

Лекция 2.

Кэлеровы структуры на  $F$

Семейств.  $\cap$  структуры ( $d\Omega = 0$ ,  $\Omega$  инвариантная)

Компл. стр.  $J$  на  $F$ :

$g = \Omega \circ J$  — эрмитова метрика  
(т.к.  $g > 0$ )

---

$\forall$  inv. симп. форма  $\Omega$  на  $F$

$\exists$  inv. компл. структура  $J$ :  $\Omega \circ J = \text{метрика}$ .

---

$\mathbb{C}P^{n-1}$ :  $\Omega = a \Omega_{FS}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ )

$J$  и  $-J$  — inv. компл. структуры

Если  $\Omega_{FS} \circ J > 0$ , то при  $a > 0$  выбираем  $J$   
при  $a < 0$  выбираем  $-J$



$$F = GL(n, \mathbb{C}) / \mathbb{P}$$

Отображение момента  
(в симп. координатах)

$$d\Omega = 0$$

$$T \subset \mathcal{O}(M, \Omega)$$

↗ относительная форма

↘  $v$ - векторное поле на  $M$

$\Omega$  inv. озн.  $T$

$$0 = \mathcal{L}_v \Omega = (d \circ i_v + i_v \circ d) \Omega =$$

$$= d \Omega(\cdot, v) = 0$$

$$H^1(M, \mathbb{R}) \simeq 0 \iff \pi_1(M) = 0$$

$$\Omega(\cdot, v) = d\mu$$

↑  
форма

↖ отображение момента  
для  $T\mathcal{O}(M, \Omega)$

Пример.  $M = \text{тор } \mathbb{T}^2$ ,  $\Omega = d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$

$$v = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \Rightarrow \Omega(\cdot, v) = d\varphi_1$$

$$\Rightarrow \mu = \varphi_1$$

Торические кэмпбеллы многообразия

↙ кэмпбеллы моменту

$$K(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$$

$$ds^2 = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$$

$$\begin{cases} g = \Omega \circ J, & g^2 = -1 \\ \eta = -g \circ J \end{cases}$$

$$\sum_{i,j=1}^n \partial z_i \partial \bar{z}_j$$

$$\int \circ dz_k = i dz_k, \quad \int \circ \bar{dz}_k = -i \bar{dz}_k$$

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge \bar{dz}_j$$

↑ симп. структура на комплексной многообразии

Торические м-а  $M$ :  
за них гейсмане есть  $\mathbb{T}^d$ ;  $d = \dim M$

$\mu_1 \dots \mu_d =$  отобр. моменты для  $\mathbb{T}^d$  на  $M$

Всегда можно выбрать комп. коорд.  
 $u_1 \dots u_d$  на  $M$ : такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = \frac{x_k}{2} + i \psi_k \end{array} \right\}, \text{ где } \frac{\partial}{\partial \psi_k} - \text{векторы полей гейсманов } \mathbb{T}^d.$$

гомоморфизм  
(сохраняет комп.  
структуру  $\mathcal{J}$ )

$\Rightarrow$  гейсман  $\mathbb{T}^d$  - изомерия.

Пусть гейсман  $\mathbb{T}^d$  сохраняет кэлеров потенциал  $K$

(Конкретный пример:  $\Omega = d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \sim i du \wedge \bar{du}$ ,

$$\text{где } u = \varphi_1 + i\varphi_2$$

$$K = |u|^2, \text{ метрика } ds^2 = du d\bar{u}$$

$\pi^2: u \rightarrow u + \text{const.}$

$$K = K(\underbrace{u_1 + \bar{u}_1}_{=x_1}, \dots, \underbrace{u_d + \bar{u}_d}_{=x_d})$$

$$\mu_j = \frac{\partial K}{\partial x_j}$$

- сопр. моменты  
( $\mu = \nabla_{\text{cov}} K$ )

$$v = \frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \quad g \cdot v = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Гиперпл.  $\mathcal{H}$

$$ds^2 = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 G}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\mu_i d\mu_j + \left[ \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2} \right)^{-1} \right]^{ij} d\varphi_i d\varphi_j$$

$$\text{т.е. } G = \sum_{i=1}^d \mu_i x_i - K_0$$

//  $\Phi$  - гиперпл.  $\mathcal{H}$  в  $\mathbb{R}^d$

$$\text{vol} \sim \prod_{\kappa} d\mu_{\kappa} \prod_{\kappa} d\varphi_{\kappa}$$

симметричные координаты

$$G(\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_d}_{\uparrow})$$

симметричные моменты  
симметричные  $\mathcal{M}$

Пример.  $\mathcal{M} = \mathbb{C}$

$$ds^2 = \frac{d\mu^2}{4\mu} + \mu d\varphi^2$$

$\mu > 0$

$G = \mu^{-1} T$   
 Yur-c. Buben G gar  $\mu = \mathbb{CP}^{n-1}$   
 $\mathbb{CP}^1$ :   $\mathbb{CP}^2$ :   

$$K = \ln \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} |z_k|^2 \right)$$

Roček-Verlinde  $\approx 1992$

Кэмпбелл  $\Leftrightarrow N = (2,2)$  SUSY

$\downarrow$  T-гравитация по всем гравитационным переменным

$\hat{K}$  = преобразование изометрии  $K$ .  
 = миним. потенциал

$$ds^2 = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\mu_i d\mu_j + \left( \right) d\psi_i d\psi_j +$$

~~$+ A_i d\mu_i d\psi_i$~~  

$$K = K_0(\text{Re}(z_i)) + \sum_i \text{Im}(z_i \overline{z_{i+1}})$$

Кэмпбелл фактор.

миним. фактор в кэмпбелл случае  
 $\cap \quad \varphi$

is exp.  $x, y$

$$\mathbb{CP}^{n-1} = \mathbb{C}^n / U(1)$$

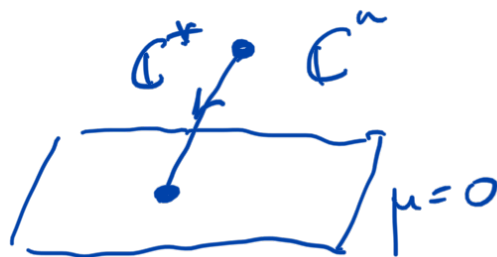
$$\uparrow \\ (z_1, \dots, z_n), \quad \Omega = i \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k$$

$$\mu = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 - \xi, \quad \xi > 0$$

$$\mathbb{C}^n / U(1) = \mu^{-1}(0) / U(1)$$

$$\mathbb{C}^n: K = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \mapsto \mathbb{CP}^{n-1}: \tilde{K} = \ln(1 + \sum_{k=1}^{n-1} |z_k|^2)$$

$$U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^n$$



$$z_k \rightarrow \lambda z_k \\ \uparrow \\ e^{x/2 + i\theta} z_k$$

$$\mu(e^{x/2 + i\theta} z_k) = 0 \rightarrow \text{найти } x$$

$$e^x \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = \xi$$

$$\ln(1 + \sum_{k=1}^n |z_k|^2) =$$

$$K_{red} = -\mu x + K \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \\ = -\mu x + \underbrace{e^x \sum_{k=1}^n |z_k|^2}_{=\xi} \approx \mu \ln \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)$$

Упражнение.

$U(1) \oplus \mathcal{M}$

$$K = K(\underbrace{u + \bar{u}}_{=x}, \{z_i, \bar{z}_i\})$$

$$\Omega = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial \bar{u}} du d\bar{u} + \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial \bar{z}_i} du d\bar{z}_i + \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial \bar{u}} dz_i d\bar{u} + \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j \right)$$

$$\Omega|_{\mu=0}$$

$$\boxed{\mu = \frac{\partial K}{\partial x} = 0}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} x &= x(\{z_i, \bar{z}_i\}) \\ u &= \frac{x}{2} + i\psi \end{aligned}$$

Кэмпбелл потенциалы на  
пространствах фазов.

$$F = \frac{GL(n, \mathbb{C})}{I} / P_{-} \left( \begin{array}{c} \text{diagram} \end{array} \right)$$

$$W := (w_1 \dots w_n)$$

$$W_A = (w_1 \dots w_{d_A})$$

$$L_1 \subset \dots \subset L_{m-1} \subset \mathbb{C}^n$$

$$\dim L_k = d_k$$

$$t_A := \det(W_A^\dagger W_A) \text{ "p-inv."}$$

"квантовое действие" "topology"

$$K_F = \sum_{A=1}^{m-1} \delta_A \log(t_A), \quad \delta_A > 0$$

$$\mathbb{CP}^{n-1}:$$

$$m=2$$

$$W_1^\dagger W_1 = \sum_{k=1}^n |w_1^{(k)}|^2$$

$$w_1^{(k)} \rightarrow \lambda(w) w_1^{(k)}$$

кэмпбелл могоу

- Кэмпбелл фактор  $\gamma$  SUSY.

$$\mathbb{C}^n // U(1)$$

$$N = (2, 2)$$

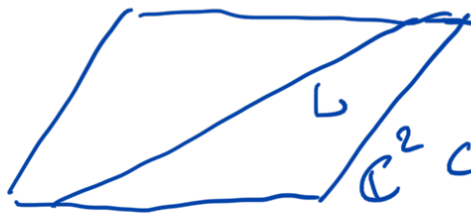
$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \mathcal{K}(\phi_i, \bar{\phi}_i) = \int d^4\theta \sum_{i=1}^n \phi_i \bar{\phi}_i$$

$$z_i + \theta \dots + \dots$$

Вводя комп. сирмон V

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left( \sum_{i=1}^n \phi_i e^V \bar{\phi}_i - \xi \cdot V \right)$$





$$\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3$$

$$\{ \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3 \} \rightarrow U_2 \in \text{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$$

$$\{ \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$U_2^{(1)} U_2^{(2)}$$

$$U_1 \in \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{a U_2^{(1)} + b U_2^{(2)}}_{\text{определяет } \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3}$$

$$L_k \simeq \text{Im} \left( \underbrace{U_{m-1} U_{m-2} \dots U_k}_{\substack{\in \text{Hom}(\mathbb{C}^{\text{dr}}, \mathbb{C}^n) \\ \uparrow \\ \mathbb{C}^n}} \right)$$

Как вывести формулу для кэмпбелла потемпона?

$$g_A \in GL(d_A, \mathbb{C})$$

$$M_A := g_A^\dagger g_A, \quad M_m = 1$$

$$A = 1 \dots m-1$$

$$U_A^\dagger M_{A+1} U_A - M_A U_{A-1} M_{A-1}^{-1} U_{A-1}^\dagger M_A = \xi_A M_A$$

$$K = \sum_{A=1}^{m-1} \xi_A \log \left( \frac{\det M_A}{\det (W_A^\dagger W_A)} \right) - \log(\dots)$$

$$1 \quad 0 \quad r^3$$

Упр-е. Для любых полей  $F$  и  $K$   
 $\text{Borism det}(MA)$  и  $K$ .

---

\* Когомология  $H^2(S, \mathbb{R})$

\* Неабелева группа

\* Квантование ур-в фазов  
(как симп. отображений)

→ Бозоны Швингера-Виттера /  
дисциплина Юзе