

Лекция 3.

$$D_n = \left\{ x \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

$$\Lambda = \{ v_i \}_{i=1}^n$$

$$\Lambda^* = \{ v_j^* \}$$

$$(v_i \cdot v_j^*) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\Lambda^* = \{ x \in \mathbb{R}^n : (x, v) \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda \}.$$

$$D_n = \langle \underbrace{e_1 - e_2}_{f_1}, \underbrace{e_2 - e_3}_{f_2}, \dots, \underbrace{e_{n-1} - e_n}_{f_n}, e_{n-1} + e_n \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Главный D_n^* .

$$2e_i \in D_n, \quad \begin{matrix} u \in D_n^* \\ \text{"} \\ (u_1, \dots, u_n) \end{matrix}$$

$(2e_i, u) = 2u_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ все координаты -
целые числа.

$$(e_i - e_j, u) = u_i - u_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow u_i \equiv u_j \pmod{2}.$$

$$D_n^* = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : u = \left(\frac{u_1}{2}, \dots, \frac{u_n}{2} \right), \text{ где } u_i \in \mathbb{Z} \right. \\ \left. u_i \equiv u_j \pmod{2} \right\}.$$

$$D_n^* = \underbrace{\mathbb{Z}^n}_{//} \cup \left(\frac{l_1 + \dots + l_n}{2} \right) \underbrace{\mathbb{Z}^n}_{//}$$

$$\langle D_n, l_1 \rangle_{\mathbb{Z}} \quad D_n \cup (l_1 + D_n)$$

$$D_n^* / D_n = \left\{ \overline{0}, \overline{e_1}, \frac{\overline{l_1 + \dots + l_n}}{2}, -\frac{\overline{l_1 + l_2 + \dots + l_n}}{2} \right\}.$$

$$2\overline{e_1} = \overline{0}$$

$$\frac{\overline{l_1 + \dots + l_n}}{2} = \begin{cases} \overline{0}, & n - \text{чётное} \\ \overline{e_1}, & n - \text{нечётное} \end{cases}$$

$$\text{T.O.} \quad D_n^* / D_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & n - \text{нечётное} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n - \text{чётное.} \end{cases}$$

Сл-ие: E_8 - чётная самодвойственная
решётка в $\mathbb{R}^8$.

Д-во:

$$\underbrace{D_8}_{2} \subset \underbrace{E_8}_{4} \subseteq \underbrace{E_8^*}_{2} \subset \underbrace{D_8^*}_{2} \Rightarrow |E_8^* / E_8| = 1. \Rightarrow E_8^* = E_8.$$

$$\Gamma_n = D_n \cup \left(\frac{l_1 + \dots + l_n}{2} \right) D_n, \quad n \equiv 0(4) \Rightarrow \Gamma_n - \text{целая}$$

$$D_n \subset \Gamma_n \subseteq \Gamma_n^* \subset D_n^* \Rightarrow \Gamma_n^* = \Gamma_n.$$

$$A_n \subset \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}.$$

||

$$\langle e_1 - e_2, \dots, e_n - e_{n+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$n=1 \quad A_1 = \{ (x, -x) : x \in \mathbb{Z} \} = (1, -1) \cdot \mathbb{Z} = f\mathbb{Z}.$$

||
f

$$A_1^* = \frac{f}{2} \mathbb{Z}.$$

Лемма A_n^* с помощью

Теорема: Δ - целая унимодулярная решетка,

$$L \subset \Delta, \quad L - \text{примитивная}, \quad \text{Тогда} \\ L^*/L \cong (L^\perp)^*/L^\perp \cong \Delta / L \oplus L^\perp.$$

Опр': $L \subset \Delta, \quad L_\Delta^\perp = \{ v \in \Delta : (v, l) = 0 \quad \forall l \in L \}.$

Опр: $L \subset \Delta$ наз. -ся примитивной, если
 $\forall l \in \Delta : nl \in L, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow l \in L.$

Л/з: ① а) $L_n^\perp$ - подрешетка Δ .

б) Если Δ - решетка в $\mathbb{R}^n$, $\text{rank } L = k$, то $\text{rank } L^\perp = n - k.$

$$A_n = (\ell \mathbb{Z})^\perp$$

$$(1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

$\vdots$
 ℓ

В теореме: $\Lambda = \mathbb{Z}^n$, $L \subset \Lambda$

Утв: если $L \subset \Lambda$ — подрешётка то $L^\perp$ — примитивная:

До-во:

$$v \in \Lambda \quad nv \in L^\perp \Rightarrow (nv, u) = 0 \quad \forall u \in \Lambda$$

$\Downarrow$
 $(v, u) = 0 \Rightarrow v \in L^\perp$

$$L^*/L \cong (L^\perp)^*/L^\perp$$

$$L^\perp = A_n, \quad L = \ell \mathbb{Z}, \quad L^* = \frac{\ell}{n+1} \mathbb{Z}$$

$$A_n^*/A_n \cong \frac{\ell \mathbb{Z}}{n+1} / \ell \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} / (n+1) \mathbb{Z} = \langle \delta \rangle_{n+1}, \text{ где}$$

$$\delta = \frac{1}{n+1} (\ell_1 + \dots + \ell_n - n \ell_{n+1}).$$

До-во:

Λ - целая

$$(\Lambda \subseteq \Lambda^*)$$

$$L \subseteq \Lambda$$

- примитивная

($L^\perp$ - примитивная)
тоже

$$L \oplus L^\perp \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda^* \subseteq L^* \oplus (L^\perp)^*$$

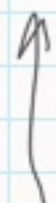
Вернем $v \in \Lambda \Rightarrow v = l^* + (l^\perp)^*$, причем

единственным образом.

$$v + (l + l^\perp) = (l + l^*) + (l^\perp + (l^\perp)^*)$$

$$\Lambda / L \oplus L^\perp \xrightarrow{p_{L^*}} L^* / L$$

$$\searrow p_{(L^\perp)^*} \quad (L^\perp)^* / L^\perp$$



$$v + (l + l^\perp) \xrightarrow{p_L} l^*$$

$$\searrow p_{L^\perp} \quad (l^\perp)^*$$

$p_L, p_{L^\perp}$ - корректно
определенные
гомоморфизмы.

До-ем, что гомоморфизмы p_L и $p_{L^\perp}$ -
инъективны.

$$\text{pr}_{L^\perp}(\bar{v}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{v} = 0$$

Пусть $\text{pr}_{L^\perp}(\bar{v}) = \bar{0}$

$$\boxed{\text{pr}_{L^\perp}(\bar{v}) = (\ell^\perp)^*} \Rightarrow (\ell^\perp)^* \in L^\perp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v} - \underset{\substack{\uparrow \\ L^*}}{(\ell^\perp)^*} = \ell^* \in \Lambda$$

$$\bar{v} = \ell^* + (\ell^\perp)^*$$

$$\begin{array}{l} |L^*/L| \ell^* \in L \Rightarrow \ell^* \in L. \\ \ell^* \in \Lambda \quad \quad \quad L\text{-примитивная} \end{array}$$

$$\bar{v} = \bar{\ell}^* + \overline{(\ell^\perp)^*} \in L \oplus L^\perp \Rightarrow \bar{v} = \bar{0}.$$

Аналог., при d -ве инъективности pr_L используется примитивность $L^\perp$.

Пусть Λ - d^2 -унимодулярная.

$$\overbrace{L \oplus L^\perp}^{\substack{\uparrow \\ d^2}} \subset \Lambda = \underbrace{\Lambda^*}_{\substack{\uparrow \\ d}} \subset L^* \oplus (L^\perp)^*$$

$$\overbrace{| \Lambda / L \oplus L^\perp |}^{\substack{= d \\ d^2}} \cdot \overbrace{| L^* \oplus (L^\perp)^* / \Lambda |}^d = | L^* \oplus (L^\perp)^* / L \oplus L^\perp |.$$

$$|L^* \oplus (L^\perp)^* / L \oplus L^\perp| = |\Lambda / L + L^\perp|^2 \quad (\leq)$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda / L + L^\perp & \xrightarrow{pr_L} & L^* / L \\ & \searrow pr_{L^\perp} & \\ & & (L^\perp)^* / L^\perp \end{array}$$

$$|\Lambda / L \oplus L^\perp| \leq |L^* / L|, |(L^\perp)^* / L^\perp|$$

$$(\leq) \quad |L^* / L| \cdot |(L^\perp)^* / L^\perp| \Rightarrow \text{есть рав-во} \Rightarrow$$

$\Rightarrow pr_L$ и $pr_{L^\perp}$ — изоморфизмы.

Условие выбора f в основной лемме.

Лемма: $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — "хорошая"

$$1) \quad f(x) \leq 0, \quad |x| \geq 1$$

$$2) \quad \hat{f}(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Тогда} \quad \rho^c \leq \frac{f(0)}{2^n \hat{f}(0)}.$$

Нормализация: $f(x) \leq 0, \quad |x| \geq \tau; \quad f(0) = \hat{f}(0).$

$$\text{Тогда} \quad \rho^c \leq \left(\frac{\tau}{2}\right)^n.$$

$$\text{C. Rogers 1958:} \quad \rho_{E_8}^c = \frac{1}{16} = 0,0625$$

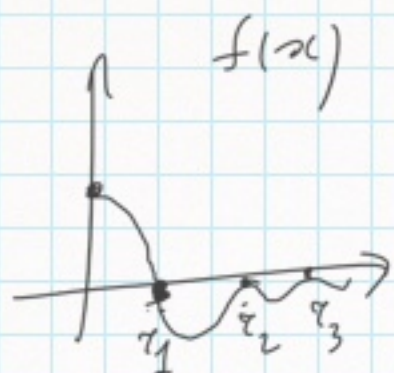
$$\rho_8^c \leq 0,06326 \dots$$

2001, H. Cohn, N. Elkies:

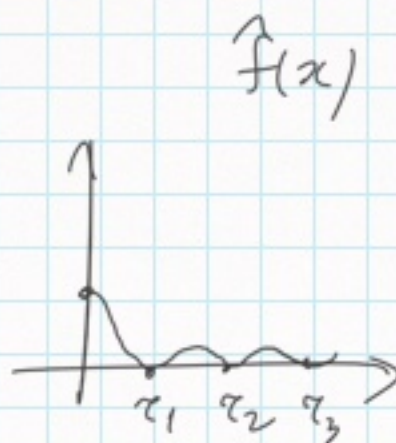
$$n=1: f(x) = (1-x^2) \prod_{k \geq 2} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$$

$$f(x) = 0, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(x) \leq 0, \quad |x| \geq 1.$$



$$\Lambda = \Lambda^*$$



$n > 1$

$\Lambda = \{\tau\}$; $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ - всевозможные длины векторов.

$$g_k(x) = L_k \left(\frac{2\pi|x|^2}{\tau_k^2} \right) e^{-\pi|x|^2/\tau_k^2} \rightarrow \text{делает } f \text{ "хорошей"}$$

отбрасывает за нули

$$\hat{g}_k(x) = (-1)^k g_k(x).$$

$$\hat{f} = \underbrace{f_1 + f_2}, \quad \text{а } f = -f_1 + f_2$$

мин.-ая канд.-ия $g_k(x)$

М. Вязовская:

$$f \mapsto \sin^2 \frac{\pi |x|^2}{2}, \quad x = \sqrt{2k} - \text{нули}$$

$x = 0$ - нуль пор. 4

$x = \sqrt{2k}, k=1, 2, \dots$ - нули 2^{ого} порядка.

$$f = \sin^2 \frac{\pi |x|^2}{2} \quad \underbrace{\int_0^{+\infty} g(t) e^{-\pi |x|^2 t} dt}_{\hat{G}(x)}$$

Если g - дост. хорошая, то

$$\hat{G}(x) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi |y|^2/t} g(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\pi |y|^2 t} t^{\frac{n}{2}-2} g\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$g \xrightarrow{\wedge} t^{\frac{n}{2}-2} g\left(\frac{1}{t}\right).$$

Хотим $g\left(\frac{1}{t}\right) = \varepsilon t^{2-\frac{n}{2}} g(t)$, $\varepsilon = \pm 1 \Rightarrow$ связь с модуль. гр-ами.

Что делать с $\sin^2 \frac{\pi |x|^2}{2}$?

$$(\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{4}.$$

Окажется, что

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) < 0 \text{ где надо, а } g_1(t) - g_2(t) > 0.$$

$D/3$:

9. Дать, что если Λ -решётка в $\mathbb{R}^n$, $L \subset \Lambda$ -подрешётка, то
- а) $L_{\Lambda}^{\perp}$ - подрешётка Λ ;
 - б) $\text{rank } L_{\Lambda}^{\perp} = \text{rank } \Lambda - \text{rank } L$, где ранг решётки - это кол-во элементов базиса решётки.

10. $L \subset \Lambda$ - примитивная $\Leftrightarrow (L_{\Lambda}^{\perp})_{\Lambda}^{\perp}$ - примитивная.

11. Найти базис E_8 , по которому можно построить диаграмму Динкина (и нарисовать её).

12. Найти базис E_7 (нарисовать диаграмму), $R_2(E_7)$, найти $|E_7|$, найти E_7^*/E_7 , где

$$E_7 = C_{E_8}^{\perp}, \quad C = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_8).$$

13. Пусть Λ -решётка в $\mathbb{R}^n$ с базисом $f = \{f_i\}_{i=1}^n$, $G_{\Lambda}^f = \left((f_i \cdot f_j) \right)_{i,j=1}^n$ - матрица Грама в базисе f .

Выразить $|\Lambda|$ через $\det G_{\Lambda}^f$, а также выразить двойственный базис $f^* = \{f_i^*\}_{i=1}^n$ через исходный базис f и G_{Λ}^f .