

О плотнейшей упаковке шаров в размерности 8

Весна 2021

Лекция 2.

Решётки.

Опр.: Λ — решётка в $\mathbb{R}^n$, если

$$\Lambda = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{Z}}, \text{ где } \{v_1, \dots, v_n\} - \text{базис } \mathbb{R}^n.$$

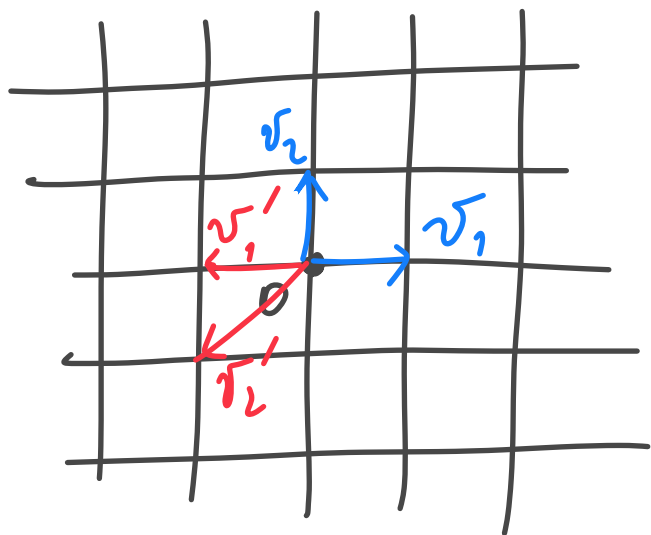
Т.е., если $x \in \Lambda$, то

$$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \text{ где } a_i \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Т.к. $\{v_1, \dots, v_n\}$ — базис, то представление (1)

точки $x \in \Lambda$ единственно.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ - базис решетки не единствен.



$$v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}$$

$$(v_1', \dots, v_n')^t = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Тл.к. $\{v_1', \dots, v_n'\}$ - тоже базис, но

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = A' \cdot A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$A' \cdot A = E$, A и A' - матрицы с целыми коэф-циентами.

Тл.е. $\det A \cdot \det A' = 1$, и поскольку $\det A, \det A' \in \mathbb{Z}$,

то $\det A = \pm 1$.

Обратно: если $\{v_1, \dots, v_n\}$ — базис Λ и A — целочисленная матрица: $\det A = \pm 1$, то

$\{v_1', \dots, v_n'\}$ — базис Λ , где

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ т.к. } \exists A^{-1} \text{ — целочисленная}$$

$$\text{и } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}.$$

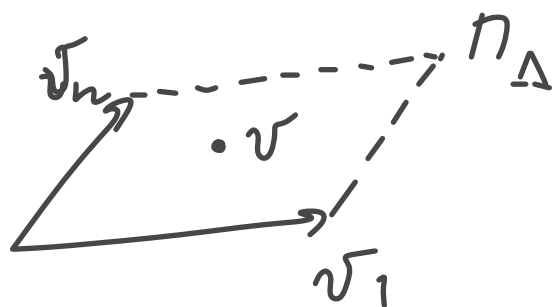
П.о. $|\Lambda| = |\det(v_1, \dots, v_n)|$ — не зависит от базиса.

$|\Lambda|$ — объём параллелепипеда Π_Λ , образованного базисными векторами:

$$\Pi_\Lambda := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad 0 \leq a_i \leq 1 \right\}.$$

Заметим, что внутри Π_{Δ} нет точек Δ .

Укаже:



если $v \in \Delta$, то $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, a_i \in \mathbb{Z}$

если некуда внутри Π_{Δ} , то

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad 0 < x_i < 1.$$

Т.о. $\sum_{i=1}^n (a_i - x_i) v_i = 0$ — против. — и с тем,
что $\{v_i\}_{i=1}^n$ — базис, т.к. $\exists i: a_i - x_i \neq 0$

Погрешности.

пусть $w_1, \dots, w_n \in \Lambda$ — точки решетки Λ .

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad \{v_1, \dots, v_n\} - \text{базис } \Lambda.$$

Тогда

$$I = |\det(a_{ij})| = \frac{|\det(v_1, \dots, v_n)|}{|\det(v_1, \dots, v_n)|} =$$
$$= \frac{|\det(w_1, \dots, w_n)|}{|\Lambda|} \quad \text{возв. - с.}$$

индексом нс-мк точек $w_1, \dots, w_n$ в решетке Λ .

Видно, что

- 1) $I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- 2) I не зависит от базиса
- 3) $I = 0 \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n)$ — лнз-но зав.-мк

Если решетка $\Delta' \subseteq \Delta$, то Δ' наз-ся
 подрешеткой решетки Δ .

$I := I(\Delta', \Delta) = \frac{|\Delta'|}{|\Delta|}$ - индекс подрешетки Δ'
 решетки Δ (или число
 классов смеж-
 ности Δ
 относительно Δ')

Имеем

$$I \cdot \Delta \subseteq \Delta' \subseteq \Delta.$$

- Д/з.

Докажем, что $I(\underline{\Delta}', \underline{\Delta})$ — есть число массов
симметрии $[\underline{\Delta} : \underline{\Delta}']$.

1. Если задан базис $\underline{\Delta} \quad \{v_1, \dots, v_n\}$, то
можно выбрать базис $\underline{\Delta}' \quad \{v'_1, \dots, v'_n\}$:

$$\begin{cases} v'_1 = a_{11} v_1 \\ v'_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 \\ \dots \\ v'_n = a_{n1} v_1 + \dots + a_{nn} v_n, \end{cases} \quad (2)$$

причем $a_{ii} > 0$, $0 \leq a_{ij} < a_{ii}$.

Обратно: $\forall$ базиса $\underline{\Delta}'$ найдётся базис $\underline{\Delta}$:
верно (2), при этом $a_{ii} > 0$, $0 \leq a_{ij} < a_{ii}$.

D-ли это упрв.-ие.

$$\forall i \exists v_i' \in \Lambda' : v_i' = a_{i1}v_1 + \dots + a_{ii}v_i, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{Z}, a_{ii} \neq 0, \text{ т.к. } \underline{1}v_i \in \Lambda'.$$

Пусть $v_i' \in \Lambda'$ — такая точка, что $|a_{ii}|$ — минимальное $\neq 0$.

Тогда $\{v_1', \dots, v_n'\}$ — базис Λ' .

D-но, пусть $x \in V'$, $x = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$, $1 \leq k \leq n$, $x_i \in \mathbb{Z}$ и $x_k \neq 0$, и точка $x \in V'$ такая, что для неё k — наименьшее ($1 \leq k \leq n$) и она не лежит в $\langle v_1', \dots, v_{k-1}' \rangle_{\mathbb{Z}}$.

С одной стороны $\exists d \in \mathbb{Z} : |x_k - da_{kk}| < |a_{kk}|$

При этом $x - dv_k' \in \Lambda'$.

Но $x_k - da_{kk} \neq 0$ по условию гл. 1, и при этом $|x_k - da_{kk}|$ не м.б. $< |a_{kk}|$ по выбору v_k' . Против.

Обратно: если $\{v_1', \dots, v_n'\}$ — базис Λ' , то $I\Lambda \subseteq \Lambda'$, поэтому из предположения унв.-ия следует, что $\exists \{Iv_1, \dots, Iv_n\} \vdash \text{базис } I\Lambda$:

$$\begin{cases} Iv_1 = a_{11} v_1', \\ \dots \\ Iv_n = a_{n1} v_1' + \dots + a_{nn} v_n' \end{cases}, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad a_{ii} \neq 0.$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} v_1' = a_{11}' v_1 \\ \dots \\ v_n' = a_{n1}' v_1 + \dots + a_{nn}' v_n \end{cases}, \quad \text{где } a_{ij}' \in \mathbb{Q}$$

По м.к. $v_i' \in \Lambda$, то $\exists$ целочисленная мн.-ая комб.-ия $\{v_1, \dots, v_n\}$, задающая v_i' .
 П.к. $\{v_1, \dots, v_n\}$ — базис $\Rightarrow a_{ij}' \in \mathbb{Z}$.

По, что a_{ii} можно положить $a_{ii} > 0$ — понятно.
 (иногда берём $-\sigma_i'$ или $-\sigma_i$)

Значит σ_i' можно брать

$$\tilde{\sigma}_i' = \sigma_i' + \alpha_{i1} \sigma_1' + \dots + \alpha_{i,i-1} \sigma_{i-1}', \text{ где } \alpha_{ij} \in \mathbb{Z} - \text{любые.}$$

Тогда $\{\tilde{\sigma}_i'\}_{i=1}^n$ — новые базис.

$$\tilde{\sigma}_i' = a_{i1}' \sigma_1 + \dots + a_{ii}' \sigma_i, \text{ где}$$

$$a_{ii}' = a_{ii}, \quad a_{ij}' = a_{ij} + a_{jj} \alpha_{ij} + a_{j+1,j} \alpha_{j+1,i} + \dots + a_{i-1,j} \alpha_{i-1,i-1} \\ (j < i).$$

$\forall i$ можно по-новому выбрать $\alpha_{i,i-1}, \alpha_{i,i-2}, \dots$:

$$0 \leq a_{ij}' < a_{ii} = a_{ii}'.$$

Обратно — аналогично.

②. Видно, что

$$I(\Lambda', \Lambda) = \prod_{i=1}^n |a_{ii}|$$

Если есть $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in \Lambda$, то
относ. к Λ' она принадлежит классу

$$y_1 v_1 + \dots + y_n v_n, \quad 0 \leq y_i < a_{ii}$$

Т.е. их число совпадает с $I(\Lambda', \Lambda)$.

Двойственная решетка.

$$x, y \in \mathbb{R}^n \quad (x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Если $\{v_1, \dots, v_n\}$ — базис $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, то обозначив

$$A := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = E, \text{ т.е.}$$

$$\exists v_1^*, \dots, v_n^* : (v_i, v_j^*) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} = (A^{-1})^t$$

Опр.: $\Lambda^* = \langle v_1^*, \dots, v_n^* \rangle_{\mathbb{Z}}$ — двойственная
к Λ решетка.

Замечание:

- 1) $(\Lambda^*)^* = \Lambda$
- 2) $|\Lambda^*| = \frac{1}{|\Lambda|}$

Д-ли, что Λ^* не зависит от выбора
базиса Λ .

Утв.: $v^* \in \Lambda^* \Leftrightarrow (v, v^*) \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda$.

Д-во:

$$\Rightarrow v^* = \sum_{i=1}^n a_i^* v_i^*, \quad v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \Rightarrow (v, v^*) = \sum_{i=1}^n a_i a_i^* \in \mathbb{Z}$$

Обратно: пусть $x \in \mathbb{R}^n$: $(x, v) \in \mathbb{Z} \forall v \in \underline{\Lambda}$,
то $(x, v_i) = a_i \in \mathbb{Z}$, где $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{Z}} = \underline{\Lambda}$.

Возьмем $v^* = \sum_{i=1}^n a_i v_i^*$. Тогда

$$((x - v^*), v_i) = 0, \quad \text{m.e.}$$

$$((x - v^*), (d_1 v_1 + \dots + d_n v_n)) = 0 \quad \forall d_i \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow x = v^* \quad \text{m.e.} \quad x \in \underline{\Lambda}^*.$$

Опр.: Δ наз. **целой**, если
 $(u \cdot v) \in \mathbb{Z} \quad \forall u, v \in \Delta$.

Опр.: Δ наз. **четной**, если $|u|^2 \in 2\mathbb{Z}$
 $\forall u \in \Delta$.

Опр.: если $\Delta = \Delta^*$, то Δ наз. -ся
самодвойственной.

Опр.: Δ наз. -ся **унимодулярной**, если
 $\text{vol } \Delta = 1$.

Свойства:

1. Если $\underline{\Delta}$ - ритмная, то $\underline{\Delta}$ - целая :

$$(\underline{u} \cdot \underline{v}) = \frac{1}{2} (|\underline{u+v}|^2 - |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2) .$$

2. Если $\underline{\Delta}$ - целая, то $\underline{\Delta} \subseteq \underline{\Delta}^*$.

3. $\underline{\Delta}$ - самодвойственная $\Leftrightarrow$

она целая и унитарная:

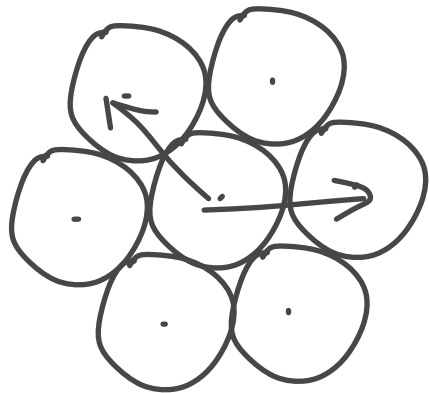
$$\Rightarrow \underline{\Delta}^* = \underline{\Delta} : \quad |\underline{\Delta}| \cdot |\underline{\Delta}^*| = 1 \Rightarrow \underline{\Delta} = 1.$$

$$\Leftarrow \quad |\underline{\Delta}| = \quad \overset{\text{и она целая.}}{|\underline{\Delta}^*| = 1}, \quad \underline{\Delta} \subseteq \underline{\Delta}^*, \quad [\underline{\Delta} : \underline{\Delta}^*] = \frac{|\underline{\Delta}^*|}{|\underline{\Delta}|} = 1.$$

Примеры:

1. $\mathbb{Z}^n$ - целая, самодвойственная, унимодулярная

2. Плотнейшая в $\mathbb{R}^2$ упаковка



$$A_2 = \left\{ \left\langle (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle_{\mathbb{Z}} \right\}$$

Рассм. экв-ую упаковку.

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}}_{f_2} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

$$|f_1|^2 = |f_2|^2 = 2$$

$$(f_1 \cdot f_2) = -1$$

$\Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ - четная

$$\left(\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{Z}} \right)^* = \langle f_1^*, f_2^* \rangle_{\mathbb{Z}}, \text{ где } (f_i, f_j)^* = \delta_{ij}.$$

Примеры решеток в $\mathbb{R}^n$.

$$A_n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}$$

Это n -мерная решетка.

Базис: $\left\{ \underset{\substack{\parallel \\ f_1}}{e_1 - e_2}, e_2 - e_3, \dots, e_n - \underset{\substack{\parallel \\ f_n}}{e_{n+1}} \right\}$. Д-но,

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_{n+1})}_{\substack{\uparrow \\ A_n}} = x_1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{умножим } x_1}}{f_1} + (x_2 + x_1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{умножим } x_2}}{f_2} + \dots + (x_1 + \dots + x_n) f_n,$$

а $(x_1 + \dots + x_n) e_{n+1} = 0$ по определению A_n .

$$d(A_n) = \min \{ |v|^2 \neq 0, v \in A_n \} = 2$$

$$R_2(A_n) = \{ v \in A_n : |v|^2 = 2 \} = \{ \pm (e_i - e_j) \}_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n+1}$$

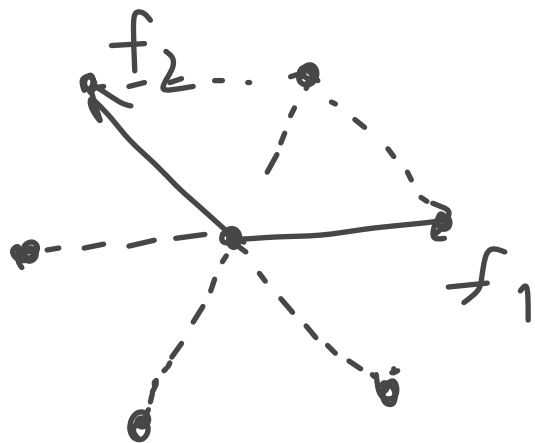
$$|R_2(A_n)| = 2 \cdot C_{n+1}^2 = n(n+1)$$

$$|R_2(A_2)| = 6, \quad |R_2(A_3)| = 12, \quad |R_2(A_4)| = 20.$$

$$A_1: \{ (x, -x), x \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} \cdot f, \quad f = (-1, 1)$$

$$A_2: (f_1, f_2) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3) = -1$$

$$\text{Ил.к.} \quad |f_i|^2 = 2, \text{ но } \angle(f_1, f_2) = 120^\circ.$$



Т.о. A_2 — ортогональная в $\mathbb{R}^2$.

A_n — решетчатая решетка.

$$D_n = \{ x \in \mathbb{Z}^n : \sum x_i \equiv 0 (2) \} \subset \mathbb{Z}^n$$

↘ **максимальная решетка.**

Базис: $\{ \overset{\parallel f_1}{\underset{\downarrow}{e_1 - e_2}}, \dots, \overset{\parallel f_{n-1}}{\underset{\downarrow}{e_{n-1} - e_n}}, \overset{\parallel f_n}{\underset{\downarrow}{e_{n-1} + e_n}} \}$. D -но,

умножим x_1 умножим x_{n-1} и x_n

$$x - x_1 f_1 - (x_1 + x_2) f_2 - \dots - (x_1 + \dots + x_{n-2}) f_{n-2} =$$

$$= (x_1 + \dots + x_{n-1}) e_{n-1} + x_n e_n \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_{n-1} \equiv x_n \equiv 0 (2) \\ x_1 + \dots + x_{n-1} \equiv x_n \equiv 1 (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 + \dots + x_{n-1}) e_{n-1} + x_n e_n = \left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{2} \right) (f_{n-1} + f_n) + \frac{x_n}{2} (f_n - f_{n-1}) \\ \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + 1}{2} (f_{n-1} + f_n) + \left(\frac{x_n + 1}{2} \right) (f_n - f_{n-1}) - f_n. \end{cases}$$

$$R_2(D_n) = \left\{ \pm (e_i \pm e_j) \right\}_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n$$

$$|R_2(D_n)| = 2 \cdot 2 \cdot C_n^2 = 2n(n-1).$$

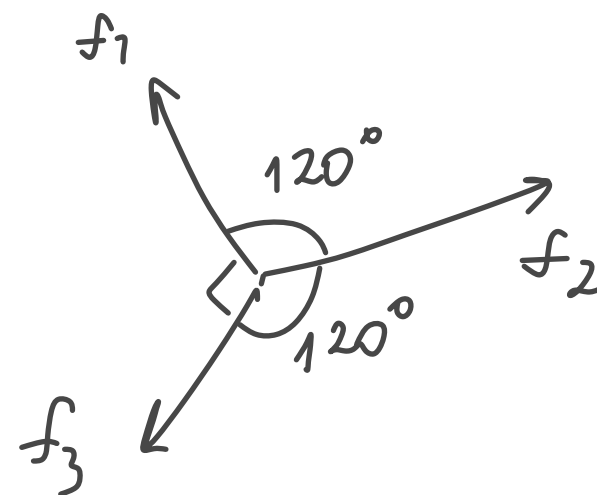
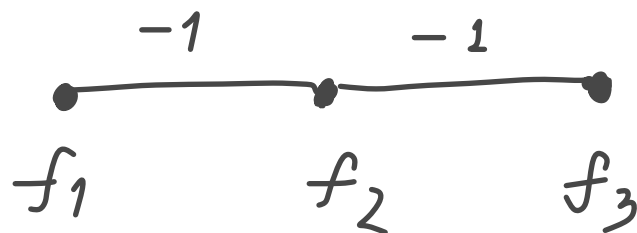
Замеримые: $|R_2(D_2)| = 4$, $|R_2(D_3)| = 12$, $|R_2(D_4)| = 24$.

D_n — цепная решетка.

Заметим, что $A_3 \cong D_3$.

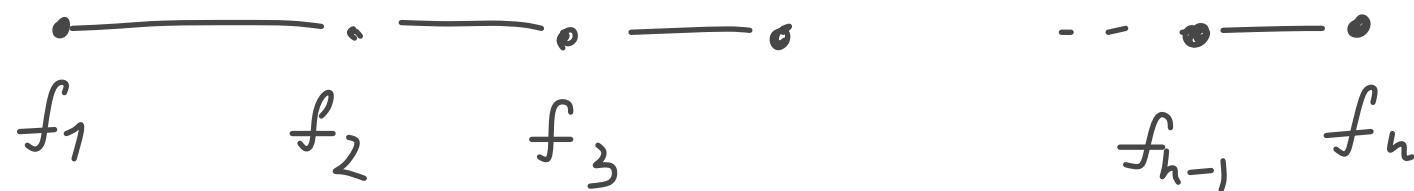
у обеих решеток $|f_i|^2 = 2$ ($\{f_i\}_{\mathbb{Z}}$ — базис),

и

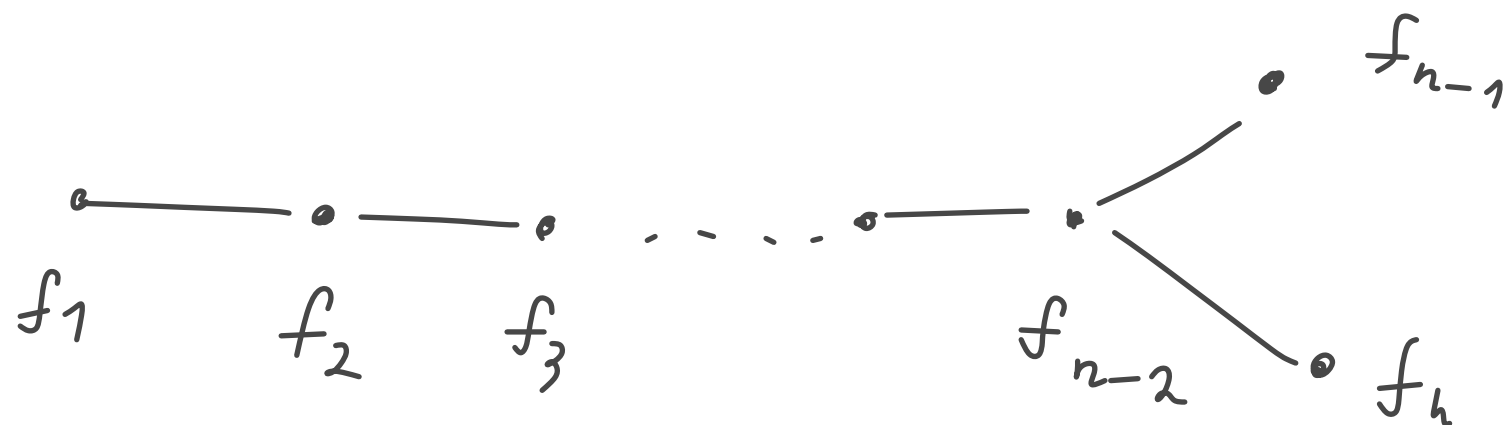


В общем случае графы Хокстера —
 Дункина для

A_n



D_n



E_8 - решётка Коркина - Золотарёва

Построена в 1873 г. А.Н. Коркиным и
Е. И. Золотарёвым.

В $\mathbb{R}^8$ $\left| \frac{e_1 + \dots + e_8}{2} \right|^2 = 2$. Т.о. упаковку D_8
с шариками $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ можно продублировать,
сдвинув на вектор $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$,
получив вдвое более плотную упаковку!

$$E_8 = \langle D_8, \frac{l_1 + \dots + l_8}{2} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Базис E_8 : $\{ \overset{f_1}{\parallel} l_1 - l_2, \overset{f_2}{\parallel} l_2 - l_3, \dots, l_6 - l_7, \overset{f_7}{\parallel} \frac{l_1 + \dots + l_8}{2}, \overset{f_8}{\parallel} 2l_8 \}$

т.е. E_8 — решетка в $\mathbb{R}^8$.

Д/з: у-ть, что $\{f_1, \dots, f_8\}$ — базис E_8 .

E_8 — решетчатая решетка.

$$R_2(E_8) = \left\{ \pm e_i \pm e_j \right\}_{i \neq j} \cup \left\{ \frac{\pm e_1 \pm \dots \pm e_8}{2} \right\}_{\text{с чётным числом "-"}}.$$

$$|R_2(E_8)| = \underbrace{4 \cdot C_8^2}_{112} + \underbrace{2^7}_{128} = 240.$$

Типы корней

$$R_2(A_8) = 72, \quad R_2(D_8) = 112.$$

$n=4$

D_4 - плотнейшая среди прямоугольных упаковок (1872г., Кюркиш - Золотарёв)

$n=5$

D_5 - плотнейшая среди Δ (1877г., Кюркиш - Золотарёв).

$n=6, 7, 8$

E_6, E_7, E_8 - плотнейшие, среди Δ (1935, Т. Фуксфельдт),

где $E_7 = \{x \in E_8 : (x, \frac{e_1 + \dots + e_8}{2}) = 0\},$

$E_6 = \{x \in E_8 : x \perp \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{R}}\},$ где $\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{Z}} \cong A_2.$

Теорема: (2016 г., М. Вязовская):

E_8 — плотнейшая упаковка в $\mathbb{R}^8$.

Теорема (2016 г., M.V., H. Cohn, A. Kumar, S.D. Miller,
D. Radchenko,

L_{24} — плотнейшая упаковка в $\mathbb{R}^{24}$

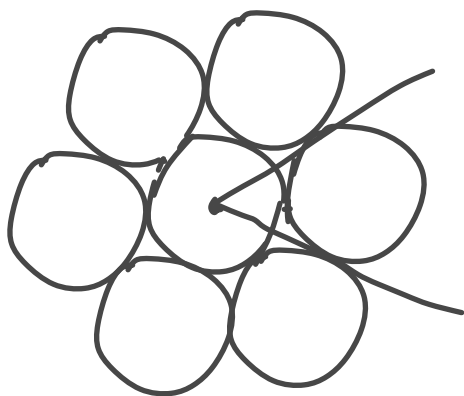
L_{24} — решетка Лича (построена в 1965 г.).

Контактное число.

Сколько шаров в $\mathbb{R}^n$ могут касаться
данного шара (все шары — одинаковые).

$$n=2$$

$$k_2 = 6.$$



$$n=3$$

$$k_3 = 12. \quad (1953, \text{Монтгю и Ван-дер-Варден}).$$

16942. — спор $k_3 \leq 14$.
У. Ньютона и Д. Тейлора

$$n = 4$$

$$k_4 = 24 \text{ (2003 г., О. Мусин).}$$

1979 г. (В. И. Лебенштейн,

А. Огузьянко - N. Sloane)

$$k_8 = 240$$

,

$$k_{24} = 196560$$

Д/З:

1. Если $I = I(\Lambda', \Lambda)$, то $I\Lambda \subset \Lambda'$.

2. Найти базис E_8 и g -мб, что это решетка.

3. а) $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Leftrightarrow \Lambda_2^* \subset \Lambda_1^*$

б) $\Lambda_2 / \Lambda_1 \cong \Lambda_1^* / \Lambda_2^*$.

4. Сколько у Λ подрешеток
индекса p, p^2 ?

$$5. \quad \Gamma_n := D_n \cup \left(D_n + \frac{(l_1 + \dots + l_n)}{2} \right).$$

a) D-ть, что Γ_n - решетка $\Leftrightarrow n \equiv 0(2)$

б) Γ_n - целая $\Leftrightarrow n \equiv 0(4)$

в) Γ_n - целая $\Leftrightarrow n \equiv 0(8)$.

$$6. \quad \Lambda - \text{целая} \Leftrightarrow \Lambda \subseteq \Lambda^*$$

$$7. \quad \text{Найти } |A_n|, |D_n|, |\Gamma_n|.$$

8. Найти ρ_{E_8} и $\rho_{E_8}^c$ - плотность и центральную плотность, соответствующей решетке E_8 .