Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 1.

Теретёнков Александр Евгеньевич

9 февраля 2021 г.

В прошлом семестре...

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[\hat{H}, \rho_t] + \sum_j \left(\hat{C}_j \rho_t \hat{C}_j^\dagger - \frac{1}{2}\hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \rho_t - \frac{1}{2}\rho_t \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \right)$$

Линейные и квадратичные формы

Рассмотрим гильбертово пространство $\otimes_{j=1}^{n} \ell_2$. В таком пространстве можно задать n пар операторов рождения и уничтожения по формулам

$$\hat{a}_i |\nu_1, \ldots, \nu_i, \ldots, \nu_n\rangle = \sqrt{\nu_i} |\nu_1, \ldots, \nu_i - 1, \ldots, \nu_n\rangle,$$
$$\hat{a}_i^\dagger |\nu_1, \ldots, \nu_i, \ldots, \nu_n\rangle = \sqrt{\nu_i + 1} |\nu_1, \ldots, \nu_i + 1, \ldots, \nu_n\rangle,$$

где $|\nu_1, \ldots, \nu_i, \ldots, \nu_n\rangle, \ \nu_i \in \mathbb{Z}_+$ — базис в $\otimes_{j=1}^{n} \ell_2$.

Линейные и квадратичные формы

Такие операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0.$$

Линейные и квадратичные формы

Так как мы будем работать с квадратичными и линейными комбинациями из этих операторов, то нам будет удобно составить из операторов рождения и уничтожения $2n$-мерный вектор $\mathfrak{a} = \left(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n, \hat{a}_1^\dagger, \cdots, \hat{a}_n^\dagger\right)^T$. Тогда введём естественные обозначения

$$f^T \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}^T f \equiv \sum_{i=1}^{n} (f_i \hat{a}_i + f_{i+n} \hat{a}_i^\dagger), \qquad \forall f \in \mathbb{C}^{2n},$$

$$\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (K_{i,j} \hat{a}_i \hat{a}_j + K_{i+n,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + K_{i,j+n} \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger + K_{i+n,j+n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger),$$

Линейные и квадратичные формы

Отметим, что данное определение не предполагает нормального упорядочения операторов рождения и уничтожения, которое мы будем обозначать парами двоеточий. В частности,

$$: \mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} :\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (K_{i,j} \hat{a}_i \hat{a}_j + (K_{i+n,j} + K_{i,j+n}) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + K_{i+n,j+n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger),$$

Эрмитово сопряжение матриц $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ будем обозначать $^+$.

Линейные и квадратичные формы

Определим $2n \times 2n$-мерные матрицы как:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная матрица в $\mathbb{C}^{n\times n}$.
Тогда канонические коммутационные соотношения (ККС) в таких обозначениях принимают вид

$$[f^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T g] = -f^T J g, \quad \forall g, f \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Определение. $\sim$-сопряжение векторов и матриц определяется формулами:

$$\tilde{g} = E\overline{g},\ g \in \mathbb{C}^{2n}, \qquad \tilde{K} = E\overline{K}E,\ K \in \mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

где черта сверху обозначает (поэлементное) комплексное сопряжение.

Линейные и квадратичные формы

Упражнение. Тогда эрмитово сопряжение действует по формулам

$$(g^T \mathfrak{a})^\dagger = \tilde{g}^T \mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a})^\dagger = \mathfrak{a}^T \tilde{K}^T \mathfrak{a}, \qquad \forall g \in \mathbb{C}^{2n}, K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

в частности, $(\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a})^\dagger = \mathfrak{a}^T \tilde{K} \mathfrak{a}$ при $K = K^T$.
Замечание. $\sim$-сопряжение инволютивно

$$\tilde{\tilde{K}} = K, \qquad \tilde{\tilde{g}} = g, \qquad \forall g \in \mathbb{C}^{2n}, K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

и полулинейно

$$(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)^\sim = \overline{\lambda}_1 \tilde{K}_1 + \overline{\lambda}_2 \tilde{K}_2, \qquad \forall K_1, K_2 \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

След

Будем писать tr для следа по пространству $\otimes_{j=1}^{n} \ell_2$ и Tr для следа по пространству $\mathbb{C}^{2n}$.

След

Поясним введённые обозначения на примере. Рассмотрим $2n \times 2n$-матрицу $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T\rho$ с операторнозначными компонентами

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T\rho \equiv \begin{pmatrix} \hat{a}_1^2\rho & \cdots & \hat{a}_1\hat{a}_n\rho & \hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\rho & \cdots & \hat{a}_1\hat{a}_n^\dagger\rho \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_n\hat{a}_1\rho & \cdots & \hat{a}_n^2\rho & \hat{a}_n\hat{a}_1^\dagger\rho & \cdots & \hat{a}_n\hat{a}_n^\dagger\rho \\ \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\rho & \cdots & \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_n\rho & (\hat{a}_1^\dagger)^2\rho & \cdots & \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_n^\dagger\rho \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_1\rho & \cdots & \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n\rho & \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_1^\dagger\rho & \cdots & (\hat{a}_n^\dagger)^2\rho \end{pmatrix},$$

След

Тогда

$$\mathrm{tr}(\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rho) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\hat{a}_1^2\rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1\hat{a}_n\rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1\hat{a}_n^\dagger\rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_n\hat{a}_1\rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^2\rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_n\hat{a}_1^\dagger\rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n\hat{a}_n^\dagger\rho) \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_n\rho) & \mathrm{tr}((\hat{a}_1^\dagger)^2\rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_n^\dagger\rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_1\rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n\rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_1^\dagger\rho) & \cdots & \mathrm{tr}((\hat{a}_n^\dagger)^2\rho) \end{pmatrix},$$

— $2n \times 2n$-матрица с комплексными числовыми элементами, а

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rho) = \sum_{i=1}^{n}(\hat{a}_i^2 + (\hat{a}_i^\dagger)^2)\rho$$

— оператор в $\otimes_{j=1}^{n}\ell_2$.

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Лемма. (Симметризация форм) Пусть $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда:

$$\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T)\mathfrak{a} - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} K^T J = \mathfrak{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T)\mathfrak{a} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} K J.$$

Сначала вычислим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}^T f g^T \mathfrak{a} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{a}^T f g^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T g f^T \mathfrak{a}) + \frac{1}{2}[\mathfrak{a}^T f, g^T \mathfrak{a}] = \\
&= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T (f g^T + g f^T)\mathfrak{a} - \frac{1}{2} f^T J g = \\
&= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T (f g^T + g f^T)\mathfrak{a} - \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(g f^T J),
\end{aligned}$$

где были использованы ККС. Произвольную матрицу $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ можно представить в виде $K = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, поэтому по линейности получаем требуемую формулу. □

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Лемма. (Симметризация форм) Пусть $K \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, тогда:

$$\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^T \frac{1}{2}(K+K^T)\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\operatorname{Tr} K^T J = \mathfrak{a}^T \frac{1}{2}(K+K^T)\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} K J.$$

Сначала вычислим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}^T f g^T \mathfrak{a} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{a}^T f g^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T g f^T \mathfrak{a}) + \frac{1}{2}[\mathfrak{a}^T f, g^T \mathfrak{a}] = \\
&= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T (f g^T + g f^T)\mathfrak{a} - \frac{1}{2} f^T J g = \\
&= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T (f g^T + g f^T)\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(g f^T J),
\end{aligned}$$

где были использованы ККС. Произвольную матрицу $K \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ можно представить в виде $K = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, поэтому по линейности получаем требуемую формулу. $\square$

Эта лемма важна, когда нам необходимо приравнять две формы, так как приравнивать можно только симметризованные формы.

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Лемма. Пусть $K = K^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, тогда нормально упорядоченная и неупорядоченная формы связаны формулой

$$\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} =: \mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} : + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} EK.$$

Упражнение. (Коммутатор двух форм.) Пусть $K = K^T, M = M^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ и $g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда:

$$\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} + g^T \mathfrak{a}, \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T M \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T (MJK - KJM)\mathfrak{a} + (f^T JK - g^T JM)\mathfrak{a} - g^T J f.$$

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Лемма. Пусть $K = K^T, M = M^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ и $g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда:

$$e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K\mathfrak{a}+g^T\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T M\mathfrak{a} + f^T\mathfrak{a}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K\mathfrak{a}-g^T\mathfrak{a}} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T e^{-KJ} M e^{JK}\mathfrak{a} + \left(e^{-KJ} M \frac{e^{JK} - I}{JK} Jg + e^{-KJ} f\right)^T \mathfrak{a} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} g^T J \frac{e^{-KJ} - I}{KJ} M + f^T\right) \frac{e^{JK} - I}{JK} Jg.$$

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{a}(\tau) = e^{\left(\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K\mathfrak{a}+g^T\mathfrak{a}\right)\tau}\mathfrak{a}e^{-\left(\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K\mathfrak{a}+g^T\mathfrak{a}\right)\tau}$. Дифференцируя по τ, мы получим уравнения Гейзенберга: $\frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{a}(\tau) = [\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T(\tau)K\mathfrak{a}(\tau) + g^T\mathfrak{a}(\tau), \mathfrak{a}(\tau)]$. С учётом выражений для коммутаторов мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathfrak{a}(\tau) = JK\mathfrak{a}(\tau) + Jg, \qquad \mathfrak{a}(0) = \mathfrak{a}.$$

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, его решение $\mathfrak{a}(\tau) = e^{JK\tau}\mathfrak{a} + \frac{e^{JK\tau}-I}{JK}Jg$. Для квадратичных и линейных форм имеем:

$$e^{\left(\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K\mathfrak{a}+g^T\mathfrak{a}\right)\tau}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T M\mathfrak{a} + f^T\mathfrak{a}\right) e^{-\left(\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K\mathfrak{a}+g^T\mathfrak{a}\right)\tau}$$

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T(\tau)M\mathfrak{a}(\tau) + f^T\mathfrak{a}(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{JK\tau}\mathfrak{a} + \frac{e^{JK\tau}-I}{JK}Jg\right)^T M\left(e^{JK\tau}\mathfrak{a} + \frac{e^{JK\tau}-I}{JK}Jg\right) +$$

$$+ f^T\left(e^{JK\tau}\mathfrak{a} + \frac{e^{JK\tau}-I}{JK}Jg\right).$$

При $\tau = 1$, собирая члены при каждой степени $\mathfrak{a}$, получим доказываемую формулу.

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Лемма. (Производная экспоненты.) Пусть $K_t = K_t^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда:

$$\left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K_t \mathfrak{a} + g_t^T \mathfrak{a} + c_t}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K_t \mathfrak{a} - g_t^T \mathfrak{a} - c_t} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1} \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t\right) +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} \left(\operatorname{sh}(K_t J) - K_t J\right) \frac{1}{K_t J} g_t + c_t\right).$$

Упражнение. $e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1}$ — симметрична.

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Идея доказательства предыдущей леммы:

Лемма. Формула Фейнмана-Вилкокса

$$e^{-R_t}\frac{d}{dt}e^{R_t} = \int_0^1 ds\; e^{-sR_t}\left(\frac{d}{dt}R_t\right)e^{sR_t}$$

$$\left(\frac{d}{dt}e^{R_t}\right)e^{-R_t} = \int_0^1 ds\; e^{sR_t}\left(\frac{d}{dt}R_t\right)e^{-sR_t}$$

Доказательство. Обозначим

$$F_t(s) = \frac{d}{dt} e^{sR_t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} F_t(s) = \frac{d}{dt}\left(R_t e^{sR_t}\right) =$$
$$= \left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t} + R_t \frac{d}{dt}\left(e^{sR_t}\right) = \left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t} + R_t F_t(s)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sR_t} F_t(s)\right) = e^{-sR_t}\left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t}$$

$$e^{-R_t} \frac{d}{dt} e^{R_t} = \int_0^1 ds\; e^{-sR_t}\left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t}$$

Вычислений с квадратичными и линейными формами

Доказательство. Обозначим

$$F_t(s) = \frac{d}{dt} e^{sR_t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} F_t(s) = \frac{d}{dt}\left(R_t e^{sR_t}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t} + R_t \frac{d}{dt}\left(e^{sR_t}\right) = \left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t} + R_t F_t(s)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sR_t} F_t(s)\right) = e^{-sR_t}\left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t}$$

$$e^{-R_t} \frac{d}{dt} e^{R_t} = \int_0^1 ds\, e^{-sR_t}\left(\frac{d}{dt} R_t\right) e^{sR_t}$$

Квадратичный супероператор

Рассмотрим квадратичный супероператор общего вида:

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathfrak{a}^T \Gamma \rho \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma_L \mathfrak{a} \rho + \rho \mathfrak{a}^T \Gamma_R \mathfrak{a} + \rho g_R^T \mathfrak{a} + g_L^T \mathfrak{a} \rho + \lambda \rho,$$

где $\Gamma, \Gamma_L = \Gamma_L^T, \Gamma_R = \Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2n}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Квадратичный супероператор

Определим $\mathcal{L}^*$

$$\operatorname{tr}((\mathcal{L}^*(\hat{X}))^\dagger \rho) = \operatorname{tr}(\hat{X}^\dagger \mathcal{L}(\rho)).$$

и $\mathcal{L}^+$

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \left(\mathcal{L}(\rho^\dagger)\right)^\dagger.$$

Упражнение.

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{a} \rho + \rho \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{a} + \rho \tilde{g}_L^T \mathfrak{a} + \tilde{g}_R^T \mathfrak{a} \rho + \overline{\lambda} \rho,$$
$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{a} \hat{X} + \hat{X} \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{a} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathfrak{a} + \tilde{g}_L^T \mathfrak{a} \hat{X} + \overline{\lambda} \hat{X}.$$

Квадратичный супероператор

Определим $\mathcal{L}^*$

$$\mathrm{tr}((\mathcal{L}^*(\hat{X}))^\dagger \rho) = \mathrm{tr}(\hat{X}^\dagger \mathcal{L}(\rho)).$$

и $\mathcal{L}^+$

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \left(\mathcal{L}(\rho^\dagger)\right)^\dagger.$$

Упражнение.

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{a} \rho + \rho \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{a} + \rho \tilde{g}_L^T \mathfrak{a} + \tilde{g}_R^T \mathfrak{a} \rho + \overline{\lambda} \rho,$$
$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{a} \hat{X} + \hat{X} \mathfrak{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{a} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathfrak{a} + \tilde{g}_L^T \mathfrak{a} \hat{X} + \overline{\lambda} \hat{X}.$$

Квадратичный супероператор

Утверждние. Пусть $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*(I) = 0$, тогда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, \rho\right] + \mathfrak{a}^T \rho \Gamma \mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T \Gamma^T \mathfrak{a} \rho - \frac{1}{2}\rho\, \mathfrak{a}^T \Gamma^T \mathfrak{a},$$

где

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad H = H^T = \tilde{H}, \quad f = \tilde{f}.$$

Квадратичный супероператор

Утверждние. При $\hat{H} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + h^T \mathfrak{a}$ и $\hat{C}_i = \gamma_i^T \mathfrak{a} + c_i$ генератор ГКСЛ принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, \rho\right] + \mathfrak{a}^T \rho \Gamma \mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T \Gamma^T \mathfrak{a} \rho - \frac{1}{2}\rho\, \mathfrak{a}^T \Gamma^T \mathfrak{a},$$

где

$$\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T, \qquad l = \sum_i \overline{c_i} \gamma_i, \qquad f = h + i\,\frac{l - \tilde{l}}{2}.$$

Более того, возможность написать Γ и f в таком виде эквивалентна условиям

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad \Gamma E \geqslant 0, \quad f = \tilde{f}.$$