

Научно-образовательный центр при МИАН, весна 2021

Г.Б. Шабат,
КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ
В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Лекция 3 (1 марта 2021)

Классификация алгебраических многообразий

3.0. Что и как классифицируем? (Окончание).....	1
...3.0.0. Полные многообразия и их подмногообразия	1
...3.0.1. Проективная, бирегулярная, бирациональная классификация ...	2
...3.0.2. Гладкость и минимальность	3
3.1. Мечты об идеальных пространствах модулей.....	6
...3.1.0. Обозначения	6
...3.1.1. (Уни)версальные семейства	7
...3.1.2. Кофунктор семейств.....	8
...3.1.3. О представимости функторов в алгебраической геометрии	9
Задачи.....	9
Литература	10

3.0. Что и как классифицируем? (Окончание)

3.0.0. Полные многообразия и их подмногообразия. Занимаясь классификацией вложенных многообразий, мы ограничимся *проективными*, а занимаясь абстрактными – *полными*. Поскольку различие начинает сказываться лишь начиная с размерности 2, мы отложим обсуждение понятия полного многообразия – впрочем, см. [Шаф2018].

Идея заключается в том, что мы (в отличие от Ньютона...) не хотим позволять каким-то частям рассматриваемых нами объектов "прятаться в бесконечности"; примерно для этого проективная геометрия и была придумана (см., например, [Coolidge1934]).

Проективность и полнота сродни топологическому понятию *компактности*, особенно если воспользоваться старинным, относящимся к *вложенным* топологическим пространствам, определением компакта как *замкнутого ограниченного подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$* – согласно этому определению, никакие точки компакта тоже не могут ускользнуть в бесконечность. Это свойство психологически важно, потому что всё, о чём думает геометр, уместается на конечном *чертеже* (будь то участок земли с песком, лист бумаги, доска в аудитории или экран компьютера); пятый постулат Евклида о параллельных не обладает этим свойством и тысячи лет мучил геометров.

Но перенесение инвариантного определения компактности (*из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие*) из общетопологического контекста в алгебро-геометрический не срабатывает, поскольку в топологии Зариского ему удовлетворяют аффинные и многообразия (и, более общим образом, *аффинные схемы*, то есть спектры коммутативных колец). Потому и приходится вводить другие определения,

о которых речь пойдёт ниже.

Когда нам всё-таки придётся заниматься неполными многообразиями – а это неизбежно, поскольку, например, пространства модулей кривых неполны – мы будем стараться *компактифицировать* их и затем рассматривать как *разности полных*.

Таким образом, в случае неполных многообразий мы будем представлять их в виде $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}_\infty$, где $\mathbf{V} \supset \mathbf{V}_\infty$ – пара полных многообразий. Классификация таких пар – естественная задача алгебраической геометрии, и в случае кривых она хорошо разработана.

В случае высших размерностей она разработана меньше. Возможно, уместно ставить задачу классификации *флагов* $\mathbf{V} \supset \mathbf{V}_1 \supset \mathbf{V}_3 \supset \dots$.

3.0.1. Проективная, бирегулярная, бирациональная классификация.

Даже при классификации проективных многообразий есть по крайней мере три подхода, основанных на разных, всё более грубых, отношениях эквивалентности.

Мы опускаем наиболее тонкое – отношение *равенства*. Оно может показаться тривиальным, и с точки зрения геометрии это действительно так, но с точки зрения алгебры вопрос о том, когда две системы (однородных) полиномиальных уравнений задают одно и то же многообразие, является технически содержательным и довольно трудным с алгоритмической точки зрения. Вопрос же о том, как задать фиксированное многообразие наиболее *экономной* системой уравнений (или, что то же самое, выбрать наилучшую систему образующих одного и того же идеала), составляет целый раздел компьютерной алгебры. Он современен, интересен и практически важен, но лежит за пределами нашего курса.

Многообразия $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subset \mathbf{P}_n(\mathbb{k})$ называются *проективно эквивалентными*, если существует такое преобразование $\tau \in \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{k}) = \mathrm{Aut}(\mathbf{P}_n(\mathbb{k}))$, что $\tau(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$. *Классификация многообразий данной размерности и данной степени с точностью до проективной эквивалентности* – одна из старейших задач алгебраической геометрии. Результаты и на плоскости, и в пространстве начинались с понимания того, что проективная классификация многообразий степени 2 (коник и квадрик) почти тривиальна. Нетривиальные результаты начинаются с кубических кривых и кубических поверхностей.

Многообразия $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_n(\mathbb{k})$, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{P}_m(\mathbb{k})$ называются *бирегулярно эквивалентными*, если существует изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Y} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{spec} \, \mathbb{k} & \end{array}$$

в категории схем над основным полем. Бирегулярно изоморфные многообразия обычно называют просто *изоморфными*.

Бирегулярная классификация проективных многообразий строго грубее, чем проективная, но убедиться в этом, видимо, не очень просто. Гладкие проективные кривые изоморфны тогда и только тогда, когда проективно эквивалентны.

Проективное многообразие с точностью до проективной эквивалентности определяется классом линейной эквивалентности *очень обильного дивизора* (а конкретное вложение в $\mathbf{P}_N$ – выбором базиса в пространстве Римана-Роха этого дивизора). Поэтому построение проективно неэквивалентных изоморфных многообразий требует достаточного запаса очень обильных дивизоров подходящей степени.

В отличие от аффинных многообразий, категория которых эквивалентна категории $\mathbb{k}\text{-}\mathcal{A}\mathcal{N}\mathcal{N}$ категории коммутативных конечнопорождённых $\mathbb{k}$ -алгебр, проективные многообразия не связываются с каким-либо алгебраическим объектом (а только с *пучком* локальных колец).

Наконец, неприводимые многообразия $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называются *бirationально изоморфными*, если содержат изоморфные всюду плотные в топологии Зариского подмножества, то есть такие $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, что $U \simeq V$.

Простейший пример бирационально изоморфных, но не изоморфных гладких полных многообразий доставляют проективная плоскость $\mathbf{P}_2$ и произведение проективных прямых $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ (это произведение обычно реализуется как *квадрика* в $\mathbf{P}_3$).

Классу бирационального изоморфизма многообразия $\mathbf{X}$ взаимно однозначно соответствует *поле рациональных функций* $\mathcal{K} = \mathbb{k}(\mathbf{X})$. Получающиеся таким образом поля допускают независимую характеристику: это –

конечнопорождённые расширения $\mathcal{K} \supseteq \mathbb{k}$ основного поля.

Таким образом, в случае бирациональной классификации алгебро-геометрическая задача равносильна чисто алгебраической.

Алгебраическая задача имеет смысл и весьма интересна (но обычно крайне трудна) и при произвольном поле $\mathbb{k}$, например, при $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$. В последнем случае она относится к *арифметической* геометрии. Мы будем заниматься лишь *алгебраической* геометрией, сохраняя предположение $\bar{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$.

Любое многообразие $\mathbf{X}$, для которого $\mathbb{k}(\mathbf{X}) = \mathcal{K}$, называется *моделью* поля $\mathcal{K}$. Выбор достаточно хорошей модели конечнопорождённого расширения основного поля – одна из центральных задач алгебраической геометрии. В некоторых случаях понятие “хорошая” удаётся настолько уточнить, что имеют место теоремы единственности модели, обладающей предписанными свойствами. Так, единственны гладкие полные модели кривых. О многообразиях высших размерностей мы поговорим в следующем подразделе.

3.0.2. Гладкость и минимальность. Отмеченный случай единственной гладкой проективной модели имеет место только в размерности 1.

В произвольной размерности очевидно лишь существование проективной модели. Действительно, пусть поле $\mathcal{K}$ порождено над $\mathbb{k}$ элементами $x_1, \dots, x_n$; как ни печально, в современной литературе это обозначается равенством

$$\mathcal{K} = \mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$$

то есть так же, как если бы $\mathcal{K}$ было полем рациональных функций независимых переменных $x_1, \dots, x_n$. На самом деле элементы $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{K}$ обычно связаны алгебраическими соотношениями; эти соотношения образуют идеал

$$\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$$

в кольце многочленов, и имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K} \cong \text{ff} \left(\frac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{a}} \right),$$

где для кольца A без делителей нуля через $\text{ff}(A)$ обозначено его *поле частных* (от слов fraction field). Тогда выбор любой системы образующих идеала

$$\mathfrak{a} = \langle F_1, \dots, F_N \rangle$$

определяет задаваемое соответствующими уравнениями аффинное многообразие

$$\dot{\mathbf{X}} := \text{zer}_{F_1, \dots, F_N} \subseteq \mathbf{A}_n(\mathbb{k}),$$

являющееся *аффинной* моделью поля $\mathcal{K}$ – это означает, что $\mathcal{K} \cong \mathbb{k}(\dot{\mathbf{X}})$. Нашей целью, однако, было построение *проективной* модели этого (произвольного) поля. Эта цель достигается взятием за $\mathbf{X}$ *проективного замыкания* (то есть замыкания в *топологии Зариского* пространства $\mathbf{P}_n(\mathbb{k}) \supset \mathbf{A}_n(\mathbb{k}) \supseteq \dot{\mathbf{X}}$). Таким образом получается неприводимое (это нетрудно доказать) проективное многообразие $\mathbf{X}$, удовлетворяющее требуемому изоморфизму $\mathcal{K} \cong \mathbb{k}(\mathbf{X})$.

Однако нет никаких причин рассчитывать на то, что полученная таким образом проективная модель будет *гладкой*. Нахождение гладкого проективного многообразия $\hat{\mathbf{X}}$, бирационально изоморфного проективному многообразию $\mathbf{X}$, называется *разрешением особенностей*, или *десингуляризацией* многообразия $\mathbf{X}$ (использование этой терминологии естественно, лишь если $\mathbf{X}$ имеет особенности). Обычно десингуляризация рассматривается вместе с морфизмом

$$\sigma : \hat{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbf{X};$$

типичные примеры (предъявляемые в аффинных координатах) – *полукубическая парабола* $y^2 = x^3$, десингуляризуемая параметризацией $x = t^2, y = t^3$, и *декартов лист*¹ $y^2 = x^3 + x^2$ с параметризацией $x = t^2 - 1, y = t(t^2 - 1)$.

Лёгкость десингуляризации зависит от размерности и от характеристики основного поля. В случае кривых есть несколько классических методов – см., например, [SempleRoth1985]. В случае поверхностей есть несколько текстов умеренной сложности, например, [Lipman1969]. В произвольной размерности над полем характеристики 0 возможность разрешения особенностей установлена в работе [Hironaka1964], и это – одна из труднейших теорем алгебраической геометрии с рекордным по длине доказательством, см. [Hauser2003]. Над полями положительной характеристики вопрос о возможности разрешить

¹с этого примера начинается учебник [Шаф2018]

любую особенность решён лишь в размерности ≤ 3 , см. [CossartPiltant2009]; в общем случае он остаётся открытым.

Далее ограничимся случаями, когда существование гладкой проективной модели $\mathbf{X}$ поля $\mathcal{K}$ установлено; пусть либо $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$, либо $\deg \text{tr}_{\mathbb{k}} \mathcal{K} = \dim_{\mathbb{k}} \mathbf{X} \leq 3$. Возникает вопрос о единственности такой модели.

Как уже отмечалось, она имеет место в случае кривых. В высших размерностях она иметь место не может по причине возможности *раздутий* точек (см. например, [Шаф2018]); сохраняя гладкость и проективность, эта процедура строго увеличивает вторые гомологии $H_2(\cdot, \mathbb{Z})$.

Поэтому естественно попытаться наложить на модели требование *минимальности*, то есть невозможности что-либо *стянуть* – или, иначе говоря, получить рассматриваемую модель раздутием какой-либо строго меньшей.

На первый (и формальный) взгляд этот подход, называемый *программой минимальных моделей*, терпит крах уже в размерности 2. Действительно, и проективная плоскость $\mathbf{P}_2$, и квадрика $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ минимальны, но лежат в одном бирациональном классе. Оказывается, однако, что в случае поверхностей исключения такого рода можно перечислить, причём для поверхностей *основного типа* (см. точные определения в последующих лекциях) единственность гладких минимальных моделей в классе бирациональной эквивалентности наблюдается.

Наряду с упомянутой неединственностью аргумент "против" программы минимальных моделей заключается в том, что *некоторые замечательные многообразия высших размерностей не минимальны*. Убедительный пример доставляют *кубические поверхности*, которые можно получить, раздувая 6 точек (в общем положении) на плоскости $\mathbf{P}_2$. При этом бирегулярная классификация кубических поверхностей (совпадающая с проективной) весьма поучительна, интересна и даёт красивые результаты.

Наконец, упомянем пример, в некотором смысле разрушающий надежду на простую, ясную и окончательную классификацию алгебраических многообразий. В работе [Schroeer1999] изучаются поверхности, бирационально изоморфные произведению прямой на кривую, но не вкладываемые в проективные пространства!

Этот пример показывает, что, ограничиваясь проективными многообразиями, с точки зрения бирегулярной классификации мы что-то – возможно, важное – упускаем из вида.

3.1. Мечты об идеальных пространствах модулей

3.1.0. Обозначения. В конце лекции 1 было намечено определение пространства модулей $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ алгебро-геометрического объекта $\mathbf{X}$ как множество классов

изоморфизма алгебро-геометрических объектов с теми же дискретными инвариантами, что у $\mathbf{X}$. Разумеется, чтобы превратить этот подход в точное определение, нужно уточнить значение нескольких слов; мы в нашем курсе не будем пытаться рассмотреть соответствующие понятия в полной общности, а ограничимся примерами.

В той же лекции бегло упоминалось, что множество $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ обычно наделяемо той же алгебро-геометрической структурой, что и $\mathbf{X}$. Сейчас мы введём серию понятий и обозначений для того, чтобы (хотя бы в некоторых случаях) придать этим словам точный смысл.

Пусть всё же $\mathbf{X}$ — просто гладкое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$. Нас будут интересовать *сюрьективные* морфизмы $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{V}$ квазипроективных многообразий, прообразы точек которых мы будем называть *слоями* морфизма и обозначать

$$\mathcal{X}_B := \pi^{-1}(B) \text{ для } B \in \mathbf{V}.$$

Будем предполагать, что при некотором $O \in \mathbf{V}$ имеет место бирегулярный изоморфизм $\mathcal{X}_O \simeq \mathbf{X}$; предполагается, что морфизм π *собственный*, что есть все его слои *полны* (желающие могут заменить это слово на *проективные*).

Более тонкое условие заключается в том, что все слои $\mathcal{X}_B$ имеют *одни и те же дискретные инварианты*. В случае *семейств кривых* это означает, что все слои $\mathcal{X}_B$ — кривые одного и того же рода, случай поверхностей будет конкретизирован в одной из последующих лекций, а общую формулировку можно привести лишь для тех, кто знает, что такое *плоский морфизм*²; именно это свойство требуется от морфизма π . В случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ морфизм π является плоским тогда и только тогда когда после забывания комплексной структуры морфизм $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{V}$ превращается в *локально-тривиальное расслоение* в категории гладких многообразий.

Деформацией многообразия $\mathbf{X}$ над базой $(\mathbf{V}, O)$, где $O \in \mathbf{V}$, называется любое семейство многообразий $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{V}$ с перечисленными свойствами и такое, что $\mathcal{X}_O \simeq \mathbf{X}$. Обычно под $(\mathbf{V}, O)$ понимается *росток* многообразия, то есть пару $(\mathbf{V}, O)$ разрешается заменять на $(\mathbf{V}', O)$, если $\mathbf{V} \supseteq \mathbf{V}' \ni O$ и $\mathbf{V}'$ открыто в $\mathbf{V}$. То же соглашение при $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ с использованием комплексной топологии приводит к тому, что базу $\mathbf{V}$ можно считать (психологически *сколь угодно малым шаром* с центром O).

Типичном примером деформации гладкого проективного многообразия, заданного некоторой системой полиномиальных уравнений, зависящей от набора коэффициентов $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{A}_m(\mathbb{k})$ или $(a_0 : \dots : a_m) \in \mathbf{P}_m(\mathbb{k})$ является открытое по Зарискому подмножество $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{A}_m(\mathbb{k})$ или $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_m(\mathbb{k})$, состоящего из наборов коэффициентов, при котором многообразие остаётся гладким. Аналогичная конструкция имеет смысл при $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ в комплексной топологии.

3.1.1. (Уни)версальные семейства. Введённые понятия располагают к мечте

²Определение можно найти, например, в [Eisenbud1995].

о том, чтобы построить для данного многообразия $\mathbf{X}$ такое универсальное семейство $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}$, чтобы все многообразия $\mathbf{X}'$ с теми же инвариантами, что у $\mathbf{X}$, были слоями этого семейства, причём встречались в семействе ровно по одному разу.

Если бы такая конструкция была возможно, то базой этого семейства было бы именно *пространство модулей* $\mathbf{B} = \mathcal{M}_{\mathbf{X}}$.

Однако эта мечта (за исключением тривиальных случаев вроде одноточечного $\mathbf{X}$, на которые мы не будем тратить время) недостижима. В оставшихся лекциях мы не только объясним, почему это так, но и расскажем, насколько близко к мечте об универсальном семействе можно подойти.

Начнём с языковых тонкостей. Отбросить приставку *уни-* предложил, видимо, В.И. Арнольд – см. [Арн1972]. Ослабленная мечта – построения семейств, содержащих все требуемые слои без условия единственности – во многих случаях оказывается достижимой. Например, *версальные* деформации кривых родов ≤ 10 итальянские математики умели строить ещё в начале XX-го века, см. [Severi1915].

Следующая языковая тонкость возникает при предъявлении *конечноверсальных* семейств. Так, семейство эллиптических кривых, заданных уравнением в аффинной форме

$$y^2 = x(x-1)(x-t)$$

при $t \in \mathbf{B} \subset \mathbf{A}_1(\mathbb{k})$ и $\text{char}(\mathbb{k}) \notin \{2, 3\}$, *гексаверсально* – читателю предлагается убедиться в этом в задаче **3.9**.

Аналогичным образом, семейство кривых рода 2, заданных уравнением в аффинной форме

$$y^2 = x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$$

при $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbf{B} \subset \mathbf{A}_3(\mathbb{k})$ и $\text{char}(\mathbb{k}) \notin \{2, 3\}$, обладает свойством, которое мы назовём *720-версальностью*, и знания латыни современным человеком недостаточно для того, чтобы выразить это свойство одним словом. Разобраться с этим семейством читателю предлагается в задаче **3.10**.

Возникает вопрос: а нельзя ли отождествить изоморфные слои в конечноверсальных семействах, чтобы получить универсальные? Отрицательный ответ вместе с объяснением будет дан в скором времени, а сейчас расскажем о наилучшем возможном приближении к этой недостижимой цели.

Читатель, одолевший задачу **3.9**, заметит, что функция

$$j(t) := 256 \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}$$

именно отождествляет слои семейства $y^2 = x(x-1)(x-t)$, то есть (в обозначениях этой задачи)

$$[\mathcal{E}_t \simeq \mathcal{E}_{t'}] \iff [j(t) = j(t')]$$

Так возникает *j-инвариант*, являющийся функцией на пространстве модулей $\mathcal{M}_1(\mathbb{k})$ и, более того, устанавливающий изоморфизм

$$j : \mathcal{M}_1(\mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_1(\mathbb{k}).$$

Над так называемой *j-прямой* действительно существует ПОЧТИ универсальное семейство

$$y^2 = x^3 - \frac{27j - 1728}{4j}$$

(см. [Мамфорд1969]; напомним, что $\text{char}(\mathbb{k}) \notin \{2, 3\}$). Среди его слоёв однократно встречаются все эллиптические кривые, кроме *трёхчленных*

$$y^2 = x^3 - x \text{ и } y^2 = x^3 - 1$$

с *j*-инвариантами $1728 = 12^3$ и 0 ; эти же кривые выделяются как имеющие нетривиальные автоморфизмы

$$(x, y) \mapsto (-x, \sqrt{y}) \text{ и } (x, y) \mapsto (\rho x, y), \text{ где } \sqrt[3]{1} = \langle \rho \rangle.$$

Эта конструкция – аналог почти универсального семейства $\mathcal{U}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$ при $g \geq 3$, в которой слоем над точкой $[\mathbf{X}] \in \mathcal{M}_g$ является кривая $\frac{\mathbf{X}}{\text{Aut}(\mathbf{X})}$; следует учесть, что группа автоморфизмов *общей* кривой рода ≥ 3 тривиальна.

Мы ещё вернёмся к этому семейству.

3.1.2. Кофунктор семейств. Поскольку обозначения, связанные с пространствами модулей, общеприняты лишь для случая кривых фиксированного рода, мы и определим этот функтор только для кривых, имея, однако, в виду, что определяемые конструкции имеют смысл для многообразий любой размерности с фиксированными дискретными инвариантами.

Рассмотрим категорию $\text{CURVE}_g(\mathbf{B})$ семейств кривых рода $g \geq 1$ над фиксированной базой $\mathbf{B}$. Морфизмы в ней, разумеется, определяются с помощью коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X}' \\ \pi \searrow & & \nearrow \pi' \\ & \mathbf{B} & \end{array}$$

Через $\text{CURVE}_g(\mathbf{B})$ обозначим множество классов изоморфизмов объектов категории $\text{CURVE}_g(\mathbf{B})$ (немного подумав, можно понять, почему это множество существует).

На категории $\text{CURVE}_g(\mathbf{B})$ определена *замена базы*: если $(\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathbf{B}) \in \text{CURVE}_g(\mathbf{B})$ и $\mathbf{B}' \xrightarrow{\beta} \mathbf{B}$ – произвольный морфизм, то определено *расслоённое произведение*

$$\mathbf{B}' \times_{\mathbf{B}} \mathcal{X} := \{(B', X) \in \mathbf{B}' \times \mathcal{X} \mid \pi'(B') = \pi(X)\},$$

снабжённое проекцией $\mathbf{B}' \times_{\mathbf{B}} \mathcal{X} : (B', X) \in \mathbf{B}' \mapsto (\pi'(B') = \pi(X))$, превращающее это расслоённое произведение в семейство кривых рода g . Иначе полученное семейство называют *индуцированным* с помощью морфизма β .

Мы не вводили для категории баз специального обозначения, подразумевая,

что это — подходящая *подкатегория* схем над $\mathbb{k}$. Не будем вводить полноценного обозначения и сейчас (когда оно нужно), ограничиваясь лапидарным $\{\{\mathbf{B}\}\}$.

Мы по существу уже определили кофунктор

$$\mathbf{fam}_g : \{\{\mathbf{B}\}\} \longrightarrow \mathcal{SET} : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{CURVE}_g(\mathbf{B});$$

он и называется *кофунктором семейств*. Его действие на морфизмах, разумеется, определяется операцией индуцирования.

В работе [Мамфорд1969] автор формулирует и защищает точку зрения, согласно которой всевозможные семейства кривых рода g образуют более фундаментальный предмет (слово *объект* занято...), чем пространство модулей. Мамфорд весьма убедительно подтверждает эту точку зрения красивыми и глубокими вычислениями; принять её побуждает и тот факт, что Мамфорд — один из сильнейших геометров XX-го века, внесший, в частности, огромный вклад в теорию пространств модулей кривых.

Правда, для того, чтобы встать на позиции, предлагаемые Мамфордом, надо покинуть канторовский теоретико-множественный рай и перебраться в мир этальных топологий Гротендика...

3.1.3. О представимости функторов в алгебраической геометрии. Мы ввели кофунктор семейств довольно формально; однако к его содержательному обсуждению мы не раз будем возвращаться в последующих лекциях.

Это — уже второй (ко)функтор из алгебро-геометрической категории в категорию множеств. Предыдущий класс функторов, функторы точек, мы обсуждали как возможных кандидатов на главные действующие лица в алгебраической геометрии; тогда же мы подчёркивали *представимость* этих функторов.

Но кофунктор семейств непредставим! Мы обсудим причины этого в следующей лекции. Можно рассматривать этот факт как печальное явление, разрушающие некоторые наивные надежды на достаточно простые классификационные результаты в алгебраической геометрии. А можно расценить его оптимистически, как расширение классов алгебро-геометрических объектов, подлежащих классификации — с точек зрения лишь намечающейся пока математики будущего!

Задачи

3.1. Произведите классификацию *гладких аффинных коник* над алгебраически замкнутыми полями, компактифицировав их.

3.2. Произведите классификацию *гладких аффинных квадрик* над алгебраически замкнутыми полями, компактифицировав их.

3.3. Докажите, что, если $\mathbb{k}$ — алгебраически замкнутое поле и два однородных многочлена $F_1, F_2 \in \mathbb{k}[x_0 : \dots : x_n]$ задают одну и ту же гиперповерхность в $\mathbf{P}_n(\mathbb{k})$, то эти многочлены пропорциональны. Верно ли это утверждение без предположения об алгебраической замкнутости? Если нет, то укажите, где вы её использовали в вашем

доказательстве.

3.4. Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраически замкнутое поле и даны три многочлена $F, G_1, G_2 \in \mathbb{k}[t : x : y : z]$. Что можно сказать об этих многочленах, если кривые, определяемые системами уравнений $[F = 0] \wedge [G_1 = 0]$ и $[F = 0] \wedge [G_2 = 0]$, совпадают?

3.5. Изоморфны ли кривые $y^2 = x^3 + i$ и $y^2 = x^3 - i$ над основным полем $\mathbb{C}$? Если да, то осуществляется ли изоморфизм отображением $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$? Если не осуществляется, найдите изоморфизм, определённый над $\mathbb{C}$.

3.6. Докажите, что гладкие плоские кватрики изоморфны тогда и только тогда, когда проективно эквивалентны.

3.7. При каких $n \in \mathbb{N}$ проективное замыкание аффинной кривой, заданной уравнением $y^2 = 1 - x^n$, гладко?

3.8. Опишите множество параметров $(a, b) \in \mathbb{k} \times \mathbb{k}$, при которых кривая, заданная в однородных координатах $(x : y : z)$ уравнением $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$, гладка.

3.9. Опишите множество параметров $t \in \mathbb{k}$, при которых кривая $\mathcal{E}_t$, заданная в однородных координатах $(x : y : z)$ уравнением $y^2z = x(x - t)(x - tz)$, гладка. В каких случаях $\mathcal{E}_t \simeq \mathcal{E}_{t'}$?

3.10. Опишите множество параметров $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbf{B} \subset \mathbf{A}_3(\mathbb{k})$, при которых кривая $\mathbf{X}_{t_1, t_2, t_3}$, заданная в однородных координатах $(x : y : z)$ уравнением

$$y^2z = x(x - t)(x - t_1z)(x - t_2z)(x - t_3z),$$

гладка. В каких случаях $\mathbf{X}_{t_1, t_2, t_3} \simeq \mathbf{X}_{t'_1, t'_2, t'_3}$?

3.11. Пусть $\mathbf{B}$ – полное многообразие. Докажите, что все семейства кривых над $\mathbf{B}$ родов 1 и 2 тривиальны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Coolidge1934] J. L. Coolidge, *The Rise and Fall of Projective Geometry*. The American Mathematical Monthly Vol. 41, No. 4 (Apr., 1934), pp. 217–228.
- [CossartPiltant2009] Vincent Cossart, Olivier Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings*, Journal of Algebra, 320 (3): 1051–1082. II. Journal of Algebra, 321 (7): 1836–1976.
- [Eisenbud1995] David Eisenbud, *Commutative algebra*. Graduate Texts in Mathematics, **150**, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1995.
- [Hauser2003] Herwig Hauser, *The Hironaka theorem on resolution of singularities (or: A proof we always wanted to understand)*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 40 (3): 323–403.
- [Hironaka1964] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II*. Ann. of Math. , 79 (1964) pp. 109–326.
- [Lipman1969] Joseph Lipman, *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*. Publications mathématiques de l’I.H.É.S., tome 36 (1969), p. 195–279.
- [Schroeer1999] Stefan Schroeer, *On non-projective normal surfaces*. arXiv:math/9911004v1 [math.AG].
- [SempleRoth1985] J.G. Semple and L. Roth, *Introduction to Algebraic Geometry*. Oxford University Press, 1985.
- [Severi1915] F. Severi, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di esistenza di Riemann*. Rend. Accademia Naz. Lincei (5) 241 (1915), 877– 888, 1011–1020.

- [Арн1972] В. И. Арнольд, *Лекции о бифуркациях и версальных семействах*. УМН, 27:5(167) (1972), 119–184.
- [Мамфорд1969] Д. Мамфорд, *Проблемы модулей и их группы Пикара*. Математика (сб. перев.), 13:2 (1969), 26–63.
- [Шаф2018] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*. МЦНМО, 2018.