

Однородные турниры и дискретные динамические системы Лотки-Вольтерра

Таджиева Мохбону Акромовна

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Ганиходжаев Р.Н.

11.02.2021

В задачах популяционной генетики естественным образом возникают квадратично стохастические операторы, действующие в конечномерном симплексе. При этом эволюция биологической системы описывается дискретной динамической системой, порожденной квадратично стохастическим оператором.

В первые простейшие модели генетических систем были изучены в работах В.Вольтерра ^a, С.Н.Бернштейна ^b, Ю.И.Любича ^c и других авторов.

^aВ.Вольтерра. Математическая теория барьбы за существование, М.:Наука (1976), 283 с

^bБернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Ученые записки н.-и. каф. Укр. Отд. Мат. 1924. Вып.1., с.83-115.

^cLyubich.Yu. Mathematical structures in population genetics. "Springer-Verlag"(1992).

Применение аналитических и вероятностных методов к изучению биологической системы предлагалась и развивалась в работах Т.А. Сарымсакова ^a. По его предложению были детально изучены квадратично стохастические операторы вольтерровского типа.

В работе Р.Н.Ганиходжаева ^b изучались квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа с применением теории графов и качественной теории дифференциальных уравнений. Основной задачей в этой теории является изучение предельного поведения траектории квадратично стохастических операторов.

^aSarymsakov T.A. On some probabilistic probleme in the theory of quadratic opatore. Springer Proceeding in Physics, 67, (1992), p.143-149.

^bГаниходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Мат. сб. - 1992. - 8 (183). - С. 129-141.

Предварительные сведения

Пусть Y -конечное непустое множество, а M -подмножество неупорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in Y$, причем $x \neq y$. При этом пара (Y, M) называется графом.

Элементы Y называются вершинами, если $(x, y) \in M$, то (x, y) называется ребром, причем x и y являются смежными.

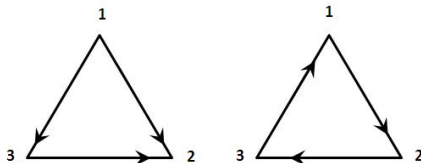
Граф полный, если любые два различные вершины являются смежными.

Если каждое ребро снабжено направлением, то граф называется ориентированным.

Два графа (Y_1, M_1) и (Y_2, M_2) называются изоморфными, если существует биекция Y_1 на Y_2 сохраняющая смежность вершин.

Турнир-полный ориентированный граф.

1



¹Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. - М.: Мир, 1977. - 324 с.

Пусть x_1, x_2 вершины турнира. Запись $x_1 \rightarrow x_2$ означает, что ребро соединяющее x_1 и x_2 направлено от x_1 к x_2 .

Конечная последовательность вершин $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_p$ называется маршрутом, если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Цикл это замкнутый маршрут, т.е. $x_p = x_1$.

Турнир сильный, если для любых вершин $x, y \in Y$ существует маршрут с началом x и концом y .

Турнир не имеющий циклов называется транзитивным.

Однородные турниры

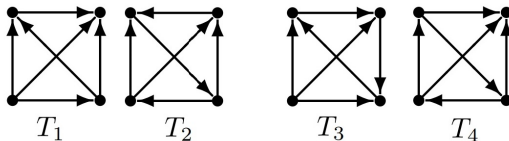
Определение 1

Турнир называется однородным, если его любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Пусть $|Y|$ - количество элементов Y .

Очевидно, при $|Y| \leq 3$ любой турнир однороден.

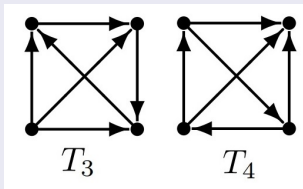
Как известно,^a при $|Y| = 4$ существуют четыре попарно неизоморфных турнира



Пусть $|Y| \geq 4$.

Теорема 1

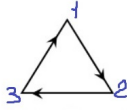
^a Любой турнир с вершинами Y не содержащий подтурниров изоморфных T_3 или T_4 однороден.



^aР.Н. Ганиходжаев (2009) Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем. Матем. заметки, том 56, выпуск 5, 40-49.

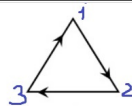
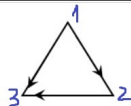
$$^2 |Y| \leq 6$$

			
(0, 1, 2, 3, 4)	(0, 1, 3, 3, 3)	(0, 2, 2, 3, 3)	(0, 2, 2, 2, 4)
			
(1, 1, 1, 3, 4)	(1, 1, 2, 2, 4)	(1, 1, 2, 3, 3)	(1, 1, 2, 3, 3)
			
(1, 2, 2, 2, 3)	(1, 2, 2, 2, 3)	(1, 2, 2, 2, 3)	(2, 2, 2, 2, 2)

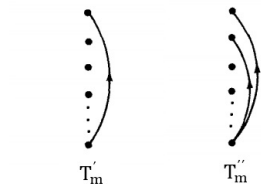
			
(0)	(0, 1)	(0, 1, 2)	(1, 1, 1)

• 1

1 $\longrightarrow$ 2



Пусть $|Y| = m$



В этом случае имеется $m - 2$ циклических троек, а именно $\overrightarrow{1im}$, где $i=2,3,\dots,m-1$



$\overrightarrow{125}, \overrightarrow{135}, \overrightarrow{145}$

Пусть $I = \{1, 2, \dots, m\}$ и $\alpha \subset I$ -непустое подмножество I .

Определение 2

Два подтурнира турнира T'_m с вершинами из $\alpha \subset I$ и $\beta \subset I$ называются смежными, если $|\alpha| = |\beta|$, причем пересечение этих подтурниров имеет количество вершин равное $|\alpha| - 1$

Ясно, что в случае T'_m любые две циклические тройки смежны, так как их пересечение есть одномерное ребро $\overline{1m}$.

Симплекс и кососимметрические матрицы

Пусть δ_{ij} — символ Кронекера и $e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{mk})$,
где $k = \overline{1, m}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$.
Тогда

$$S^{m-1} = \text{co}\{e_1, \dots, e_m\} = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

называется симплексом.

Для любого непустого $\alpha \subset I$ положим

$$\Gamma_\alpha = \text{co}\{e_i : i \in \alpha\}$$

который называется гранью S^{m-1} .

Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, m$ вещественная кососимметрическая матрица действующая в $\mathbb{R}^m$.

Для $\alpha \subset I = \{1, \dots, m\}$ положим $A_\alpha = (a_{ij})$, где $i, j \in \alpha$. В этом случае A_α называется главной подматрицей матрицы A .

Теорема 2

Если A - кососимметрическая матрица, то

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\}$$

непустой выпуклый многогранник.

Следствие 1

$Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$ также непустой выпуклый многогранник.

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то $Q = (1, 0)$ и $P = (0, 1)$

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, то $P = Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $P = (0, \lambda, 1 - \lambda)$, $Q = (1, 0, 0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0,5 & -1 \\ 1 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ -1 & 1 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$, то

$P = Q = (0, 2\lambda; 0, 15\lambda + 0, 25; 0, 5 - 0, 1\lambda; 0, 25 - 0, 25\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$

Пусть $|A_\alpha|$ -детерминант подматрицы A_α .

Определение 3

$A = (a_{ki})$ -называется *кососимметрической матрицей общего положения*, если $|A_\alpha| > 0$, для всех $\alpha \subset I$, таких, что $|\alpha|$ -четное число.

Теорема 3

Множество всех кососимметрических матриц общего положения открыто и всюду плотно в множестве всех кососимметрических матриц.

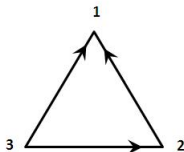
В частности, если $|\alpha| = 2$, $\alpha = \{k, i\}$, то $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a_{ki} \\ -a_{ki} & 0 \end{pmatrix}$.

Поэтому $|A_\alpha| > 0$ означает, что $a_{ki} \neq 0$ при всех $k \neq i$, что позволяет построить турнир соответствующий матрице A .

Элементы множества $I = \{1, \dots, m\}$ отметим в виде точек и соединим точку k с точкой i стрелкой направленной из k в i , если $a_{ki} < 0$ и обратно, если $a_{ki} > 0$.

Например, кососимметрической матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

соответствует турнир



Теорема 4

Если A кососимметрическая матрица общего положения, то множество P (соответственно Q) состоит из единственной точки.

Пусть $A = (a_{ki})$ -кососимметрическая матрица с условиям $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$. Тогда отображение $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ вида

$$x'_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i), \quad k = \overline{1, m}$$

называется дискретной динамической системой Лотки-Вольтерра при условии $|a_{ki}| \leq 1$ при всех k и i .

Пусть

$$X = \{x \in S^{m-1} : Vx = x\} \neq \emptyset$$

множество неподвижных точек.

Теорема 5

Если грань Γ_α симплекса S^{m-1} имеет внутреннюю неподвижную точку то подтурнир турнире T с вершинами из α является сильным.

Следствие 2

Если подтурнир T_α соответствующий грани Γ_α транзитивен, то V на Γ_α не имеет неподвижных точек кроме вершин этой грани.

Теорема 6

Для существования неподвижной точки V с тремя положительными координатами, скажем x_i, x_j, x_k необходимо и достаточно, чтобы подтурнир T с вершинами i, j и k был изоморфен циклической тройке.

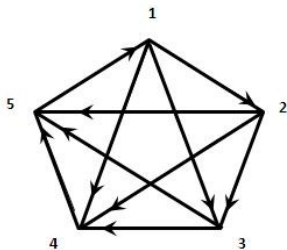
Если $|\alpha| \geq 5$, то из того, что T_α сильный подтурнир не следует, что Γ_α имеет внутреннюю неподвижную точку.

$$V : S^4 \rightarrow S^4$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5) \\ x_2' = x_2(1 + x_1 - x_3 - x_4 - x_5) \\ x_3' = x_3(1 + x_3 + x_2 - x_4 - x_5) \\ x_4' = x_4(1 + x_1 + x_2 + x_3 - x_5) \\ x_5' = x_5(1 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$$

имеет 5 неподвижных точек с одной ненулевой координатой, 3 неподвижных точек с тремя ненулевыми координатами определяемыми тремя циклическими тройками в T_5 .

T_5 :



$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

T'_m :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2m-1} & -a_{2m} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3m-1} & -a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & a_{m-1m} & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, V построенное по T'_m имеет m неподвижных точек с одной и $(m-2)$ неподвижных точек с тремя ненулевыми координатами при любых a_{ij} .

Существование неподвижных точек с 5, 7, 9 и т.д. ненулевыми координатами принадлежащими S^{m-1} зависит от некоторых неравенств от a_{ij} .

Для выяснения рассмотрим два сильных подтурнира T'_m с тремя вершинами, например, $\alpha = \{1, 2, m\}$ и $\beta = \{1, 3, m\}$.

Пусть $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 3, m\}$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{1m}x_m) \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{2m}x_m) \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{3m}x_m) \\ x'_m = x_m(1 - a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + a_{3m}x_m) \end{cases}$$

Тогда на Γ_γ имеем две неподвижных точки:

$$x_\alpha = \left(\frac{a_{2m}}{a_{12} + a_{3m} + a_{1m}}, \frac{a_{1m}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}}, 0, \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}} \right),$$

$$x_\beta = \left(\frac{a_{3m}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}}, 0, \frac{a_{1m}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}}, \frac{a_{13}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}} \right),$$

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{12} + a_{2m} + a_{3m}} (0, 0, a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m}, 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{13} + a_{1m} + a_{3m}} (0, a_{12}a_{3m} - a_{23}a_{1m} - a_{2m}a_{13}, 0, 0),$$

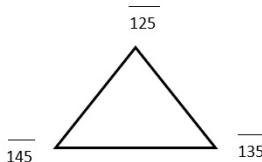
$$|A_\gamma| = (a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m})^2.$$

Таким образом, если $a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m} > 0$, тогда $A_\gamma x_\alpha \geq 0$ и $A_\gamma x_\beta \leq 0$. Следовательно, x_α является P точкой, а x_β Q точкой на грани Γ_γ .

Теорема 7

Любые две циклические тройки в T'_m смежны, причем из определяемых неподвижных точек одна P точка, а другая Q точка для грани содержащей их.

Все циклические тройки T'_m представим в виде точек и соединим $\overline{1im}$ с $\overline{1jm}$ стрелкой идущей из Q точки в P точку. Таким образом получим новый турнир из $m - 1$ точки, который обозначим как G_{m-1} .



Теорема 8

Если G_{m-1} транзитивный турнир, то отображение V не имеет в симплексе S^{m-1} неподвижных точек с пятью и более ненулевыми координатами.

Теорема 9

Если в G_{m-1} существует циклическая тройка, то существует неподвижная точка с 5 ненулевыми координатами.

Следствие 3

Число неподвижных точек V с 5 ненулевыми координатами равно числу циклических троек в турнире G_{m-1} .

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

1. R. N. Ganikhodzhaev, M. A. Tadzhieva and D. B. Eshmamatova.
Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex // **Journal of Mathematical Sciences**. — 2020. — Vol. 245, No. 3, — P. 398-402. (Scopus. IF=0.28).
2. М. А. Таджиева. On properties of a chart of the fixed points in the simplex S^4 // **Uzbek Mathematical Journal**—2019. — Vol. 1, — P. 133-143.

Тезисы в материалах конференций

1. Р. Н. Ганиходжаев, М. А. Таджиева. Устойчивость неподвижных точек дискретных динамических систем вольтерровского типа // ABSTRACTS of the Uzbekistan-Malaysia international online conference COMPUTATIONAL MODELS AND TECHNOLOGIES. — August 24-25, 2020, —191-192 стр.
2. Р. Н. Ганиходжаев, М. А. Таджиева. Конфликтные ситуации в дискретных динамических системах Лотки-Вольтерра // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум—130-131 стр.
3. R. N. Ganikhodzhaev, M. A. Tadzhieva. Quadratic stochastic operators with homogeneous tournament // A b s t r a c t s of the Joint International Conference S T E M M Science -Technology - Education - Mathematics - Medicine — May 13-17, 2019, Tashkent,— P. 55-56.

4. Р. Н. Ганиходжаев, М. А. Таджиева. О выпуклой оболочке Лотки-Вольтерра симплекса и их турниров // Амалий математика ва информатика технологияларининг долзарб муаммолари халқаро тезислар тўплами — Ноябрь-май 14-15, 2019, Тошкент, 154-бет.

5. R. N. Ganikhodzhaev, M. A. Tadzhieva. Dynamic properties of quadratic homomorphisms of a finite-dimensional simplex // The second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics — August 8-12, 2017, Urganch, — P. 34-35.

6. М. А. Таджиева. Динамика квадратичных стохастических операторов Вольтерровского типа соответствующих Устраненным турнирам // Современная топология муаммолари ва татбиқлари номли чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция тезислар тўплами. — Май 11-12, 2017, Тошкент, — 18-19 бетлар.