

Теория чисел II

Весна 2021

Лекция 1.

Опр.: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ наз.-ся **арифметической**.

Опр.: а) арифм.-ая ф-ия $f \neq 0$ наз.-ся **мультипликативной** если

$$\boxed{f(mn) = f(m) \cdot f(n)} \quad \text{при } (m, n) = 1;$$

б) если условие $(m, n) = 1$ можно отбросить, то f наз.-ся **вполне мультипликативной**.

Свойство:

$$\boxed{f(1) = 1.}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Д-во:} & f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) & (*) \\ & \parallel & \\ & f(1) & \end{array}$$

Если $f(1) = 0$, то $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n \cdot 1) = f(n) \cdot f(1) = 0$.

П.о. $f(1) = 1$ из $(*)$. ■

Примеры:

1. $f \equiv 1$.

2. $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ - число делителей

$$n = p_1^{d_1} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k} \Rightarrow \tau(n) = (d_1 + 1) \cdot \dots \cdot (d_k + 1).$$

Пр.о. $\tau(n)$ - мульт.-ая ф-ия, но не вполне мульт.-ая:

$$\tau(4) \neq \tau(2) \cdot \tau(2)$$

" " "
3 2 2

3. $f(n) = n$ - вполне мульт.-ая

Опр.: ф-ия Мёбиуса $\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & p^2 | n, \text{ } p\text{-простое} \\ (-1)^t, & n = p_1 \cdot \dots \cdot p_t, \text{ } p_i\text{-разл.-ые} \\ & \text{простые.} \end{cases}$

Свойства $\mu(n)$:

1.
$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

D — во:

$n = p_1^{d_1} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k}, \quad k \geq 1.$ Тогда

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_k=0}^1 (-1)^{j_1 + \dots + j_k} = \left(\sum_{j=0}^1 (-1)^j \right)^k = (1-1)^k = 0. \quad \blacksquare$$

2. **Формула обращения Мёбиуса:**

пусть $f(n)$ — арифм.-ая ф.-ия (не обязат. — но мульт.-ая),

$$F(n) := \sum_{d|n} f(d). \quad \text{Тогда} \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Верно и обратное. Также, если f — мульт.-ая, то
и F — мульт.-ая (обратное также верно).

$\mathcal{D}$ - bo:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) \mathcal{F}\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1 | \frac{n}{d}} f(d_1) = \sum_{d_1 d | n} \mu(d) f(d_1) = \\ &= \sum_{d_1 | n} f(d_1) \underbrace{\sum_{d | \frac{n}{d_1}} \mu(d)}_{1, \text{ cum } n = d_1} = f(n) \end{aligned}$$

Обратно - аналогично:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f(d) &= \sum_{d|n} \sum_{d_1 | d} \mu(d_1) \mathcal{F}\left(\frac{d}{d_1}\right) = \sum_{d_1 | n} \mu(d_1) \sum_{\substack{d | n \\ d \equiv 0(d_1)}} \mathcal{F}\left(\frac{d}{d_1}\right) = \\ &= \sum_{d_1 | n} \mu(d_1) \sum_{d_2 | \frac{n}{d_1}} \mathcal{F}(d_2) = \sum_{d_2 | n} \mathcal{F}(d_2) \underbrace{\sum_{d_1 | \frac{n}{d_2}} \mu(d_1)}_{1, \text{ cum } d_2 = n} = \mathcal{F}(n). \end{aligned}$$

Если теперь f — мульти.-ая, $n = p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}$, то

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \prod_{j=1}^k (1 + f(p_j) + \dots + f(p_j^{d_j}))$$

(здесь используется $f(1)=1$ и осн.-ая th. арифм.-ки).

И.е. $F(n)$ — мульти.-ая.

Пусть теперь $F(n)$ — мульти.-ая по условию.

Тогда $f(1) = F(1) = 1$. Рассм.-им

$$\begin{aligned} f(p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k} q_1^{b_1} \dots q_t^{b_t}) &= \sum_{d|nm} \mu(d) F\left(\frac{nm}{d}\right) = \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_k=0}^1 \sum_{l_1=0}^1 \dots \sum_{l_t=0}^1 (-1)^{j_1+\dots+l_t} F\left(\frac{n}{p_1^{j_1} \dots p_k^{j_k}} \cdot \frac{m}{q_1^{l_1} \dots q_t^{l_t}}\right) = \\ &= \underbrace{\sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_k=0}^1 (-1)^{j_1+\dots+j_k} F\left(\frac{n}{p_1^{j_1} \dots p_k^{j_k}}\right)}_{= f(n)} \underbrace{\sum_{l_1=0}^1 \dots \sum_{l_t=0}^1 (-1)^{l_1+\dots+l_t} F\left(\frac{m}{q_1^{l_1} \dots q_t^{l_t}}\right)}_{= f(m)} = \\ &= f(n) \cdot f(m) \text{ из ф-лы обращения.} \end{aligned}$$

Примеры:

1. $\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \Rightarrow 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \tau\left(\frac{n}{d}\right).$

2. Пусть $\varphi(n)$ — функция Эйлера, т.е.

$$\varphi(n) = \#\{k \leq n : (k, n) = 1\}.$$

Заметим, что
$$\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \#\left\{k \leq \frac{n}{d} : \left(k, \frac{n}{d}\right) = 1\right\} =$$
$$= \#\{k \leq n : (k, n) = d\} = |M_d(n)|.$$

$$\bigcup_{d|n} M_d(n) = \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n.$$

Из обратного утверждения Мёбиуса следует:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Упр.: 1. Пусть при $\operatorname{Re} s > 1$ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Тогда

$$\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \text{ при } \operatorname{Re} s > 1.$$

Д-во:

Пусть $s > 1$ (без. -ое). Перемножим два ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} \stackrel{(*)}{=} \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{(mn)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \underbrace{\sum_{m|k} \mu(m)}_{=1} = 1^{-s} = 1.$$

(*) — верно, т.к. оба ряда с. - ся абс. -но при $s > 1$.
Поскольку по th. Вейерштрасса оба ряда задают
унив. -ое пр. -ие при $\operatorname{Re} s > 1$, то из th. единственности
и гом. -ого рав - ва следует его справедливость
при $\operatorname{Re} s > 1$.

2. D-mb, amo $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$, $\operatorname{Re} s > 1$.

D-bo: nym $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{n|k} 1 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tau(k)}{k^s} -$$

beprmo u nym $\operatorname{Re} s > 1$.

3. $\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(k)}{k} = cn + O(\log n)$, rge $c = \frac{1}{\zeta(2)}$

D-bo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) \frac{k}{d} &= \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d \leq n} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{k \leq n \\ k \equiv 0(d)}} 1 = \\ &= \sum_{d \leq n} \frac{\mu(d)}{d} \cdot \frac{n}{d} + o \cdot \sum_{d \leq n} \frac{1}{d} = \\ &= n \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \underbrace{n \sum_{d > n} \frac{\mu(d)}{d^2}}_{= O(1)} + O(\log n) = \\ &= n \zeta^{-1}(2) + O(\log n) \end{aligned}$$

$$\sum_{d \leq n} \frac{1}{d} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$D/3:$ ① $\sigma(n) := \sum_{d|n} d \Rightarrow n = \sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right).$

② $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 2$

Свойства $\zeta(s)$.

Умб.: $\zeta(s) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s > 1$.

Д-во:

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\mu(n)|}{|n^s|} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} = \zeta(\sigma), \text{ где } \sigma = \operatorname{Re} s.$$

$$\zeta(\sigma) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} = 1 - \frac{1}{1-\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \Rightarrow |\zeta(s)| \geq \frac{\sigma-1}{\sigma} > 0, \quad \sigma > 1. \quad \blacksquare$$

Теорема (множество Эйлер):

$$\text{при } \operatorname{Re} s > 1 \quad \zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

Д-во:

$$\text{рассм. } \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots \right) = \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} + R_N(s), \text{ где } R_N(s) = \sum'_{n > N} \frac{1}{n^s} \text{ и}$$

$\sum'$ — означает, что если $p|n$, то $p \leq N$.

$$|R_N(s)| \leq \sum_{n > N} \frac{1}{n^\sigma} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty$$

Переходим к $\lim$ при $N \rightarrow +\infty$ и всё г-но.

Упр. (гр-на суммирования Абеля):

пусть $f \in C^1[a; b]$, $c(n)$ — конн.-ве числа.

Тогда
$$\sum_{a < n \leq b} c(n) f(n) = - \int_a^b C(u) f'(u) du + C(b) f(b),$$

где
$$C(u) = \sum_{a < n \leq u} c(n).$$

До-во:

$$\int_a^b \sum_{a < n \leq u} c(n) f'(u) du = \sum_{a < n \leq b} c(n) \int_n^b f'(u) du =$$

$$= \sum_{a < n \leq b} c(n) (f(b) - f(n)).$$

Утв. (ф-ла суммирования Эйлера):

пусть $f \in C^1[a; b]$, тогда

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(u) du + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(u)f'(u) du,$$

$$\text{где } \rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}.$$

До-во:

из ср-м Абеля $\sum_{a < n \leq b} f(n) = - \int_a^b C(u) f'(u) du + C(b)f(b) =$

$$\text{где } C(u) = \sum_{a < n \leq u} 1 = [u] - [a] = u - \{u\} - a + \{a\} =$$

$$= u + \rho(u) - a - \rho(a).$$

$$\begin{aligned} &= -u f(u) \Big|_a^b + \int_a^b f(u) du - \int_a^b \rho(u) f'(u) du + (a + \rho(a)) (f(b) - f(a)) + \\ &+ (\underline{b + \rho(b)} - a - \rho(a)) f(b) = \int_a^b f(u) du - \int_a^b \rho(u) f'(u) du + \\ &+ \rho(b) f(b) - \rho(a) f(a). \end{aligned}$$

Ymb.: mycm $N \in \mathbb{N}$. Tloga nru $\operatorname{Re} s > 0$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{+\infty} p(u) u^{-s-1} du.$$

D-60:

mycm $\operatorname{Re} s > 1$, $M > N$, ($M, N \in \mathbb{N}$). Tlo op-ne Fünepa

$$\sum_{N < n \leq M} \frac{1}{n^s} = \int_N^M \frac{du}{u^s} + \frac{1}{2} M^{-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^M \frac{p(u) du}{u^{s+1}}.$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} : \sum_{n > N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{+\infty} \frac{p(u)}{u^{s+1}} du -$$

anow. -a2 nru $\operatorname{Re} s > 0$ nroue $s = 1$.

Creymbue:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{p(u)}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{p(u)}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

D/3: ① $\sigma(n) := \sum_{d|n} d \Rightarrow n = \sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right).$

② $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 2.$

③ D-mb npu $\operatorname{Re} s > -1$ op-uy: $(\sigma|u) = \int_0^u p(x) dx$
 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s(s+1) \int_N^{+\infty} \frac{\sigma(u)}{u^{s+2}} du, \quad N \in \mathbb{N}.$

④ Пусть $\Delta(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$

D-mb, rmo $\sum_{d|n} \Delta(d) = \ln n.$

Умб.: при $\operatorname{Re} s > 1$ — $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$.

D-60:

нужно $s \in \mathbb{R}$ и $s \geq 1+\delta$ ($\delta > 0$). Тогда

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$\ln \zeta(s) = - \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$. Взяв логарифм почленно дифференцируем:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_p \frac{\ln p}{1 - \frac{1}{p^s}} \cdot \frac{1}{p^s} = - \sum_p \frac{\ln p}{p^s} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) \stackrel{(*)}{=} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

(*) — допустимо, поскольку члены ряда положительные и можем их переставлять.

конечн. при $\operatorname{Re} s > 1$.

Задачи:

1. $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right)$, где $\gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right)$.

2. $\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$.

Доказательство:

1. Из формулы Эйлера

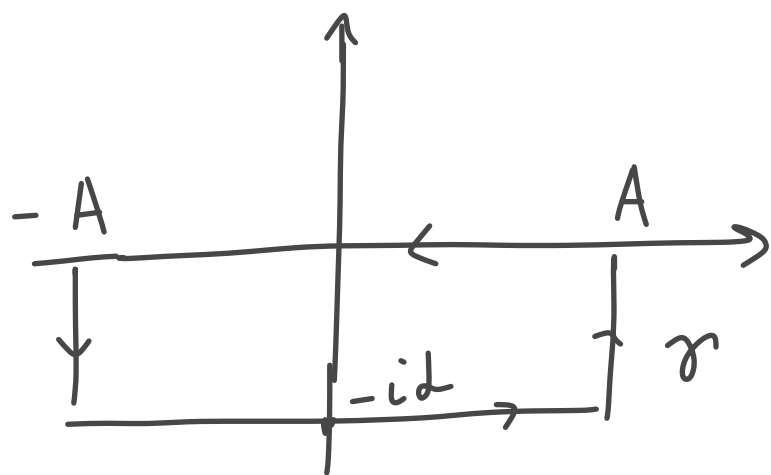
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &= 1 + \int_1^N \frac{du}{u} + O\left(\frac{1}{N}\right) - \frac{1}{2} + \int_1^N \frac{p(u)}{u^2} du = \\ &= \ln N + \frac{1}{2} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{p(u)}{u^2} du}_{=\gamma} + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

$$2. \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{p(u)}{u^{s+1}} du, \quad \operatorname{Re} s > 0 \Rightarrow \text{зак. 1}$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma.$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-iz)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du, \quad z \in \mathbb{R}.$

Решение:



$$\int_{\gamma} e^{-u^2} du = 0 \quad (\text{из th. Коши})$$

о контуре

$$\int_0^L e^{-(\pm A - it)^2} dt = \int_0^L e^{-(A^2 - t^2 \pm 2iAt)} dt \ll$$

$$\ll \int_0^L e^{-(A^2 - t^2)} dt \ll L e^{-\frac{A^2}{2}} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty.$$

$A^2 \gg 2L^2$

Ит.о. $\int$ -мн по верм. -ым отрезкам $\rightarrow 0$
 при $A \rightarrow +\infty$, и справедливо нужное
 равенство.

D/3:

$$\textcircled{1.} \quad \sigma(n) := \sum_{d|n} d \Rightarrow n = \sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right).$$

$$\textcircled{2.} \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 2.$$

$$\textcircled{3.} \quad \text{D-mb npu } \operatorname{Re} s > -1 \text{ q-uy: } (\sigma(u) = \int_0^u \rho(x) dx)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s(s+1) \int_N^{+\infty} \frac{\sigma(u)}{u^{s+2}} du, \quad N \in \mathbb{N}.$$

$$\textcircled{4.} \quad \text{Fyem} \Delta(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{emu } n = p^k \\ 0, & \text{unore} \end{cases}.$$

$$\text{D-mb, amo } \sum_{d|n} \Delta(d) = \ln n.$$

$$\textcircled{5.} \quad \text{D-mb, amo } \frac{n}{\ln \ln n} \ll \varphi(n) \leq n.$$

$$\textcircled{6.} \quad \text{Bwuwuwuw} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du.$$