

Научно-образовательный центр при МИАН, весна 2021

Г.Б. Шабат,
КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ
В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Лекция 2 (15 февраля 2021)

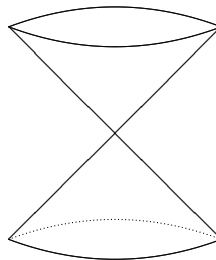
Классификация алгебраических многообразий

2.0. Краткая история	1
...2.0.0. Коники в Древней Греции	1
...2.0.1. Ньютон и плоские кубики	3
...2.0.2. Риман и $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$	4
...2.0.3. Поверхности в 19 веке	5
...2.0.4. Севери и плоские алгебраические кривые	5
...2.0.5. Тайхмюллер и $\mathcal{T}_g$	6
...2.0.6. Делинь-Мамфорд и $\overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{k})$	7
...2.0.7. Гизекер и " $\mathcal{M}_{c_1^2, c_2}$ "	7
...2.0.8. Абелевы многообразия (Риман-Пуанкаре-...)	7
2.1. Что классифицируем?	8
...2.1.0. (Квази)проективные многообразия	8
...2.1.1. Схемы	9
...2.1.2. Функторы точек	9
Задачи	10
Литература	11

2.0. Краткая история

2.0.0. Коники в Древней Греции. Вероятно, первая явно поставленная и решённая задача в алгебраической геометрии – классификация *сечений конуса*; в наши дни они называются *кониками*. Слова *эллипс*, *парабола*, *гипербола* имеют греческое происхождение, а само изучение коник восходит к ученику Платона *Менехму* (4й век до н. э.), который использовал при попытках *удвоения куба* (рекомендуется решить задачу 2.1); см. [Варден1959].

Древнегреческие математики не мыслили в терминах уравнений и, скажем, *конус* определялся в терминах вращающейся прямой.

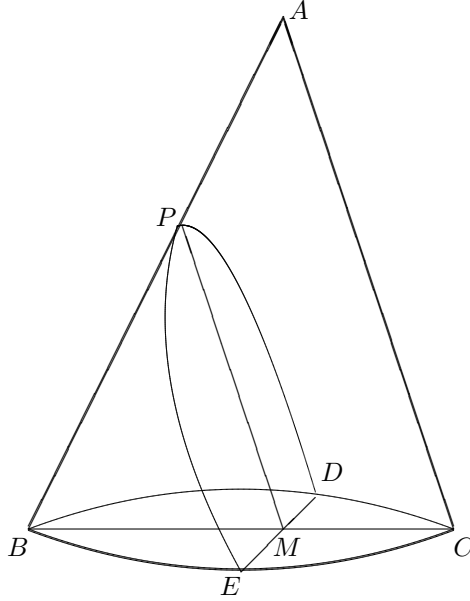


Алгебраическая *геометрия*, видимо, началась с вопроса: *как выглядят коники?*

Если даже ограничиться лишь одним великим геометром того времени, Аполлонием Пергским (ок. 262 до н.э. – ок. 190 до н.э.) и упомянуть лишь ту часть

древнегреческой теории коник, которая была зафиксирована в 8 книгах¹ его "Коник" (см. [Heath1896]), мы обнаруживаем полноценную теорию алгебро-геометрических объектов, в которой имеется большое количество нетривиальных определений и сотни теорем.

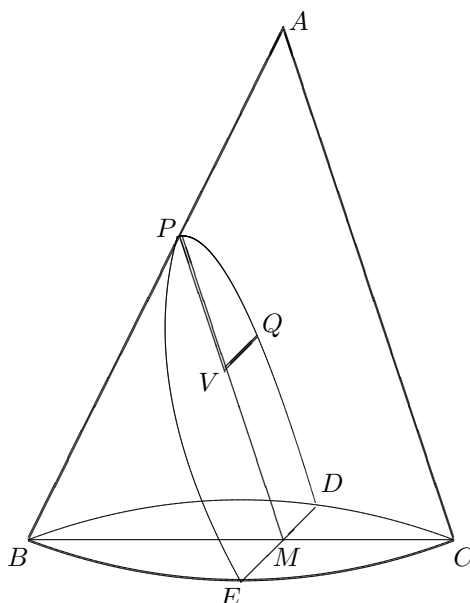
Аполлоний ввёл термины *абсцисса* и *ордината* для некоторых расстояний, определив таким образом некоторую версию координат более чем за тысячу лет до Декарта. Так, рассмотрев конус вместе с параболическим сечением



и взяв *переменную* точку V на отрезке PM , а затем построив в плоскости сечения отрезок VQ , ортогональный отрезку PM (пусть точка Q лежит на конусе), Аполлоний доказал, что

$$|QV|^2 = \frac{|AP||BC|^2}{|AB||AC|}|PV|.$$

¹только 7 из них сохранились, причём 4 только в арабском переводе



– а это по существу уравнение параболы!

Идея рассматривать кривые, определяемые как пересечение фиксированной поверхности с переменной плоскостью, вполне современна. Одна из первых теорем алгебраической геометрии утверждает, что в случае конуса класс таких кривых совпадает с классом кривых, которые на плоскости задаются уравнением степени 2 – такие кривые тоже называются *кониками*. Аполлоний дал подробные доказательства многочисленных свойств коник, рассматривая по отдельности три их типа; это стимулировало его коллег (Декарта, Ферма, Дезарга и других) тысячу лет спустя начать развивать основания алгебраической геометрии так, чтобы все три типа рассматривались одновременно.

2.0.1. Ньютон и плоские кубики. То, что мы обсудили в связи с кониками, с точки зрения нашего курса представляет лишь исторический интерес: все коники над алгебраически замкнутыми полями *бirationально изоморфны*.

Настоящие задачи классификации плоских кривых начинаются с кривых степени 3 – такие кривые называются *кубиками*. Первый шаг в классификации кубик сделан в работе [Newton1704], и можно считать, что именно с неё началась современная алгебраическая геометрия.

Ньютон начал свою работу со слов *The chief Properties of the Conic Sections are everywhere treated of by Geometers...* – видимо, имея в виду общеизвестность теории Конических Сечений и справедливо подчёркивая тот факт, что, повышая степень кривой, он вторгается в неизведанную область.

Особое внимание Ньютона привлекают свойства кубик, отсутствующие у коник – например, наличие *перегибов*; см. задачу 2.4.

Загадочным представляется прекрасное изображение Ньютоном вещественных кубик – за столетия до появления легко доступных нам средств! Цитата из

[Newton1704]: *If, of the equation $ax^3 + bxx + cx + d$ all the Roots... are real and unequal, then the Figure is a diverging Parabola of the form of a Bell, with an oval...*

Ньютон ввёл 72 типа плоских кубик (поздние критики утверждали, что ещё 6 типов он пропустил). Старые постановки классификационных задач были не очень точны: видный немецкий геометр Плюккер в работе [Plücker1835] нашёл 219 типов.

Объяснение этих расхождений таково. Традиционная алгебраическая геометрия всегда изучала множества, задаваемые системами полиномиальных уравнений, но в разные эпохи были популярны разные кольца и поля, из которых брались коэффициенты полиномов и в которых решались системы уравнений. Иногда такие выборы представлялись очевидными; во времена Ньютона изучались *плоские вещественные кривые*, т.е. множества вещественных решений одного полиномиального уравнения с двумя неизвестными. Отношение изоморфности таких кривых, особенно в *аффинной* плоскости, можно определять несколькими существенно разными способами.

Начиная примерно с середины 19-го века общепринятым стала классификация кривых в *проективной* плоскости над полем *комплексных* чисел, и классификация сильно упростилась. При современном подходе есть всего один основной тип (*гладких*) кубик, но кривые этого типа зависят от одного непрерывного параметра (*модуля*); мы постараемся достаточно подробно осветить этот вопрос в дальнейших лекциях.

Свои 72 типа Ньютон разделил на 4 класса, лишь один из которых,

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

содержит все гладкие кубики (которые и представляют основной интерес, поскольку все негладкие кубики *рациональны*, то есть бирационально изоморфны коникам и прямой). Это уравнение исторически не совсем точно называют уравнением кубической кривой *в форме Вейерштрасса*; мы его обсудим в последующих лекциях.

2.0.2. Риман и $M_g(\mathbb{C})$. Работа [Riemann1857] на десятилетия опередила математику того времени. В ней были определены *римановы поверхности*, *род* абстрактной топологической ориентируемой поверхности, *пространства Римана-Роха* и, наконец, (несколько неформально) центральное для нашего курса понятие *пространство модулей кривых заданного рода $M_g(\mathbb{C})^2$* , представляющее собой *множество классов бирациональной изоморфности кривых рода g* . Оставалась задача наделить множества $M_g(\mathbb{C})$ и, в частности, придать точный смысл утверждению Римана о том, что *кривые рода g при $g \geq 2$ зависят от $3g - 3$ параметров*. Полное решение этой задачи потребовало около века (см. ниже); оказалось, что $M_g(\mathbb{C})$ — *неприводимое квазипроективное*

²здесь и далее мы пользуемся современной терминологией и современными обозначениями

многообразие, и

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g(\mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & \text{при } g = 0; \\ 1 & \text{при } g = 1; \\ 3g - 3 & \text{при } g > 1. \end{cases}$$

2.0.3. Поверхности в 19 веке. Помимо прорывов в теории алгебраических кривых, 19-й век ознаменовался рождением многомерной алгебраической геометрии; она, естественно, началась с изучения *поверхностей* в трёхмерном пространстве. Как и в случае плоских кривых, оказалось, что степень 2 не доставляет серьёзных проблем (пространственные квадратики изоморфны произведению двух прямых), а нетривиальная геометрия начинается с *пространственных кубик*. Первый вопрос, который исследовался в связи с этими поверхностями – это вопрос о лежащих на них прямых. Оказалось [Cayley1869], что на общей поверхности их 27. Конфигурации этих прямых, их симметрии и тонкие геометрические свойства продолжают привлекать математиков до настоящего времени, см., например, [Groesbeek2020].

Классификационные результаты в теории алгебраических поверхностей тоже были получены уже в 19-м веке. Например, кубические поверхности оказались принадлежащими к классу *поверхностей Дель Пецо*, то есть поверхностей с *обильным антиканоническим классом* (мы поговорим о них в дальнейших лекциях), которые были полностью расклассифицированы.

Оказалось, что все они *рациональны* и получаются последовательным проектированием из проективного пространства $\mathbf{P}_9(\mathbb{k})$ образа плоскости $\mathbf{P}_2(\mathbb{k})$ при *вложении Веронезе*

$$(F_0 : F_1 : \dots : F_9) : \mathbf{P}_2(\mathbb{k}) \hookrightarrow \mathbf{P}_9(\mathbb{k}),$$

где $\langle F_0, F_1, \dots, F_9 \rangle = \mathbb{k}[x : y : z]_3$, то есть пространство кубических форм от x, y, z порождено многочленами $F_0, F_1, \dots, F_9$.

В дальнейшем классы *необычных поверхностей*, то есть двумерных аналогов плоских коник и кубик (вскоре они будут инвариантно определены как кривые *рода* ≤ 1), были расклассифицированы (в основном) итальянской школой алгебраической геометрии. Эта классификация была детализирована в 20-м веке в Москве на семинаре И.Р. Шафаревича (см. [АлгПов1965]) и в Гарварде на семинаре О. Зариского (см. [Zar1971]).

О поверхностях *общего типа* мы поговорим вскоре.

2.0.4. Севери и плоские алгебраические кривые. Классик итальянской алгебраической геометрии Ф. Севери изучал (среди многого другого) *множество* $\Sigma_{d,\delta}$ плоских кривых степени d с δ простейшими особенностями. Это множество естественно наделяется структурой квазироективного многообразия. Севери утверждал, что оно неприводимо (см. [Severi1921]), но, по-видимому, это на сегодняшний день доказано лишь для некоторых пар (d, δ) .

Из тех результатов, которые в [Severi1921] были установлены, Севери вывел *унирациональность* пространств модулей кривых $\mathcal{M}_g$ при $g \leq 10$ и предположил, что это свойство пространств $\mathcal{M}_g$ имеет место при всех g . Об опровержении этого предположения мы поговорим ниже.

2.0.5. Тайхмюллер и $\mathcal{T}_g$. Как уже говорилось, построение пространств модулей Риманом носило эвристический характер; имея по существу алгебро-геометрическую природу, оно было облечено в аналитические одежды.

Первая конструкция, которая привела к строгому определению пространств модулей, также пришла из анализа, но десятилетия спустя и при рассмотрении других задач. Если Римана интересовали прежде всего абелевы интегралы, униформизация, тета-функции и т.п., то есть чисто *голоморфные* объекты, то Тайхмюллер занимался вопросами, находящимися на границе между комплексным и вещественным анализом – *квазиконформными* отображениями римановых поверхностей.

Пространства модулей $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ существуют, поскольку две гладкие компактные поверхности $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ рода g , вообще говоря, конформно не эквивалентны при $g > 0$; естественно возникает задача построения отображения $\mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y}$ подходящего класса, минимально искажающего углы.

Оказалось [Teichmüller1939], что поставленная задача имеет единственное решение, причём очень красивое, если ограничиться гомеоморфизмами поверхностей $\mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y}$ (*произвольно*) *фиксированного гомотопического класса*. Это экстремальное отображение оказывается гладким лишь вне конечного множества точек.

Сформулированный результат позволяет для любого $g > 0$ ввести *пространство Тайхмюллера*³

$$\mathcal{T}_g := \frac{\{(\mathbf{X}, \iota) \mid \mathbf{X} \text{ — поверхность рода } g, \iota : \pi_1(\mathbf{X}) \xrightarrow{\sim} \Pi_g\}}{\approx};$$

здесь Π_g – фундаментальная группа фиксированной абстрактной поверхности рода $g > 0$; можно обойтись без фиксации отмеченных точек, потому что изоморфизм ι определён лишь с точностью до внутренних автоморфизмов. Определение изоморфизма $\approx$ очевидно, детали см. в последующих лекциях.

После работ Тайхмюллера можно было определить комплексное пространство модулей как

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) := \frac{\mathcal{T}_g}{\text{Out}(\Pi_g)},$$

где $\text{Out}(\Pi_g)$ – группа *внешних автоморфизмов* фундаментальной группы.

Таким образом на пространствах Тайхмюллера определяется лишь *вещественная* структура. Из результатов Тайхмюллера легко следует, что при $g > 1$ каждое $\mathcal{T}_g$ гомеоморфно шару вещественной размерности $6g - 6$. Детали и случай $g = 1$ будут разобраны в последующих лекциях.

Оригинальные тексты Тайхмюллера труднодоступны, а доказательства, как утверждают специалисты, содержат существенные пробелы. Полное доказательство

³Тайхмюллер был фашистом и участвовал в некоторых университетских антисемитских кампаниях, в частности, против Э. Ландау. Он погиб под Сталинградом в 1943.

было опубликовано в [Ahlfors1954].

2.0.6. Делинь-Мамфорд и $\overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{k})$. Полное алгебро-геометрическое обоснование конструкции Римана потребовало чуть более века и было зафиксировано в работе DelMum1969.

Эта работа высокотехнична, и мы в этой вводной лекции можем отметить лишь следующие моменты:

- В работе используется понятие *полустабильной*, то есть "чуть-чуть сингулярной" кривой. С помощью таких кривых *компактифицируются* пространства модулей;
- Пространства модулей $\mathcal{M}_g(\mathbb{k})$ оказались определены над произвольным полем $\mathbb{k}$ и являются квазипроjektивными многообразиями;
- Наряду с пространствами модулей $\mathcal{M}_g(\mathbb{k})$ появились более тонкие действующие лица – *стеки* $\mathfrak{M}_g(\mathbb{k})$, не являющиеся множествами.

2.0.7. Гизекер и " $\mathcal{M}_{c_1^2, c_2}$ ". Как уже было отмечено, исключительные поверхности классифицируются с помощью довольно специальных рассуждений. Но, разумеется, главные классификационные задачи касаются так называемых *поверхностей основного типа*.

С формальной точки зрения ситуация здесь аналогична классификации кривых. На место рода приходят два инварианта – *числа Чженя* c_1^2 и c_2 , и поверхности основного типа с данными инвариантами соответствуют точкам квазипроjektивного "пространства модулей" $\mathcal{M}_{c_1^2, c_2}$.

Однако многообразия $\mathcal{M}_{c_1^2, c_2}$, вообще говоря приводимы – так что, видимо, нужны какие-то ещё инварианты, различающие компоненты. Неизвестны размерности этих многообразий и даже – при каких значениях инвариантов они непусты.

2.0.8. Абелевы многообразия (Риман-Пуанкаре-...). Трансцендентные аспекты этой теории развивались давно. Восходящие к 17-18 векам *эллиптические интегралы*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} \text{ и } \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

развились в теорию *решёток периодов* кривой $\mathbf{X}$

$$\text{Per}_{\vec{\omega}}(\mathbf{X}) := \int_{H_1(\mathbf{X}, \mathbb{Z})} \vec{\omega},$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ – базис пространства абелевых дифференциалов

$$\Omega^1[\mathbf{X}] = \langle \omega_1, \dots, \omega_g \rangle,$$

а *тета-функция*

$$\theta(Z|q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n \text{ вместе с заменами } Z = e^{2\pi i z}, q = e^{\pi i \tau}$$

легла в основу многих аналогов и обобщений.

Одномерные *абелевы многообразия* – это эллиптические кривые вместе с коммутативным групповым законом, открытым Эйлером и объясняющим наблюдение Ньютона (об этом мы говорили ниже). С каждой комплексной кривой рода $g > 1$ в 19-м веке стали связывать её *якобиан*

$$\mathrm{Jac}(\mathbf{X}) := \frac{\mathbb{C}^g}{\mathrm{Per}(\mathbf{X})}$$

(с точностью до изоморфизма этот фактор не зависит от выбора базиса в пространстве дифференциалов) – комплексный тор, который, как оказалось ([Riemann1857]), допускает с помощью тета-функций вложение в $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Торы, допускающие такие вложения, и стали называться *абелевыми многообразиями*; существенный вклад в понимание их строения внёс Пуанкаре, см. [Poi1886].

Итак, уже в 19-м веке возникла тройка классов объектов

$$\left\{ \text{Общие торы } \frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda} \right\} \supset \{ \text{Абелевы многообразия} \} \supset \{ \text{Якобианы } \mathrm{Jac}(\mathbf{X}) \}.$$

Все три класса объектов хорошо поддаются классификации.

В 20-м веке существенная часть этой теории была распространена на произвольные поля, см. [Мамфорд1971].

2.1. Что классифицируем?

В соответствии с названием нашего курса мы собираемся классифицировать то, чем занимается алгебраическая геометрия.

Однако, как мы видели, в течение веков эти понятия постоянно эволюционировали (и нет причин считать сегодняшние точки зрения окончательным).

Мы кратко упомянем три класса объектов (два из них естественно образуют *категории*), которыми занимаются сегодняшние алгебраические геометры. Не будем опасаться излишней общности: более общие понятия часто короче определяются.

2.1.0. (Квази)проективные многообразия. *Проективные пространства* $\mathbf{P}_n(\mathbb{k})$ рассматриваются либо с *топологией Зариского*, базу замкнутых множеств которой образуют нули однородных многочленов $F \in \mathbb{k}[x_0 : \dots : x_n]$, либо в случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ с *классической топологией*.

По определению, в топологией Зариского замкнутые множества определяются как подмножества

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{P}_n(\mathbb{k}),$$

определяемые *конъюнкцией* уравнений

$$\bigwedge_{i \in I} [F_i = 0],$$

где I – произвольное множество⁴

Мы определили класс *проективных многообразий*⁵ $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{P}_n(\mathbb{k})$; основной интересующий нас подкласс – *неприводимые* многообразия, которые определяются чисто топологически как непредставимые в виде объединения строго меньших замкнутых подмножеств. Однако для полноты классификаций неизбежно рассмотрение и приводимых многообразий.

Квазипроективные многообразия определяются как теоретико-множественные разности проективных $\mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_0$. *Аффинные* многообразия – подкласс проективных, когда $\mathbf{X}_0$ – гиперплоскость.

В дальнейшем предполагается владение упомянутыми понятиями в пределах [Шаф2018].

2.1.1. Схемы. Мы вложим их в более широкое понятие.

С каждым топологическим пространством $\mathbf{X} \in \mathcal{TOP}$ связывается малая категория $\text{Op}_{\mathbf{X}}$ его открытых множеств. *Окольцованным пространством* называется пара $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$, где

$$\mathcal{O} : \text{Op}_{\mathbf{X}}^{\oplus} \longrightarrow \mathcal{ANN}$$

малый кофунктор. Схемы определяются как *окольцованные пространства, локально изоморфные спектрам коммутативных колец*. Их ввёл Гротендик, начав совместно с Ж. Дьедонне излагать их основы в многотомном незаконченном произведении [GroDie1960]; Гротендик называл схемы *предсхемами*, оставляя термин "схема" для достаточно хороших предсхем.

Достаточно полные изложения теории схем можно найти, помимо [Шаф2018], в [Харт1981], [EisenbudHarris1998] и многих других источниках.

2.1.2. Функторы точек. Начнём с системы полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ \dots \end{cases},$$

где $F_1, F_2, \dots \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$. Традиционная задача *диофантовой геометрии* – найти её *решения* $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{Z}$. Однако разумно искать её решения в других кольцах – можно в произвольных, см. [Манин2012].

Сопоставление любому кольцу множества решений фиксированной системы

⁴Мы чуть-чуть отклонились от традиционного определения *системы уравнений*

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ \dots \end{cases},$$

поскольку удобно иногда не считать уравнения *нумерованными* – а, например, считать их левые части пробегающими (однородный) идеал.

⁵В английском языке есть два перевода слова *многообразие* – *variety* и *manifold*. Второе из них часто употребляется для случая достаточно хорошего – например, *неприводимого* и *гладкого* многообразия. Нам придётся явно оговаривать все предполагаемые свойства многообразий.

полиномиальных уравнений определяет функтор

$$\mathbf{X} : \mathcal{ANN} \longrightarrow \mathcal{SET},$$

и такие функторы можно было бы считать основными объектами изучения в алгебраической геометрии. Проблема их характеристики свойствами, типичными для введённого только что класса, называется *проблемой существования Гротендика*, см. [Мамфорд1968], лекция 3.

Такие функторы называются *функторами точек*. Они тесно связаны с проблемами классификации алгебро-геометрических объектов, и мы к ним ещё вернёмся.

Задачи

2.1. Рассмотрите две параболы, заданные уравнениями $x^2 = ay$ и $y^2 = 2ax$. Свяжите нахождение их пересечения с задачей об удвоении куба.

2.2. Вычислите длину эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и площадь ограниченной им области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

2.3. (Параболическим) *коноидом* называется поверхность, заметанием вращением параболы вокруг своей оси. Докажите **теорему Архимеда**: *объём области, ограниченной сегментом коноида и плоскостью, перпендикулярной его оси, в полтора раза больше объёма прямого кругового конуса, вписанного в этот сегмент.*

2.4. Приведите примеры вещественных кубик, имеющих как можно больше вещественных точек перегиба. Пользуясь доступными компьютерными средствами, изобразите их. Есть ли среди троек точек перегиба коллинеарные? Если да, подчиняется ли распределение точек перегиба по кривым перегиба каким-либо закономерностям? Сформулируйте предположения и докажите их.

2.5. От скольких параметров зависят плоские кватрики с точностью до проективной эквивалентности?

2.6. Постройте (или найдите в литературе) кубическую поверхность с как можно большим количеством лежащих на ней прямых.

2.7. Покажите, что (простейшие) особенности плоских квинтик рода 4 можно задавать произвольно.

2.8. Установите унирациональность пространства модулей $\mathcal{M}_4$.

2.9. Докажите *представимость* функторов $\mathcal{ANN} \longrightarrow \mathcal{SET}$, определяемых системами полиномиальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ahlfors1954] L.V. Ahlfors, *On quasiconformal mappings*. Jour. d'Analyse Math. 3 (1954) 1–58.
- [Cayley1869] Arthur Cayley, *A memoir on cubic surfaces*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, The Royal Society, 159: 231–326.
- [DelMum1969] Pierre Deligne and David Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*. Publications Mathématiques de l’IHÉS. 36: 75–109.
- [EisenbudHarris1998] David Eisenbud; Joe Harris, *The Geometry of Schemes*. Springer-Verlag, 1998.
- [GroDie1960] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*. Publications Mathématiques de l’IHÉS, 1960-1966.
- [Groesbeek2020] Rein Janssen Groesbeek, *Shadow of a cubic surface*. Bachelor Thesis, 2020.
- [Heath1896] Apollonius of Perga and Thomas Little Heath, *Treatise on conic sections*. Cambridge: University Press, 1896.
- [Newton1704] I. Newton, *Enumeratio Linearum Terti Ordinis*. Appendix to Optics, London, 1704.
- [Plücker1835] Julius Plücker, *System der analytischen Geometrie*. Duncker, Berlin, 1835.
- [Poi1886] H. Poincaré, *Sur les fonctions abéliennes*. Am. J. Math. 8(1886), 289–342.
- [Riemann1857] B. Riemann, *Theorie der Abel’schen Functionen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 115–155 (1857).
- [Severi1921] F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*. Leipzig, 1921.
- [Teichmüller1939] Oswald Teichmüller, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 1939 (22):197.
- [Zar1971] O. Zariski, *Algebraic surfaces*. Springer, 1971.
- [АлгПов1965] И.Р. Шафаревич, ред., *Алгебраические поверхности*. Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1965.
- [Варден1959] Ван дер Варден, *Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции*. М., ГИФМЛ, 1959.
- [Мамфорд1968] Д. Мамфорд, *Абелевы Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности*. М.: Мир, 1968.
- [Мамфорд1971] Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*. М.: Мир, 1971.
- [Манин2012] Ю.И. Манин, *Введение в теорию схем и квантовые группы*. МЦНМО, 2012.
- [Харт1981] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*. М, "Мир 1981.
- [Шаф2018] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*. МЦНМО, 2018.