

Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 2.

Теретёнков Александр Евгеньевич

16 февраля 2021 г.

В прошлый раз...

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathbf{a}^T \Gamma \rho \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma_L \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \Gamma_R \mathbf{a} + \rho g_R^T \mathbf{a} + g_L^T \mathbf{a} \rho + \lambda \rho,$$

где $\Gamma, \Gamma_L = \Gamma_L^T, \Gamma_R = \Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2n}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Было упражнение:

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} + \rho \tilde{g}_L^T \mathbf{a} + \tilde{g}_R^T \mathbf{a} \rho + \bar{\lambda} \rho,$$

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} \hat{X} + \hat{X} \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathbf{a} + \tilde{g}_L^T \mathbf{a} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X}.$$

Квадратичный супероператор

Утверждение. Пусть $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*(I) = 0$, тогда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a},$$

где

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad H = H^T = \tilde{H}, \quad f = \tilde{f}.$$

Доказательство.

1) Из $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, с учётом формулы из упражнения, получим

$$\tilde{\Gamma}^T = \Gamma, \quad \tilde{\Gamma}_R = \Gamma_L, \quad \tilde{g}_R = g_L, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

Доказательство.

1) Из $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, с учётом формулы из упражнения, получим

$$\tilde{\Gamma}^T = \Gamma, \quad \tilde{\Gamma}_R = \Gamma_L, \quad \tilde{g}_R = g_L, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

2) Из $\mathcal{L}^*(I) = 0$, с учётом формулы из упражнения (и леммы про симметризацию), получим

$$\frac{\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^T}{2} + \tilde{\Gamma}_L + \tilde{\Gamma}_R = 0, \quad \tilde{g}_L + \tilde{g}_R = 0, \quad \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\Gamma} J = 0.$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Определим $H \equiv i(\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R)$, тогда

$$\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma), \quad \Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Определим $H \equiv i(\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R)$, тогда

$$\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma), \quad \Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Отметим, что если $\tilde{\Gamma}^T = \Gamma$ и $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\Gamma} J$, то $\lambda = -\frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\Gamma} J$ и условие $\lambda = \bar{\lambda}$ выполняется автоматически.

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Определим $H \equiv i(\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R)$, тогда

$$\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma), \quad \Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Отметим, что если $\tilde{\Gamma}^T = \Gamma$ и $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{\Gamma} J$, то $\lambda = -\frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{\Gamma} J$ и условие $\lambda = \bar{\lambda}$ выполняется автоматически.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) = & -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} \rho - \\ & - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma^T J \rho. \end{aligned}$$

С учётом формулы леммы про симметризацию получаем требуемую формулу. □

Квадратичный супероператор

Упражнение. При $\hat{H} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T H \mathbf{a} + h^T \mathbf{a}$ и $\hat{C}_i = \gamma_i^T \mathbf{a} + c_i$
генератор ГКСЛ

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[\hat{H}, \rho] + \sum_j \left(\hat{C}_j \rho \hat{C}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \rho - \frac{1}{2} \rho \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \right)$$

принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a},$$

где

$$\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T, \quad l = \sum_i \bar{c}_i \gamma_i, \quad f = h + i \frac{l - \tilde{l}}{2}.$$

Более того, возможность написать Γ и f в таком виде
эквивалентна условиям

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad \Gamma E \geq 0, \quad f = \tilde{f}.$$

Динамика первых и вторых моментов

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\rho) \equiv -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a}, \rho \}.$$

С учётом упражнения:

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\hat{X}) = i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \hat{X} \right] + \mathbf{a}^T \hat{X} \Gamma^T \mathbf{a} - \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a}, \hat{X} \}.$$

Динамика первых и вторых моментов

Лемма.

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\mathbf{a}) = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a} + iJf,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\mathbf{a} \mathbf{a}^T) = & J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \mathbf{a}^T \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + \\ & + J\Gamma^T J + iJf \mathbf{a}^T - i\mathbf{a} f^T J. \end{aligned}$$

Динамика первых и вторых моментов

Доказательство.

1) Пусть $g \in \mathbb{C}^{2n}$. Вычислим (с учётом другого упражнения)

$$i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, g^T \mathbf{a} \right] = g^T (i J H \mathbf{a} + i J f).$$

В силу ККС имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ([\mathbf{a}^T, g^T \mathbf{a}] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [g^T \mathbf{a}, \mathbf{a}]) = \\ &= -\frac{1}{2} (g^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] g) = \\ &= \frac{1}{2} (g^T J \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T J g) = g^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

В силу произвольности g приходим к первой формуле.

Динамика первых и вторых моментов

2) Пусть $g, h \in \mathbb{C}^{2n}$. По правилу Лейбница для коммутаторов имеем:

$$\begin{aligned} i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, g^T \mathbf{a} \mathbf{a}^T h \right] &= i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, g^T \mathbf{a} \right] \mathbf{a}^T h + \\ &+ i g^T \mathbf{a} \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \mathbf{a}^T h \right] = \\ &= g^T (i J H \mathbf{a} + i J f) \mathbf{a}^T h + g^T \mathbf{a} h^T (i J H \mathbf{a} + i J f) = \\ &= i g^T (J H \mathbf{a} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{a}^T H J + J f \mathbf{a}^T - \mathbf{a} f^T J) h. \end{aligned}$$

Динамика первых и вторых моментов

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ([\mathbf{a}^T, g^T \mathbf{a} \mathbf{a}^T h] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [g^T \mathbf{a} \mathbf{a}^T h, \mathbf{a}]) = \\ &= \frac{1}{2} (g^T \mathbf{a} [\mathbf{a}^T, \mathbf{a}^T h] \Gamma^T \mathbf{a} + [\mathbf{a}^T, g^T \mathbf{a}] \mathbf{a}^T h \Gamma^T \mathbf{a} + \\ &+ \mathbf{a}^T \Gamma^T [g^T \mathbf{a}, \mathbf{a}] \mathbf{a}^T h + \mathbf{a}^T \Gamma^T g^T \mathbf{a} [\mathbf{a}^T h, \mathbf{a}]) = \\ &= g^T \mathbf{a} \frac{1}{2} ([\mathbf{a}^T, h^T \mathbf{a}] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [h^T \mathbf{a}, \mathbf{a}]) + \\ &+ \frac{1}{2} ([\mathbf{a}^T, g^T \mathbf{a}] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [g^T \mathbf{a}, \mathbf{a}]) h^T \mathbf{a} + \\ &+ [\mathbf{a}^T \Gamma^T, g^T \mathbf{a}] [\mathbf{a}^T h, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}^T, g^T \mathbf{a}] [\mathbf{a}^T h, \Gamma^T \mathbf{a}] = \\ &= g^T \mathbf{a} h^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{a} + g^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{a} h^T \mathbf{a} + g^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] \Gamma^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] h = \\ &= g^T \left(\mathbf{a} \mathbf{a}^T \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} J + J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{a} \mathbf{a}^T + J \Gamma^T J \right) h. \end{aligned}$$

В силу произвольности h и g приходим ко второй формуле.



Динамика первых и вторых моментов

Определение. Определим **вектор первых моментов** (вектор средних) m матрицы плотности ρ по формуле

$$m = \text{tr}(\mathbf{a} \rho).$$

Определим **матрицу вторых центральных моментов** D матрицы плотности ρ по формуле

$$D = \text{tr}((\mathbf{a} - m)(\mathbf{a} - m)^T \rho).$$

Замечание. Последнюю формулу также можно переписать в виде

$$D = \text{tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^T \rho) - m m^T.$$

Динамика первых и вторых моментов

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t),$$

тогда

$$\frac{d}{dt}m_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t + iJf_t,$$

$$\frac{d}{dt}D_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) D_t + D_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J\Gamma_t^T J.$$

Динамика первых и вторых моментов

Доказательство: Уравнение Гейзенберга

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}_t = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a}_t + iJf,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)_t &= J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)_t + (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)_t \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + \\ &\quad + J\Gamma^T J + iJf (\mathbf{a}_t)^T - i\mathbf{a}_t f^T J. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} m_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t + iJf_t$$

Динамика первых и вторых моментов

Доказательство: Уравнение Гейзенберга

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}_t = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a}_t + iJf,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)_t &= J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)_t + (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)_t \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + \\ &\quad + J\Gamma^T J + iJf (\mathbf{a}_t)^T - i\mathbf{a}_t f^T J. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} m_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t + iJf_t$$

Динамика первых и вторых моментов

$$\frac{d}{dt}m_t^T = m_t^T \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J - if_t^T J.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t + \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + \\ + J\Gamma^T J + iJf m_t^T - im_t f^T J. \end{aligned}$$

Динамика первых и вторых моментов

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D_t &= \frac{d}{dt}(\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t) - \left(\frac{d}{dt}m_t \right) m_t^T - m_t \left(\frac{d}{dt}m_t^T \right) = \\ &= J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t + \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + \\ &\quad + iJ f_t m_t^T - i m_t f_t^T J + J \Gamma_t^T J - J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t m_t^T - \\ &\quad - iJ f_t m_t^T - m_t m_t^T \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + i m_t f_t^T J = \\ &= J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) (\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t - m_t m_t^T) + \\ &\quad + (\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle_t - m_t m_t^T) \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J \Gamma_t^T J. \quad \square\end{aligned}$$

Динамика первых и вторых моментов

Упражнение.

- 1 $m = \tilde{m}, \quad D^T = \tilde{D}$
- 2 $DE \geq 0$ (принцип неопределённости Шредингера-Робертсона)
- 3 $D - D^T = -J$ (следствие ККС)

Проверьте, что уравнения

$$\frac{d}{dt}m_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t + iJf_t,$$

$$\frac{d}{dt}D_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) D_t + D_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J\Gamma_t^T J$$

сохраняют эти условия.

Динамика первых и вторых моментов

Определение. Назовём матрицей ковариаций C симметричную часть матрицы вторых центральных моментов

$$C = \frac{D + D^T}{2}.$$

Утверждение.

$$\frac{d}{dt}C_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) C_t + C_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} J.$$

Гауссовские состояния

Определение. Состояние ρ называется **гауссовским**, если его характеристическая функция $\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \mathbf{a}})$ представима в виде экспоненты от квадратичных и линейных форм по $\mathbf{z}$.

$$\mathbf{z} \equiv (z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)^T$$

Матрицы плотности могут быть однозначно охарактеризованы посредством характеристических функций.

$$\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T C \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$

$$\chi_N(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2} \mathbf{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2} \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T (C + \frac{1}{2}E) \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$

$$\chi_A(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2} \mathbf{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2} \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T (C - \frac{1}{2}E) \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m}.$$

Гауссовские состояния

Символы операторов

$$\rho_O(\mathbf{z}) \equiv \int d\mathbf{z} e^{-i\mathbf{u}^T \mathbf{z}} \chi_O(\mathbf{u}), \quad O = W, N, A$$

$$\rho_W(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T C^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

$$\rho_N(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE + \frac{1}{2}I)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T (C + \frac{1}{2}E)^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

$$\rho_A(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE - \frac{1}{2}I)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T (C - \frac{1}{2}E)^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

(в случае вырожденных матриц будут возникать дельта-функции.)

Гауссовские состояния

Смешанные состояния:

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + s},$$

$$K = K^T = \tilde{K}, \quad KE < 0, \quad g = \tilde{g}, \quad e^s = \sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|} e^{\frac{1}{2}g^T \frac{1}{K}g}$$

Утверждение.

$$m = -K^{-1}g, \quad D = J \frac{e^{KJ}}{I - e^{KJ}}, \quad C = -\frac{J}{2} \operatorname{cth} \frac{KJ}{2}$$