Некоторые факты и открытые вопросы теории квазиконформных отображений

В.А. Зорич

Аннотация

Мы напомним некоторые факты теории квазиконформных отображений и сформулируем несколько примыкающих к ним открытых вопросов. Доклад может быть базой для адекватного восприятия более специального будущего доклада, относящегося к этой области.

ПЛАН

Глобальный гомеоморфизм.
Идея и схема доказательства. Роль размерности.
Конформные инварианты.

Радиус инъективности.
Вопрос о теореме искажения.

Изолированная особенность погружения.
Пикар. Модельная задача о стирании отрезка.

Гиперболический случай.
Граничное поведение.

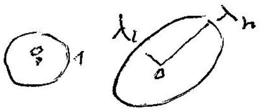
Конформный тип риманова многообразия.
Изопериметрическое неравенство.

Квазиконформность по Громову
Вопрос о теореме Лиувилля.

I. Два вводных слова

1. Конформное и квазиконформное отображение

a) Линейное невырожденное отображение $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$



$k_L = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \ge 1$ коэффициент квазиконф-ти.

L - конформно $\Longleftrightarrow k_L = 1$ $\ln k_L$ – мера отклонения от конформн-ти

b) $f \in \mathrm{Diff}(D \subset \mathbb{R}^n, fD \subset \mathbb{R}^n)$

$$D \ni x \mapsto f'(x) \longmapsto k_{f'(x)} =: k_f(x) \longmapsto \sup_{x\in D} k_f(x) =: k_f$$

k_f - коэффициент квазиконф-ти f в области D.

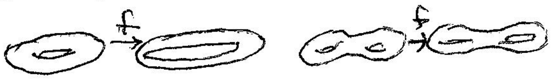
c) Общее определение (для риман. мн-ий и метр. пр-в $f: X \to Y$)

$$k_f(x_0) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{d_X(x,x_0)=\varepsilon} d_Y(f(x), f(x_0)) \Big/ \inf_{d_X(x,x_0)=\varepsilon} d_Y(f(x), f(x_0))\right)$$

коэффициент квазиконф-ти f в точке x_0

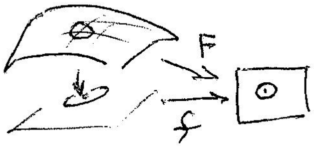
2. Где встречаются квазиконф. отображения.

a) Расстояние между конформн. структурами (Метрика Тейхмюллера) $\log k_f$



$(k_{f_2\circ f_1} \le k_{f_2}\cdot k_{f_1})$

b) Изотермические координаты на пов-ти



$f_{\bar z} = \mu f_z$ $|\mu| \le c < 1$

c) Конформная жёсткость областей пр-ва $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$ (Лиувилль, 1850.)

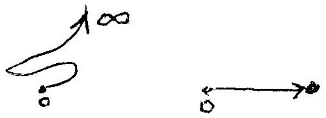
II. Теорема о глобальном гомеоморфизме (Glob. Hom. Th.)

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ f \text{ - loc. hom.} \\ f \text{ - qc} \end{array}\right] \overset{n>2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} f \text{ - glob. hom:} \\ f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \\ \exists f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

Роль $n>2$ $\quad z \mapsto e^z = w$, $\quad \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus 0$

Схема доказательства.

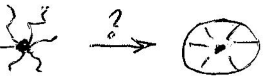
1. Идея продолжения ростка $f^{-1}(0)$.



a) Поднятие пути.

b) Особые точки и поведение накрывающего пути.

2. Много особых точек быть не может! $(n \geq 2)$

a) Наводящие соображения 

b) Конформные инварианты (напоминание)

• Конформная ёмкость конденсатора

$u \in A(R(E_0, E_1))$ $\quad \operatorname{Cap}_n R(E_0, E_1) = \inf\limits_{u \in A(R)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n dv$

$u \geq 0 \quad u|_{E_0} = 0 \quad u|_{E_1} = 1$

Инвариантность $|\nabla u|^n dv$ при конф. замене метрики

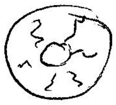
$d\tilde{s} = \lambda\, ds \qquad |\tilde{\nabla} u| = \lambda^{-1} |\nabla u| \qquad |\tilde{\nabla} u|^n d\tilde{v} = |\nabla u|^n dv$

$d\tilde{v} = \lambda^n dv$

•• Модуль (конформный модуль) семейства кривых в $\mathbb{R}^n$:

$\Gamma = \{\gamma\} \quad \rho \in A(\Gamma) \quad \rho \geq 0$ и $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1$ при $\forall \gamma \in \Gamma$.

$$M_n(\Gamma) := \inf_{\rho \in A(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dv$$

(Связь $\operatorname{Cap} R(E_0, E_1)$ и $M(\Gamma)$ на примере )

Интерпретация $M_n(\Gamma)$ как проводимости и некоторые свойства $M_n(\Gamma)$ (удлинение кривых, сокращение, расширение Γ, ...)

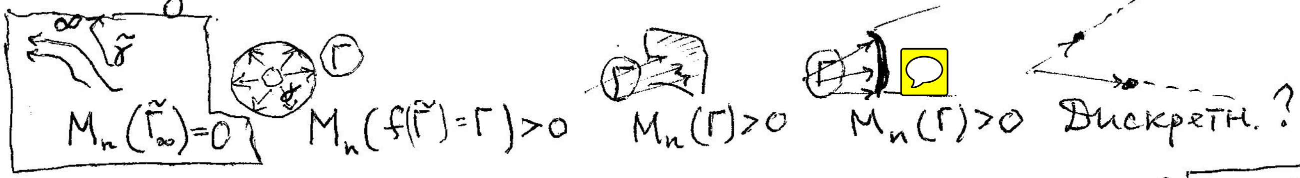
Используемые далее свойства:

•  $M_n(\Gamma_\infty) = 0$

• $M_n(\Gamma) = 0 \Longrightarrow M_n(f(\Gamma)) = 0 \quad f$ - qc

• $M_n(\Gamma) < \infty \Longrightarrow M_n(f(\Gamma)) < \infty \quad f$ - qc

Почему же много особых точек быть не может?

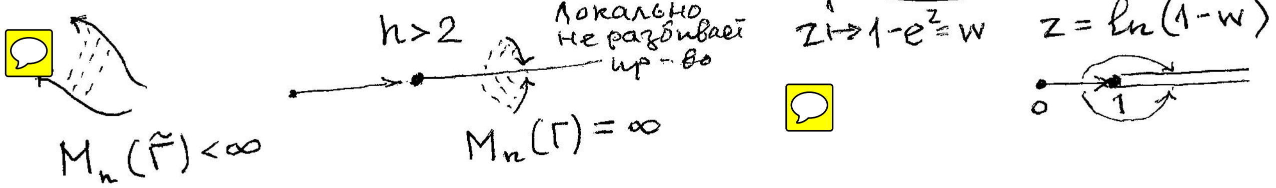


Почему мало особых точек быть не может? $\boxed{n>2}$

(но не пустое мн-во)

При $n=2$ может

$z \mapsto 1-e^z = w \quad z=\ln(1-w)$



III. О двух обобщениях GHT и двух вопросах

1. Радиус инъективности (теорема M.R.V.)

$$\left.\begin{array}{l} f: B^n \to \mathbb{R}^n \\ f - \text{loc. hom} \\ f - qc \end{array}\right] \overset{n>2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} f|B^n(r) - \text{hom} \\ r = r(n,q) \quad q = k_f \end{array}\right. \qquad \underbrace{r \overset{?}{=} r(k_f)}_{\text{Гипотеза}}$$

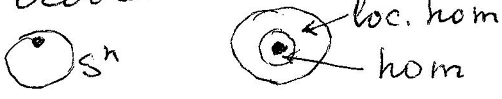
1'. Вопрос о теореме искажения

Жесткость при $n \nearrow$

Симметрия? (Дубинин?)

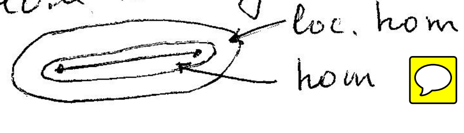
2. Изолир особенность

∞ $\mathbb{R}^n$



2'. Вопрос о граничном поведении

Модельная задача



IV. Квазиконформность в смысле М. Громова

Вопрос Громова об общей теореме Лиувилля.