

лекция 3.

$$\Gamma = \{ g p g^{-1}, g \in U(n), p = \begin{pmatrix} p_1 \mathbb{1}_{n_1} & & \\ & p_2 \mathbb{1}_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & p_m \mathbb{1}_{n_m} \end{pmatrix} \}$$

$n_1 \dots n_m$
21
 $U(n)$

$$\frac{U(n)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_m)}$$

форме кривизны:

$$\Omega = \text{Tr}(p j \wedge j),$$

где $j = -g^{-1} dg$

$p_i \neq p_j$ при $i \neq j$ — форма невырожденная (симметрическая)

Если $p_i = p_j$, то $\det \Omega = 0$

$$\frac{U(n)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_m)}$$

распадаем
в член

$$\frac{Gr_{n_i, n_i + n_j}}{U(n_i) \times U(n_j)}$$



$$U(n)$$

$$\frac{U(n)}{U(n_1) \times \dots \times \widehat{U(n_i)} \times \dots \times \widehat{U(n_j)} \times \dots \times U(n_m) \times U(n_i + n_j)}$$

Заданные отображения

Комплексный анализ.

$$\{ 0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{m-1} \subset \mathbb{C}^n \}$$

$$| \dim L_k = d_k$$

Много значений фазов
Σ data

$$g = e$$

Картановская группа

$$g = 1 - 2u \otimes \bar{u} \quad g^\dagger g = 1$$

$$g = \pi u - \pi \bar{u}^\dagger$$

Полные фазы: $u_A, A = \overline{1 \dots n}$
 $\mathbb{C}^n, u_A \sim e^{i\varphi_A} u_A$

$$u_A u_B = \delta_{AB}$$

$$\Omega = i \sum_{A \neq B} (p_A - p_B) j_{AB} \wedge j_{BA},$$

где $j_{AB} = u_A \otimes \bar{u}_B$

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_3 \\ \downarrow \\ \mathbb{CP}^1 \\ \downarrow \\ \mathbb{CP}^2 \end{array}$$

"твисторное пространство"

$$\begin{array}{c} \mathbb{CP}^3 \\ \downarrow \\ S^4 \end{array}$$

$$\mathbb{R}^4: \quad so(4)/U(2) \simeq \mathbb{CP}^1$$

Котоморфизм

$$H^2(\mathbb{F}_{n_1 \dots n_m}, \mathbb{R})$$

$$\swarrow \quad \begin{array}{c} \mathbb{R}^{m-1} \\ \mathbb{R} \end{array}$$

пон. лишь
в δ -моделях

$\exists$ вложение

$SU(n)$

$$\mathbb{F}_{n_1 \dots n_m} \hookrightarrow G_{n_1} \times \dots \times G_{n_m}$$

$\mu_i^{-1}(0)$ n_i -мерная поверхность

$$x \rightarrow (\pi_{n_1}(x), \dots, \pi_{n_m}(x))$$

разрешимо вложение

$$\Omega = \Omega_{n_1} + \dots + \Omega_{n_m}$$

$$\Omega_{n_i}|_F \in H^2(F, \mathbb{R})$$

$M \subset (N, \Omega)$ разрешимо, если

$\Omega|_M = 0$ и M максимальна
разрешимая ($\dim M = \frac{1}{2} \dim N$).

$$\Omega = \begin{pmatrix} O_n & 1_n \\ -1_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

$q_1 \dots q_n \quad p_1 \dots p_n$

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

фигурный: Все $p_j = \text{const}$

$$\mu_{n_i} = \sum_{u=1}^{n_i} u_k \otimes u_k - \frac{n_i}{n} 1_n \in \mathfrak{su}_n$$

n_i n $G_{n_i, n}$

↑ отобр. максимум

$$\mu = \sum_{i=1}^m \mu_{n_i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} u_k \otimes u_k - 1_n = 0$$



$$\sum_{i=1}^m n_i = n \text{ берется}$$

$$\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$$

$$u_1 \otimes \bar{u}_1 + u_2 \otimes \bar{u}_2 - 1_2 = 0 \quad / . u_1 \text{ слева}$$

$$u_1 (\underbrace{\bar{u}_1 u_1}_{=0}) + u_2 - u_2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu^{-1}(0) = \text{функция} \hookrightarrow G_{n_1} \times \dots \times G_{n_m}$$

$$\boxed{\Omega|_{\mu} = 0, \text{ где } \mu - G\text{-определен в } \mu^{-1}(0)}$$

$$\mu(g \circ x) = g \mu(x) g^{-1} = 0$$

$$d\mu_a = \Omega(0, v_a) \quad / . v_b$$

$$\Omega(v_b, v_a) \Big|_{\mu^{-1}(0)} = D_{v_b} \mu_a \Big|_{\mu^{-1}(0)} = 0$$

$$\forall v_b, v_a \in \text{Lie}(G)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^m D_{v_i} \mu_i = 0}$$

(*)

$$\sum_{i=1}^n \dots$$

$$H^2(F_n, \mathbb{R}) = \langle \Omega_{n1}, \dots, \Omega_{nn} \rangle / (*)$$

$V_1, V_2, \dots, V_n$ — линейные пространства



$$\text{rk } V_k = k$$

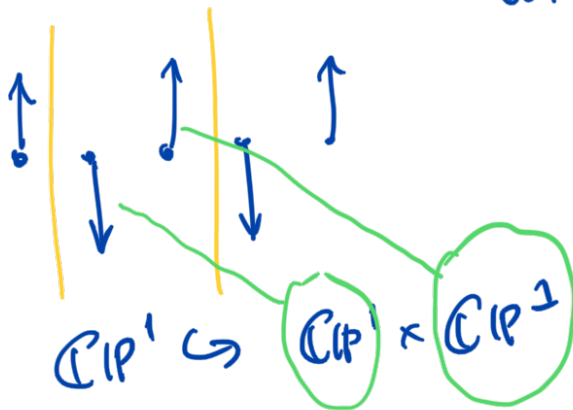
$$V_k / V_{k-1} \cong L_k$$

$L_1 \oplus \dots \oplus L_n = \text{трив. пространство}$

$$c_1(L_k) = [\Omega_k] \in H^2(F_n, \mathbb{R})$$

$$\sum_{k=1}^n [\Omega_k] = 0$$

Néel state = классическая АФ
вакуумное состояние.



$$\bar{u}_1 = u_2 = 0 \quad \rightarrow \text{антинорм. отображение} \\ (u_{i+1} = -\bar{u}_i)$$

$$z_{i+1} = -\frac{1}{z_i}$$

$G_{n_1} \dots G_{n_m}$

фр-во франс
 = фр-во розури
 касс. АФ Ваксуннов

$$\uparrow \uparrow \quad \Omega|_{\mathbb{CP}^1} = \Omega_1 + \Omega_2|_{\mathbb{CP}^1} = 2\Omega_1|_{\mathbb{CP}^1}$$

феррор. изнан
 $\mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$

Геометрическое квантование.

Мех. система в каноническом формализме.

$$S = \int dt \frac{G_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{2} - \int A$$

адельфов поле

$$T^*\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M} \times \mathcal{F}$$

гор. степени свободы

$$S = \int p_\mu dx^\mu - \int dt \cdot \mathcal{H}(x, p) + \int (\theta - \text{Tr}(A_\mu))$$

сопр. момент
 $\text{c}(\mu) \in \mathcal{F}$

$$\theta \rightarrow \theta + d\theta \rightarrow d\theta = \Omega$$

curvature form on F

$$\int_{\Gamma} \theta = \int_D \Omega$$



1D man WZW

target $F = \mathbb{CP}^{n-1}$

$(u_1, \dots, u_n) : \sum_{j=1}^n |u_j|^2 = 1$

$$\Omega = i \sum_{j=1}^n du_j \wedge \overline{du_j}$$

$$\mu = u \otimes \bar{u} - \frac{1}{n} \|u\|^2$$

$$\Rightarrow \theta = i \sum_{j=1}^n u_j \overline{du_j}$$



2S

$$S = 2S \int dt \sum_{j=1}^n \bar{u}_j (i \dot{u}_j + (A_\mu)_{ju} \dot{x}^\mu u_k)$$

$$u \rightarrow g(x(t)) \cdot u, \quad A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} - i \partial_\mu g g^{-1}$$

$$d(\theta - \text{Tr}(A_\mu)) = i \sum_j Du_j \wedge \overline{Du_j} - \text{Tr}(F_\mu)$$

$$Du = du - i A u$$

Wilson loop

$$u = \sum x_a \tau_a \in \mathfrak{g}$$

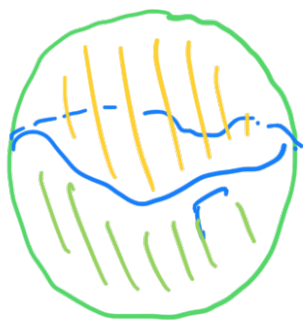
$$\dot{n} = [A_F \dot{x}^M, n]$$

$$C_J = \text{Tr}(n^J) = \text{const.}$$

Квантование квант. фазов. (a-le WZW)

$$\int d\mu e^{iS}$$

$$\mathbb{CP}^1: \Omega = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi$$



$$\int_{D_1} - \int_{D_2} = \int_{\mathbb{CP}^1} \Omega \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$p \in \mathbb{Z}$$

В общем случае кр. фазов

$$\int_{C_i} \Omega \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad C_i \in H_2(F, \mathbb{Z})$$

$$\Omega = i \sum (p_A - p_B) j_{AB} \wedge j_{BA}$$

$$j_{AB} = u_A \circ \overline{u_B}$$

$$u_A \circ \overline{u_B} = \delta_{AB}$$

$$\begin{matrix} u_1 \dots u_n \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \mathbb{C}^n \quad \mathbb{C}^n \end{matrix}$$



$$u_1 \dots u_n = \text{const.}$$

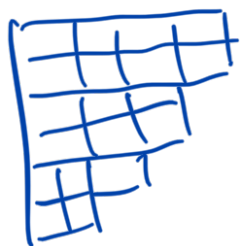
факторы $u_1 = \text{const}, \dots, u_{n-2} = \dots$

$$(u_{n-1}, u_n) \simeq \mathbb{CP}^1$$

$$\int \Omega = p_{A_i} - p_{A_{i+1}} \in 2\pi \mathbb{Z}$$

$$(\mathbb{CP}^1)_{A_i, A_{i+1}}$$

$p_A =$ группа узлов в графе Γ_{Dimer}



ном $\leftrightarrow$ кв-с $\rightarrow$ нр-во различных фазов.

Квантование Уббингера - Вундта.

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum (p_A - p_B) u_A \circ \overline{u_B} \wedge u_B \circ \overline{u_A} =$$

$$= d \left(i \sum p_A u_A \circ \overline{u_A} \right)$$

$\Theta =$ квант. инв. в генераторе

$$p_A [u_A^{(i)}, \overline{u_B^{(j)}}] = \delta_{AB} \delta^{ij}$$

$$u_A \circ \overline{u_B} = \delta_{AB}$$

$$u_A \rightarrow u_A \frac{1}{p_A}$$

$$\left[u_A^{(i)}, \overline{u_B^{(j)}} \right] = \delta_{AB} \delta^{ij}$$

$$\overline{u_A} \circ u_B = p_A \delta_{AB}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_A^{(i)\dagger} u_A^{(i)} |\psi\rangle = \rho_A |\psi\rangle$$

$$(*) O_{AB} |\psi\rangle = (u_A^\dagger \circ u_B) |\psi\rangle = 0 \quad \text{при } A \subset B$$

$$[\cdot, \cdot] = \rho_A - \rho_B$$

$$|\psi\rangle = A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p_1}} |\beta_1 \dots \beta_{p_2}\rangle \dots^*$$

$$\times (a^\dagger)^{\alpha_1} \dots (a^\dagger)^{\alpha_{p_1}} (b^\dagger)^{\beta_1} \dots (b^\dagger)^{\beta_{p_2}} |0\rangle$$

генератор
аннигиляции
по Юнг

a	a	a
b	b	
c		

$$u_B^\dagger \circ u_C = 0$$

$$u_A^\dagger \circ u_B = 0$$

$$u_A^\dagger \circ u_C = 0$$

Теорема Бореля-Ботта-Вейля.

$$H^0(\mathcal{L}_V)$$

↓

S_n

$$O(u)$$

↓

$$\dots u-1$$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}}_K$$

$$H^0(O(u)) = \text{огр. пространство}$$

отличен &

от $z_1 \dots z_n$.

$$a_1 + a_n$$

$$c_1(L_V) = [\Omega]$$

$$(\mathbb{C}P^1)_{A_i, A_{i+1}} - \text{koppen sluit}$$

Ω - старинный вал юр-н

$$\Omega((\mathbb{C}P^1)_{A_i, A_{i+1}}) = \int_{\mathbb{C}P^1} \Omega = \phi_{A_i} - \phi_{A_{i+1}}.$$

- Определим φ на $\mathcal{P}(V)$

Guillermo
Arenberg

up-to frame
u

кр-во координатных осей в I.

$$|v\rangle = e^{va^\dagger} |0\rangle$$

- Holstein-Prinzip / Dyson-Maleev

— символы языка
(конструктивный мет.)

Εκβαρυντισμός στορ. πολλα μ:

$$\mu: (N, \Omega) \rightarrow g \approx su_n$$

$$\mu(g \cdot x) = g \mu(x) g^{-1}$$

$$\mathbb{CP}^{n-1}: \mu = u \otimes \bar{u} - \frac{1}{n} \|u\|^2$$

$$\frac{U(3)}{U(1)^3} \cong \mathfrak{f}_3 \quad \text{τρωόρρα κρ-βο}$$



$(\mathbb{CP}^2, \text{οραγίτα ορμαγυα})$

↘ $u, \bar{u} \in \mathbb{C}^3$

$$u_A, u_B: u_A \otimes \bar{u}_B = \delta_{AB}$$

$$\underbrace{\bar{u}_1 du_2, \bar{u}_3 du_2}_{\text{αυτοκον.}}, \underbrace{u_1 d\bar{u}_2, u_3 d\bar{u}_2}_{\text{αυτοκον.}} \quad J_1$$

1) ω_1 .
κανον. πολλα. ορμαγυα

$$2) \{ \bar{u}_1 du_2, u_3 d\bar{u}_2 \} = \omega_1, \quad J_2$$

$$\{ u_1 d\bar{u}_2, \bar{u}_3 du_2 \} = \text{αυτοκον.}$$

$$\Omega^{\text{top}} = \prod \text{nor. 1-forms} \prod \text{comm. comp.}$$

$$\text{sgn}(\Omega_{g_2}^{\text{top}}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = -\text{sgn}(\Omega_{g_1}^{\text{top}}(v_1, \dots, v_4))$$

$$Q_1 := \overline{u_1} du_2, \quad Q_2 := u_3 d\overline{u_2}$$

Выбор комм. структуры $\sim$ $\wedge$ бражение (u_1, u_3)
 $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} \overline{Q_1} \\ Q_2 \end{pmatrix} \mapsto \Sigma \begin{pmatrix} \overline{Q_1} \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma \in SU(2)$$

Если $\Sigma \in U(1) \hookrightarrow SU(2)$, то
 комм. структура не меняется

Гл-во комм. структуры на $(\mathbb{CP}^2, \text{обр. ориентация})$
 $\mathbb{Z}$

$$\frac{SU(2)}{U(1)} = \mathbb{CP}^1 = \text{свои твисторное расщ.}$$

$$\Rightarrow \text{твисторное кр-во } \mathbb{CP}^2 \simeq (u_1, u_2, u_3) / \sim = \\ = \text{кр-во фанов } F_3.$$

S. Salamon

" Twistor spaces and harmonic maps