

Формула M_3 -инварианта для ориентированных зацеплений

Ахметьев П.М.

M_3 -инвариант - это комбинаторный инвариант конечного типа для 3-компонентных ориентированных зацеплений (с предписанным порядком компонент, но инвариант, построенный в Теореме 3 не зависит от порядка) $\mathbf{L} \subset \mathbb{R}^3$, который не выражается через попарные коэффициенты зацепления компонент и удовлетворяет асимптотическому уравнению:

$$M_3(\Lambda \mathbf{L}) = \prod_{i=1}^3 \lambda_i^s M_3(\mathbf{L}),$$

где s - соответствующий показатель (содержательно $s = 4$) Λ -вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ зацепление $\Lambda \mathbf{L}$ определено как $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ -кратная обмотка зацепления $\mathbf{L}$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ (произвол в определении Λ -кратной обмотки зацепления не влияет на значение инварианта).

Под инвариантом конечного типа здесь понимается инвариант, который задается интегральной формулой на конфигурационном пространстве зацепления предписанного конечного числа точек. Так сформулированное условие конечности, формально говоря, немного сильнее условия Васильева, которое из условия конечности непосредственно вытекает.

Теорема 1

Существует не более одного рассматриваемого инварианта (с точностью до прибавления произвольного полинома от попарных коэффициентов зацепления компонент), который удовлетворяет предписанной формуле подскока при особенности гомотопии зацепления (при гомотопии зацепления компонентам разрешается самопересекаться, но разные компоненты пересекаться не могут).

Теорема 2

Предположим, что существует инвариант M_3 , который является асимптотическим, его значение меняет знак на зеркальном зацеплении и который удовлетворяет следующей формуле подскока при гомотопии с одной точкой самопересечения на компоненте $L_1 \subset \mathbf{L}$:

$$M_3(\mathbf{L}_{1;+\varepsilon}) - M_3(\mathbf{L}_{1;-\varepsilon}) = -(1, 2)(2, 3)^2(3, 1)[(2, 1^+)(3, 1^-) + (2, 1^-)(3, 1^+)] \quad (1) \\ + (2, 3)^2(1, 2)^2(3, 1^+)(3, 1^-) + (3, 1)^2(3, 2)^2(2, 1^+)(2, 1^-),$$

через (i, j) обозначен коэффициент зацепления двух соответствующих компонент $\mathbf{L}$. Предполагается, что $\mathbf{L}_{1;+\varepsilon}$ имеет положительную разрешенную точку самопересечения на компоненте L_1 ; аналогичные формулы справедливы для гомотопии двух оставшихся компонент.

Тогда инвариант M_3 , при еще одном дополнительном предположении, что если хотябы один коэффициент зацепления (i, j) принимает нулевое значение, то полином $P((1, 2), (2, 3), (3, 1))$ обращается в нуль (это условие, конечно, легко переформулировать в терминах M_3) определяется следующей формулой:

$$M(\mathbf{L}) = -(1, 2)(2, 3)(3, 1)\gamma(\mathbf{L}) \\ + (1, 2)^2(1, 3)^2\beta(L_2 \cup L_3) + (2, 3)^2(2, 1)^2\beta(L_3 \cup L_1) + (2, 3)^2(2, 1)^2\beta(L_3 \cup L_1) \quad (2) \\ + P((1, 2), (2, 3), (3, 1)),$$

где

$$\beta(L_i \cup L_j) = c_1(L_i \cup L_j) - c_0(L_i \cup L_j)(c_1(L_i) + c_1(L_j)) \quad (3)$$

–обобщенный инвариант Сато-Левина,

$$\gamma(\mathbf{L}) = c_1(\mathbf{L}) \\ - ((1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1) + (3, 1)(1, 2))(c_1(L_1) + c_1(L_2) + c_1(L_3)) \\ - ((3, 1) + (2, 3))(c_1(L_1 \cup L_2) - (1, 2)(c_1(L_1) + c_1(L_2))) \quad (4) \\ - ((1, 2) + (3, 1))(c_1(L_2 \cup L_3) - (2, 3)(c_1(L_2) + c_1(L_3))) \\ - ((2, 3) + (1, 2))(c_1(L_3 \cup L_1) - (3, 1)(c_1(L_3) + c_1(L_1))),$$

–инвариант Мелихова,

$$P((1, 2), (2, 3), (3, 1)) = +\frac{1}{6}(1, 2)^2(2, 3)^2(3, 1)^2[(1, 2) + (2, 3) + (3, 1)] \\ - \frac{1}{12}(1, 2)(2, 3)(3, 1)[(1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1) + (3, 1)(1, 2)]. \quad (5)$$

Теорема 3

Асимптотический косозеркальный инвариант M_3 для показателя $s = 4$, удовлетворяющий формуле подскока из Теоремы 2, существует. Инвариант M_3 не меняется при перенумерации компонент зацепления.

Мы докажем Теорему 1 и Теорему 2. Интересно, что Теорема 1 и Теорема 3 переносятся на 5-компонентные зацепления (Теорема 1 переносится с усложнением формулировки: нужно учитывать подскоки инварианта при движении Хабино 4 компонент зацепления; такое обобщение в докладе доказать не планируем). Значение инварианта уже зависит от нумерации компонент, но сохраняется при циклической перенумерации компонент. Доказательство Теоремы 3 аналитическое и усложняется лишь в смысле учета большего числа индексов в аналитических формулах.