есть отображений в себя, выделяется *тождественный* эндоморфизм, обладающий очевидными свойствами.

Согласно теоретико-категорной терминологии, множества суть *объекты* категории $\mathcal{SET}$.

Понятия "быть объектом категории" и "быть элементом множества" аналогичны, но не совпадают; мы введём для первого из них (нестандартное!) обозначение $\in\in$. Теперь фразу X – *множество* можно записать в виде

$$X \in\in \mathcal{SET}.$$

В дальнейшем мы также будем (нестандартно) дублировать теоретико-множественные значки для введения соответствующих им категорно-теоретических и логических.

Для обозначения категорий будем использовать каллиграфический алфавит $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$

Категория $\mathcal{C}$ считается заданной, если введён *класс* её объектов и для любых двух объектов

$$\forall X, Y \in\in \mathcal{C}$$

определено множество

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

морфизмов из X в Y .

Включение

$$\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

будет констатироваться также абсолютно синонимичными, но более выразительными записями

$$\varphi : X \longrightarrow Y,$$

или

$$X \xrightarrow{\varphi} Y,$$

в которых категория $\mathcal{C}$ должна восстанавливаться из контекста; следует при этом иметь в виду, что далеко не для всех категорий морфизмы являются отображениями⁹. В последней записи φ следует воспринимать как *имя* стрелки.

Для любых трёх объектов

$$\forall X, Y, Z \in\in \mathcal{C}$$

предполагается определённой *композиция*

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) : (\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi,$$

"ассоциативная" в том смысле, что равенство

$$\psi \circ (\varphi \circ \chi) = (\psi \circ \varphi) \circ \chi$$

должно выполняться всякий раз, когда обе его части имеют смысл, то есть для любых четырёх объектов

$$T, X, Y, Z \in\in \mathcal{C}$$

и для любых трёх морфизмов

$$\chi : T \longrightarrow X,$$

⁹один из важных примеров – категория $\mathcal{HOT}$ топологических пространств, морфизмами в которой объявлены *гомотопические классы* непрерывных отображений.

$$\begin{aligned}\varphi &: X \longrightarrow Y, \\ \psi &: Y \longrightarrow Z.\end{aligned}$$

Определение композиции морфизмов проявляется нелинейной записью (и без неё, вероятно, с трудом воспринимается начинающими)

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z \\ & \searrow & \psi \circ \varphi & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

Эта же запись позволяет примириться с "противоестественным" порядком: в случае категории множеств ещё одна "ассоциативность", являющаяся *определением композиции*

$$(\psi \circ \varphi)(x) := \psi(\varphi(x))$$

$x \in X$, в правой части "читается" слева направо.

Требуется ещё, чтобы в полугруппе *эндоморфизмов* $\text{End}_C(X) := \text{Mor}_C(X, X)$ любого объекта X существовал выделенный элемент, обычно называемый *единицей* (или *тождественным преобразованием*, хотя, напомним, морфизмы далеко не всегда являются отображениями...), нейтральный слева и справа относительно всех композиций

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathcal{C} \exists! 1_X \in \text{End}_C(X); \\ [\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \varphi : X \longrightarrow Y; \psi \circ \varphi \circ 1_X = \psi \circ \varphi] \wedge \\ \wedge [\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \psi \circ \varphi : Y \longrightarrow X; 1_X \circ \psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi].\end{aligned}$$

Как мы видим, две аксиомы теории категорий связаны с ассоциативностью и единицами – как в теории моноидов (в моноиде, правда, единственная единица). В этом смысле теорию категорий можно рассматривать как теорию обобщённых моноидов; в случае, когда объединение множеств морфизмов образует множество (о таких категориях мы вскоре поговорим, они называются *малыми*) можно считать, что композиция – это *частично определённая* ассоциативная операция. Об объектах можно забыть; такая позиция обсуждается в книге одного из основателей теории категорий [Маклейн2004].

1.1.2. Конкретные категории. Неформально категория называется *конкретной*, если её объекты – множества с одной или несколькими дополнительными *структурами*, а морфизмы – отображения множеств, *согласованные* с этими структурами; обычно говорится, что отображения *уважают* эти структуры. Формально конкретность определяется в терминах *забывающего функтора* из рассматриваемой категории в категорию множеств, но мы всё это откладываем на последующие лекции. Общие понятия *структур* и *уважения* к ним определяться не будут, а будут задаваться списком.

Категория множеств $\mathcal{SET}$ конкретна – это утверждение является тавтологией. Как было сказано выше, её объекты – просто множества *без* дополнительных структур¹⁰, множества морфизмов суть множества *всех* отображений, то есть

¹⁰это словосочетание имеет смысл независимо от смысла слова *структура*

для $X, Y \in \mathcal{SET}$

$$\text{Mor}_{\mathcal{SET}}(X, Y) \equiv Y^X := \{\text{отображения } X \longrightarrow Y\},$$

а композиция для $X, Y, Z \in \mathcal{SET}$ определяется как

$$\text{Mor}_{\mathcal{SET}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{SET}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{SET}}(X, Z) : (\alpha, \beta) \mapsto \beta \circ \alpha,$$

где для $x \in X$

$$(\beta \circ \alpha)(x) := \beta(\alpha(x)).$$

В дальнейшем будут рассматриваться множества вместе с *дополнительными структурами* – например, с *(бинарными) операциями*

$$*_X : X \times X \longrightarrow X : (x_1, x_2) \mapsto x_1 *_X x_2$$

с морфизмами $\alpha \in Y^X$, удовлетворяющими для любых $x_1, x_2 \in X$ равенству

$$\alpha(x_1 *_X x_2) = \alpha(x_1) *_Y \alpha(x_2).$$

Отметим, что в дальнейшем множества со структурами будут – как объекты соответствующих категорий – обозначаться так же, как и сами множества. Например, когда *счётность* множества X определяется через наличие биекции $X \simeq \mathbb{N}$, то $\mathbb{N}$ – просто множество натуральных чисел; вскоре будет определена категория *моноидов*, объектом которой будет тройка $(\mathbb{N}; +; 0)$ натуральных чисел вместе с операцией их сложения и нейтральным элементом; в категории *ординалов*, которой мы в обозримом будущем заниматься не будем, имеется важный объект $(\mathbb{N}; \leq)$ и т.д. Разумеется, множества *морфизмов*, связывающих $\mathbb{N}$ с другими объектами, зависит от категории.

Очевидным образом вводятся конкретные категории групп $\mathcal{GRP}$, абелевых групп $\mathcal{AB}$, полей $\mathcal{FLD}$, топологических пространств и непрерывных отображений $\mathcal{TOP}$. Принимаем не очевидное соглашение о категории колец $\mathcal{RING}$ и категории коммутативных колец $\mathcal{ANN}^{11}$.

Конкретность – не свойство категории, а дополнительная структура на ней – функтор в категорию множеств. Пример *неконкретной* категории, то есть не допускающей такой структуры – упомянутая выше в сноске категория $\mathcal{HOT}$ топологических пространств и гомотопических классов отображений, см. доказательство в работе [Freyd2004].

1.1.3. Малые категории. Как было сказано, объекты категории, вообще говоря, *не* образуют множества; тем не менее, иногда всё-таки образуют, и такие категории называются *малыми*. Приведём примеры двух важных классов малых категорий.

Категории порядка. Построим малую категорию по любому *частично упорядоченному множеству* $(I, \leq)$. Объектами категории будут элементы множества I . Мы будем обозначать эту категорию так же, как множество; новшество заключается в определении *морфизмов*. Все множества морфизмов будут либо

¹¹от французского *anneau* – коммутативная алгебра интенсивно развивалась во Франции после второй мировой войны.

пусты, либо одноэлементны; наличие морфизма из объекта i в объект j равносильно соотношению $i \leq j$:

$$\text{Mog}_I(i, j) := \begin{cases} \{*\}, & \text{если } i \leq j \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

"Ассоциативность" композиции (которую не надо определять, поскольку отображение из произведения одноэлементных множеств в одноэлементное единственно) вытекает из транзитивности отношения $\leq$, а наличие "единиц" $\mathbf{1}_i$ — из его рефлексивности.

Называть построенную категорию будем *категорией порядка $\leq$ на множестве I* .

Однообъектные категории. По любой *группе* строится категория, *малость* которой не вызывает сомнений: в ней единственный объект! Зато эндоморфизмов этого объекта — сколько угодно, целая группа.

Однообъектная категория произвольной группы G определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \star G &:= \{*\}; \\ \text{Mog}_{\star G}(\star, \star) &:= G. \end{aligned}$$

Композиция

$$\text{Mog}_{\star G}(\star, \star) \times \text{Mog}_{\star G}(\star, \star) \longrightarrow \text{Mog}_{\star G}(\star, \star)$$

задаётся групповой операцией $G \times G \longrightarrow G$. "Ассоциативность" вытекает из ассоциативности групповой операции, а "единица" $\mathbf{1}_*$ — нейтральный элемент группы.

Такая же конструкция может быть определена для любого *моноида*, но сложилась традиция проводить её именно для групп.

Разумеется, категории, не являющиеся малыми, называют *большими*. Как мы знаем, категория $\mathcal{SET}$ — большая.

1.1.4. Изоморфизмы и небольшие категории. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, а $X, X' \in \mathcal{C}$ — её объекты. Морфизм $\iota \in \text{Mog}_{\mathcal{C}}(X, X')$ называется *изоморфизмом*, если найдётся такой морфизм $\iota' \in \text{Mog}_{\mathcal{C}}(X', X)$, что

$$\iota \circ \iota' = \mathbf{1}_{X'}$$

и

$$\iota' \circ \iota = \mathbf{1}_X.$$

При наличии такой пары *взаимно обратных* морфизмов $X \xrightarrow{\iota} X'$ и $X' \xrightarrow{\iota'} X$ объекты X и X' называются *изоморфными*. Факт изоморфности объектов обозначается как

$$X \simeq X'$$

или, если имеется какой-то выделенный изоморфизм (пока в нашем распоряжении нет достаточного количества примеров, не будем уточнять это понятие)

$$X \cong X'.$$

В последнем случае говорят, что X и X' *канонически изоморфны*.

Подчеркнём, что изоморфность объектов (большой!) категории не является *отношением* на каком-либо множестве; тем не менее, легко формулируются и очевидным образом верны присущие изоморфности объектов свойства *рефлексивности, симметричности и транзитивности*. Поэтому имеет смысл следующее

Определение. Категория называется *небольшой*, если классы изоморфности её объектов образуют множество.

Иначе говоря, для небольшой категории $\mathcal{C}$ имеется такое множество $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}$, что каждому объекту $X \in \mathcal{C}$ сопоставлен элемент, который мы обозначим

$$\langle X \rangle \in \mathfrak{M}_{\mathcal{C}},$$

так, что для любых $\forall X, Y \in \mathcal{C}$

$$X \simeq Y \iff \langle X \rangle = \langle Y \rangle$$

и, кроме того, для любого $m \in \mathfrak{M}_{\mathcal{C}}$

$$\exists X \in \mathcal{C}; \langle X \rangle = m.$$

Будем называть множество $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}$ *каталогом* небольшой категории $\mathcal{C}$. В интересующих нас случаях каталоги обычно будут называться *пространствами модулей*.

Для объекта $X \in \mathcal{C}$ его "класс изоморфности" будет при необходимости обозначаться $\langle X \rangle_{\mathcal{C}}$ (напомним, что мы договорились читать законными, например, формулы принадлежности $\mathbb{Z} \in \mathcal{GRP}$, $\mathbb{Z} \in \mathcal{AB}$, $\mathbb{Z} \in \mathcal{RING}$ и $\mathbb{Z} \in \mathcal{ANN}$).

Замечание 1. Приведённое определение, видимо, не рассматривалось в литературе. Родственное понятия *скелета категории* (см. [Fritsch1985]) представляется менее естественными: оно подразумевает (случайный) выбор объекта из "класса" изоморфных.

Замечание 2. Процедура сопоставления $X \mapsto \langle X \rangle$ объекту $X \in \mathcal{C}$ элемента $X \in \mathfrak{M}$ не является ни отображением (этим понятием мы свободно пользуемся), ни функтором (это понятие вскоре будет введено). По-видимому, наличие такой процедуры следует постулировать.

Важный пример. Пусть

$$\mathcal{C} = \mathbf{finSET}$$

– категория конечных множеств. Несмотря на её бросающуюся в глаза "обозримость", нет причин считать её малой – например, *равенство* произвольных конечных множеств вряд ли можно считать хорошо определённым как с математической, так и с общечеловеческой¹² точки зрения.

¹²7-элементные множества {понедельник, ..., воскресенье} дней этой и прошлой недели – одинаковые или разные?

Однако эта категория – несомненно небольшая, и с её каталога

$$\mathbb{N} := \mathfrak{M}_{\text{finSET}}$$

начинается современная математика.

1.1.5. Классификация с точностью до изоморфизма. Конкретные категории $\mathcal{GRP}$, $\mathcal{TOP}$, ..., которые мы упомянули выше, не являются небольшими. Неформальное объяснение состоит в том, что объектов в них "не меньше", чем в категории множеств. Понятие *забывающего функтора*, с помощью которого этот факт уточняется, будет введено ниже.

Для получения небольших категорий приходится накладывать ограничения на *мощности* рассматриваемых множеств со структурами. Известны два вида таких ограничений: абсолютные и относительные.

При наложении абсолютных ограничений рассмотрения ограничиваются структурами на множествах *ограниченной мощности*. Следует отметить, что с точки зрения классической математики такие ограничения не слишком существенны: "обычные" – в частности, имеющие общепринятые *имена* – группы, кольца, поля и топологические пространства, как правило, не более чем континуальны. Исключение составляет *гиперконтинуальная* группа $\text{Aut}\mathbb{C}$ всех (вообще говоря, разрывных) алгебраических автоморфизмов поля комплексных чисел – см. [Yale1966].

Что касается относительных ограничений, для алгебраических универсальным понятием является *конечнопорождённость*. Его, по-видимому, можно определить для произвольных *алгебраических систем*, то есть категорий множеств с произвольным количеством сколько-угодно-местных операций. Нас в дальнейшем будут особенно интересовать категории *конечно-порождённых расширений фиксированного поля*.

Наложение упомянутых ограничений позволяет извлекать из основных конкретных категорий небольшие *подкатегории*. Для каждой же небольшой категории $\mathcal{C}$ задача классификации приобретает точный смысл *описания множества* $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}$.

1.2. Алгебро-геометрическая специфика

1.2.0. "Самоописание" в алгебраической геометрии. Этот нестандартный термин означает, что каталоги алгебро-геометрических небольших категорий сами имеют тенденцию принадлежать этим категориям. Яркий пример составляют *пространства модулей алгебраических кривых*, которым будет посвящена существенная часть курса.

Указанное явление характерно именно для классификационных задач алгебраической геометрии. На множестве классов изоморфизма конечных или конечнопорождённых групп нет естественной групповой структуры, а на множестве

классов гомеоморфизма континуальных топологических пространств нет естественной топологии.

Вероятно, интересно было бы рассмотреть другие категории со свойством "самоописания".

1.2.1. Пространства модулей. Итак, мы констатировали, что при соответствующем выборе небольшой алгебро-геометрической категории $\mathcal{X}$ имеет место принадлежность её каталога $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}$, который в алгебраической геометрии называется *пространством модулей* (объектов категории $\mathcal{X}$), к той же категории,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}.$$

Именно этими пространствами модулей как алгебро-геометрическими объектами мы в основном будем заниматься в курсе, а сейчас скажем несколько слов о том, чем не будем заниматься.

Описанная картина построения пространств модулей несколько упрощена: обычно, чтобы получить *неприводимое* пространство модулей, надо фиксировать какие-то дискретные инварианты – например, *род* кривой¹³. Тогда для конкретного объекта $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ естественно говорить о *пространстве деформаций* этого объекта

$$\text{Def}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{X}}$$

– в него входят классы изоморфизма объектов категории $\mathcal{X}$ с теми же дискретными инвариантами, что у $\mathbf{X}$. Но процедуру взятия пространства деформаций можно *итерировать*! (В этом – одна из специфических черт алгебро-геометрических классификационных задач). Определим

$$\mathbf{X}_1 := \text{Def}(\mathbf{X}),$$

$$\mathbf{X}_2 := \text{Def}(\mathbf{X}_1),$$

...

Оборвётся ли это процедура? В неопубликованной работе [Капранов1997] содержится утвердительный ответ (многообразие $\mathbf{X}$ называется *жёстким*, если $\text{Def}(\mathbf{X})$ одноточечно, и тогда дальнейшие итерации бессмысленны). Более того, в [Капранов1997] утверждается, что, если $\dim \mathbf{X} = n$, то процедура обрывается на n -м шагу; в частности, *пространства модулей кривых жёстки*. Подробности можно найти в [OkawaSano2019].

Задачи

1.1. *Магмой* называется множество с бинарной операцией, не подчинённой никаким ограничениям. Определите категорию магм и объясните, почему магмы ограниченной мощности образуют её небольшую подкатегорию. Оцените сверху и снизу порядок каталога 7-элементных магм. Точны ли ваши оценки?

1.2. Расклассифицируйте 16-элементные группы.

¹³В некоторых случаях выбор этих инвариантов современной науке ясен, а в некоторых – не совсем...

- 1.3.** Восстанавливается ли конечное поле по своей мультипликативной группе? Счётное поле по своей аддитивной группе?
- 1.4.** Поставьте в различных известных вам геометрических теориях задачу классификации *треугольников* и опишите её решение.
- 1.5.** Постройте проективную и аффинную классификацию плоских *четырёхугольников* над произвольным полем.
- 1.6.** Расклассифицируйте тетраэдры в $\mathbb{R}^3$ с точностью до изометрий.
- 1.7.** Найдите алгебраическое ненулевое решение какого-нибудь гипергеометрического дифференциального уравнения.
- 1.8.** Докажите, что любая малая категория конкретна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Aschbacher2004] Michael Aschbacher, *The Status of the Classification of the Finite Simple Groups*. Notices of the American Mathematical Society. 51 (7). pp. 736–740.
- [BalDwo1979] F. Baldassarri, B. Dwork, *On second order linear differential equations with algebraic solutions*. Amer. J. Math. 101 (1) (1979) 42–76.
- [BIAn2020] Christopher Blair and Cécile Ané, *Phylogenetic Trees and Networks Can Serve as Powerful and Complementary Approaches for Analysis of Genomic Data*. Systematic Biology, 2020 May 1;69(3):593-601.
- [CarbGrom2001] A. Carbone and M. Gromov, *Mathematical slices of molecular biology*. Numéro spécial La Gazette des Mathématiciens, 88:11-80, Société Mathématique de France (2001).
- [Cartan1935] E. Cartan, *Domains bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1 (1935) pp. 116–162.
- [ChengLi2006] T.P. Cheng; L.F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 2006.
- [Freyd2004] Peter Freyd, *Homotopy is not concrete*. Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 6 (2004) pp 1-10.
- [Fritsch1985] R. Fritsch, *A category's quotient category of isomorphism types versus its skeleton*. Glasnik Matematički Vol. 20 (40) (1985), 297–300.
- [Jac1979] Nathan Jacobson, *Lie algebras*. Republication of the 1962 original. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [Kapranov1997] Kapranov1997, *Deformations of moduli spaces*. Non-published draft, 1997.
- [LisTyk2014] O. Lisovyy, Y. Tykhyy, *Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation*. Journal of Geometry and Physics 85(2014), 124-163.
- [Lykken2010] J. D. Lykken, *Beyond the Standard Model*. CERN Yellow Report. CERN. pp. 101–109. arXiv:1005.1676.
- [Moore2016] Gregory W. Moore, *Physical Mathematics and the Future*. Physics.rutgers.edu. Retrieved 2016-04-03.
- [NakEtAl2011] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *Particle listings*. J. Phys. G 37, 075021 (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition.
- [NakEtAl2011] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *Particle listings*. J. Phys. G 37, 075021 (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition.
- [OkawaSano2019] Shinnosuke Okawa, Taro Sano, *On the noncommutative rigidity of the moduli stack of stable pointed curves*. arXiv:1412.7060v2 [math.AG].
- [RestPach2020] Guillermo Restrepo and Leonardo A. Pachon, *Mathematical aspects of the periodic law*. Foundations of Chemistry 9 (2), 189-214.
- [Rossi2017] Paolo Rossi, *Integrability, Quantization and Moduli Spaces of Curves*. arXiv:1703.00232 .

- [Scerri2011] Eric R. Scerri, *The Periodic Table: A Very Short Introduction*. Oxford University Press, Inc.: New York, 2011.
- [Sykes2001] Bryan Sykes, *The Seven Daughters of Eve: The Science That Reveals Our Genetic Ancestry*. W.W. Norton, 2001.
- [Thomassen1992] Carsten Thomassen, *The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces*. Amer. Math. Monthly, 99 (2): 116–130.
- [Vienne2016] Damien M. de Vienne, *Lifemap: Exploring the Entire Tree of Life*. PLoS Biol 14(12): e2001624. <https://doi.org/10.1371/journal.pbio.2001624>.
- [Wade2016] Nicholas Wade, *Meet Luca, the ancestor of all living things*. The New York Times, July 2016.
- [Yale1966] Paul B. Yale, *Automorphisms of the Complex Numbers*. Mathematics Magazine, Vol. 39, No. 3 (May, 1966) , pp. 135-141.
- [Аверинцев1996] С.С. Аверинцев, *Жанр как абстракция и жанры как реальность: диалектика замкнутости и разомкнутости*. Риторика и истоки европейской литературной традиции. – М., 1996.
- [Аристотель1978] Аристотель, *Сочинения в четырех томах*. Ред. З.Н. Микеладзе. М., «Мысль», 1978.
- [ВаФрИн1979] Б. К. Вайнштейн, В. М. Фридкин, В. Л. Инденбом, *Современная кристаллография*. М.: Наука, 1979.
- [Маклейн2004] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*. М.: Физматлит, 2004. .
- [Манин2012] Ю.И. Манин, *Введение в теорию схем и квантовые группы*. МЦНМО, 2012.
- [Менделеев1958] Д. И. Менделеев, *Периодический закон*. М.: Издательство Академии наук СССР, 1958.
- [Рубаков2012] Валерий Рубаков, *Хиггсовский бозон*. "Квант" №5-6, 2012.
- [Старостин2003] С. А. Старостин, *У человечества был единый праязык. (Беседа Г. Зеленко с С. Старостиным)*. Знание - сила. - М., 2003, № 8.
- [Томашевский1996] Б.В. Томашевский, *Теория литературы. Поэтика: Учебное пособие*. М. : Аспект Пресс, 1996.