

Теорема (ф-ла суммирования Пуассона):

пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f из класса Ульриха,

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x t} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

D-то:

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$$

$$|f(x)| \ll \frac{1}{(|x|+1)^{1+\delta}}, \quad \forall x.$$

$F(x)$ - 1-периодическая

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}, \quad a_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

$$a_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx = \left\{ x+m = \tilde{x} \right\} =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(x) e^{-2\pi i n(x-m)} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(x) e^{-2\pi i n x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \hat{f}(n)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Ymb: $\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \quad x > 0. \quad \text{Morga}$

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \theta(x).$$

2-ból:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= e^{-\pi t x^2} \\ \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2\pi i y x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t \left(x + i \frac{y}{t}\right)^2} \cdot e^{-\frac{\pi y^2}{t}} dx = \\ &= e^{-\frac{\pi y^2}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} tx^2 = y^2 \\ x = \frac{y}{\sqrt{t}} \end{array} \right\} = \\ &= e^{-\frac{\pi y^2}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi y^2}}{\sqrt{t}} dy = \frac{e^{-\frac{\pi y^2}{t}}}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi y^2}{t}}}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Uz th. csegym

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{n^2}{t}}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Функциональное уравнение для $\zeta(s)$.

Теорема: $\zeta(s) = S(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) S(s) =$

$$= 1 + S(s-1) \int_1^{+\infty} \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx,$$

где $\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$.

$\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

$\operatorname{Re} s > 0$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx,$$

$$\Gamma^{-1}(s) = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-\frac{s}{n}}.$$

До-во:

нужно $\operatorname{Re} s > 1$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \left\{ x = \pi n^2 u \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} (\pi n^2 u)^{s-1} \pi n^2 du =$$

$$= (\pi n^2)^s \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{s-1} du$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \underbrace{(\pi n^2)^{\frac{s}{2}}}_{\pi^{\frac{s}{2}} n^s} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{\frac{s}{2}-1} du$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) S(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{\frac{s}{2}-1} du$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq N} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{\frac{s}{2}-1} du =$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \leq N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du =$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(\omega(u) - \sum_{n > N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du =$$

$$= \int_0^{+\infty} \omega(u) u^{\frac{s}{2}-1} du - R$$

$$R = \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n > N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du}_{R_N(u)}.$$

$$|R_N(u)| \leq \int_N^{+\infty} e^{-\pi u x^2} dx = \begin{cases} \pi u x^2 = v \\ 2\pi u x dx = dv \\ dx = \frac{dv}{2\pi u \sqrt{v}} \end{cases} = \int_{\pi u N^2}^{+\infty} e^{-v} \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \frac{1}{\sqrt{v}} dv$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \min \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}; (\pi u N^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{\pi u N^2}^{+\infty} e^{-v} dv \right)$$

$s = \sigma + it, \quad \sigma, t \in \mathbb{R}.$

$$\left| \int_0^{+\infty} R_N(u) u^{\frac{s}{2}-1} du \right| = \int_0^{N^{-1}} \frac{1}{2\sqrt{u}} u^{\frac{s}{2}-1} du + \int_{N^{-1}}^{+\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \frac{1}{2\pi u N} e^{-\pi u N^2} du =$$

$$= \frac{u^{\frac{s}{2}}}{(\frac{s}{2}-1)} \Big|_0^{N^{-1}} + \underline{I} = \frac{N^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{s}{2}-1} + \underline{I}.$$

$\rightarrow 0, N \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{N^{-1}}^{+\infty} u^{\frac{\sigma}{2}-2} \frac{1}{2\pi N} e^{-\pi u N^2} du = \left\{ \pi u N^2 = x \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi N} \int_{\pi N}^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\pi N^2} \right)^{\frac{\sigma}{2}-2} \frac{dx}{\pi N^2} \leq \\
 &\leq \frac{1}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}}} N^{-\sigma+4-1-2} \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{\sigma}{2}-2} dx}_{\parallel C(\sigma)} = \frac{C(\sigma)}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}}} N^{1-\sigma} \rightarrow 0 \\
 &\quad N \rightarrow +\infty \quad (\text{т.к. } \sigma > 1).
 \end{aligned}$$

Мы получим, что

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{+\infty} \omega(u) u^{\frac{s}{2}-1} du = \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \omega(u) u^{\frac{s}{2}-1} du &= \left\{ u = \frac{1}{x} \right\} = \int_1^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{s}{2}+1} \frac{dx}{x^2} = \\
 &= \int_1^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{s}{2}-1} dx.
 \end{aligned}$$

$du = -\frac{dx}{x^2}$

$$\theta(x) = 1 + 2\omega(x), \quad \theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \theta(x)$$

$$1 + 2\omega\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} (1 + 2\omega(x))$$

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \omega(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$\int_1^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{s}{2}-1} dx = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x} \omega(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2} \right) x^{-\frac{s}{2}-1} dx =$$

$$= \underbrace{\int_1^{+\infty} \left(\frac{x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-1} \right) dx}_{\parallel} + \int_1^{+\infty} \omega(x) x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx$$

$$\underbrace{\frac{x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{2}}_{\parallel} \Big|_1^{+\infty} + \underbrace{\frac{x^{-\frac{s}{2}}}{s}}_{\parallel} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \omega(x) \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx}_{\text{полн. в } \mathbb{C}}$$

$$\underbrace{s(s-1) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s)}_{\parallel} = 1 + s(s-1) \int_1^{+\infty} \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$\zeta(s)$ — **кси-функция Римана.**

1. $\zeta(s)$ — целая ф-ия.

2. $\boxed{\zeta(s) = \zeta(1-s)}$ — **функциональное ур-ие для $\zeta(s)$.**

или $\boxed{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)}$

3. $\zeta(s)$ имеет полюс 1^{ого} пор. в $s=1$.

4. $\zeta(s)$ имеет нули в $s = -2, -4, -6, \dots$

Эти нули наз-ся **тривиальными нулями $\zeta(s)$** .

5. Если $\zeta(s_0) = 0 \Rightarrow \zeta(s_0) = 0$.

Нули $\zeta(s)$ наз-ся **нетривиальными**

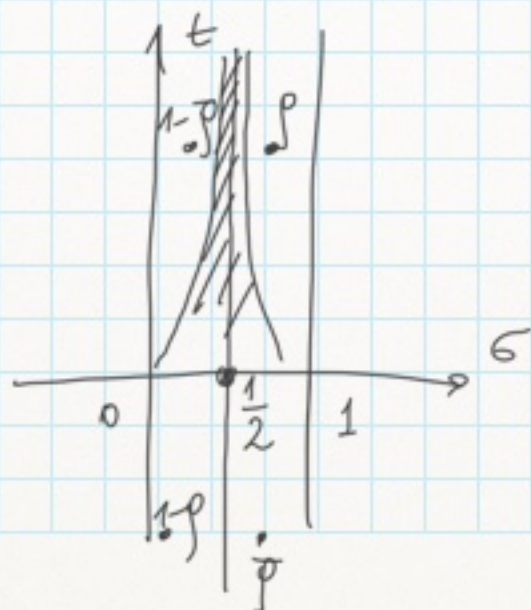
нулями $\zeta(s)$.

6. Нули $\zeta(s)$ лежат в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.

Если ρ - нуль $\zeta(s) \Rightarrow 1-\rho$ - также нуль $\zeta(s)$
из функц.-ого ур-ня.

$\zeta(s) \neq 0 \quad \operatorname{Re} s > 1. \Rightarrow \forall i \text{ } g\text{-но.}$

7. $\overline{\zeta(\bar{s})} = \zeta(s). \Rightarrow$ ρ - нуль $\zeta(s)$, то
т.к. ζ - вещ.-но-анал.-ая $\bar{\rho}$ - нуль $\zeta(s)$,
 $\Rightarrow 1-\rho, 1-\bar{\rho}$ - также нули $\zeta(s)$.



$$s = \sigma + it$$

Гипотеза Римана:

Все нули $\zeta(s)$ лежат на

критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

⑦. $\zeta(s) \neq 0$ при $0 \leq s \leq 1$.

Подсказка: рассмотреть гр-ую

$$(1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

⑧. Из результата прошлой лекции вывести асимптотическую формулу для

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n) = \dots$$

⑨. Доказать, что в области $\operatorname{Re} s > 0$

функция $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$

голоморфная.

