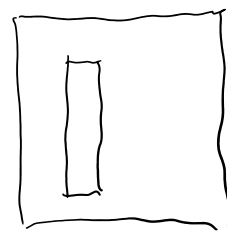


$$Q_d = [0, 1]^d, \quad d \geq 2 \quad (d \rightarrow \infty)$$

$$\mathcal{R}_d = \left\{ \prod_{i=1}^d I_i \mid I_i = [a_i, b_i) \subset [0, 1] \right\}$$



Задача 1 но $\varepsilon \in (0, 1)$, $d \geq 2$

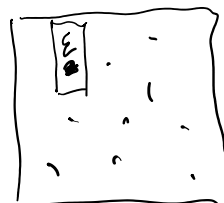
найти минимальное n

такое что $\exists P_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset Q_d$

$\forall B \in \mathcal{R}_d$ с $|B| = \text{vol}(B) \geq \varepsilon$

$B \cap P_n \neq \emptyset$. Такое n

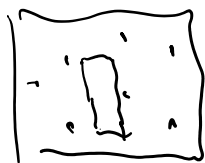
обозначим $N(\varepsilon, d)$.



Задача 2 но $n, d \in \mathbb{N}$ найти max.

ε т.ч. $\forall P_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset Q_d$

$\exists B \subset \mathcal{R}_d$ с $|B| \geq \varepsilon$ т.ч. $B \cap P_n = \emptyset$



Такое ε называется дисперсией

Формально: Для $P \subset Q_d$

$$\text{disp}(P) = \sup \{ |B| \mid B \in \mathcal{R}_d, B \cap P \neq \emptyset \}$$

$$\text{disp}^*(n, d) = \inf_{|P|=n} \text{disp}(P)$$

$$N(\varepsilon, d) = \min \{ n \mid \text{disp}^*(n, d) \leq \varepsilon \}$$

Асимптотика $N(\varepsilon, d)$, $\varepsilon \rightarrow 0, d \rightarrow \infty$

Оценки сверху

Rote - Tichy 96

$$N(\varepsilon, d) \leq \frac{2^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} p_i}{\varepsilon}$$

Lauchner 17

$$n \leq 11, \quad 2^{7d+1}$$

Lauchner 17

$$N(\varepsilon, d) \leq \frac{c}{\varepsilon} 2^{7d+1}$$

Bukh - Chao (20+)

$$\frac{c d^2 \ln d}{\varepsilon}$$

Оценки снизу

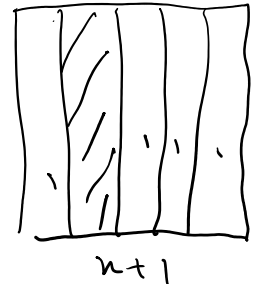
$$\text{disp}^*(n, d) \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow N(\varepsilon, d) \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Dimitrescu - Jiang (13)

$$\underline{N(\varepsilon, d)} \geq \frac{5}{4\varepsilon} - 5$$

$$\rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N(\varepsilon, d) = d$$



Aistleitner - Hinrich - Rudolf (17)

$$N(\varepsilon, d) \geq (1 - 4\varepsilon) \frac{\log_2 d}{4\varepsilon}$$

Таким образом для $\varepsilon < 1/8$

$$\frac{\log_2 d}{8\varepsilon} \leq N(\varepsilon, d) \leq \frac{c d^2 \ln d}{\varepsilon}$$

Для фиксированного d : $N(\varepsilon, d) \propto \frac{cd}{\varepsilon}$

Blum - Ehrenfeucht - Haussler - Mermel (89)

$$N(\varepsilon, d) \leq \frac{cd}{\varepsilon} \ln \frac{c}{\varepsilon}$$

(используя $\text{VC-dim}(\mathcal{R}_d) = 2d$)

Rudolf $N(\varepsilon, d) \leq \frac{cd}{\varepsilon} \ln \frac{c}{\varepsilon}$

→ простое доказательство для случайных точек равномерно распр. на кубе.

Оценка Rudolf лучше для $\varepsilon \geq \frac{1}{d^{cd}}$

Гипотеза $N(\varepsilon, d) \approx d/\varepsilon$ ← (Buch-Chao)

Sosnovets (18)

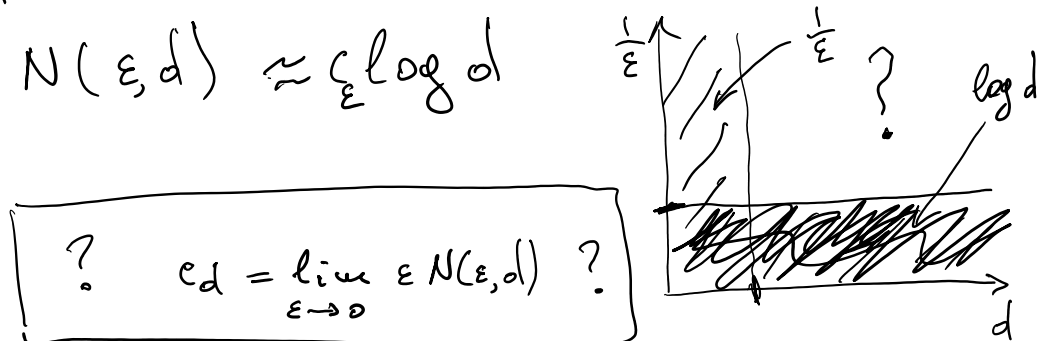
$N(\varepsilon, d) \leq C_\varepsilon \log d$ (*)

для фикс. ε

$N(\varepsilon, d) \approx C_\varepsilon \log d$

для $\varepsilon \leq \frac{1}{(4d)^d}$

$N(\varepsilon, d) \geq d/\varepsilon$



Зависимость по ε (*) $C_\varepsilon \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\varepsilon^2}$

M. Ullrich, Vybiral (18)

Гипотеза $N(\varepsilon, d) \approx \frac{\ln d}{\varepsilon}$ (**)

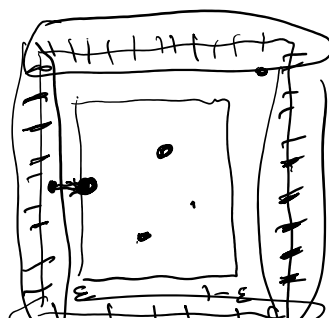
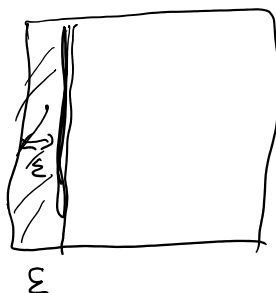
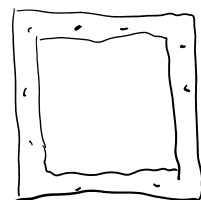
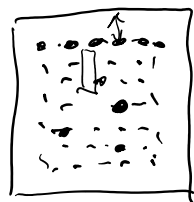
(**) лучше для $\varepsilon \geq \frac{(\ln d)^2}{d}$

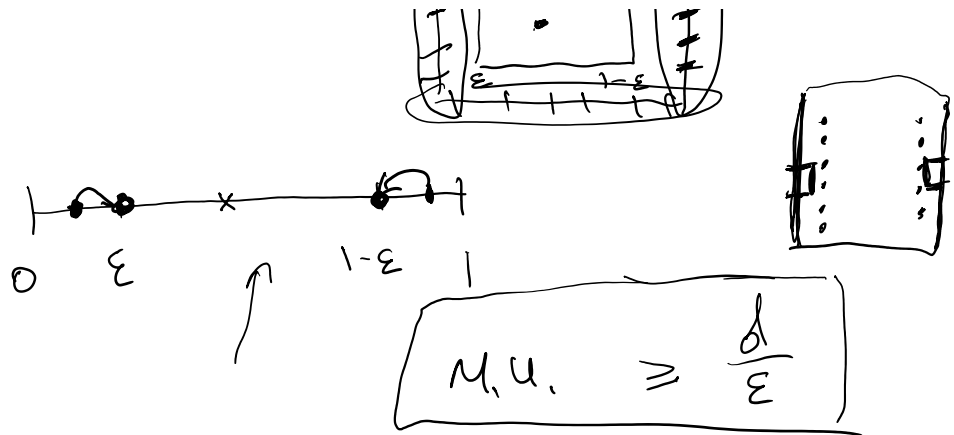
То же используется

случайные точки

но на решётке.

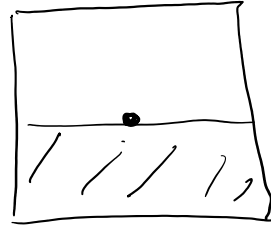
$$\left(Q_n \frac{\mathbb{Z}^d}{M} \right)$$





Большие ϵ

(a) $\epsilon \geq \frac{1}{2}$
 $N(\epsilon, d) = 1$



(b) $\frac{1}{4} < \epsilon \leq \frac{1}{2}$

5. $N \leq 1 + \left\lfloor \frac{1}{\epsilon - 1/4} \right\rfloor$

(Ометим $\frac{x}{d} \rightarrow \infty$, гл. $\epsilon < 1/4$
 $N(\epsilon, d) \geq c \ln d$)

(c) Масштаб $N \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon - 1/4}}$

Задача $N(\frac{1}{4}, d) = ?$ $N(\epsilon, d) = ?$
 $\epsilon \rightarrow (\frac{1}{4})^\pm$

Th ① $N(\epsilon, d) \leq \frac{c \ln d}{\epsilon} \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)$, $\frac{1}{\epsilon} \geq e^d$

② $N(\epsilon, d) \leq \frac{c d}{\epsilon} \ln \ln \frac{1}{\epsilon}$, $\frac{1}{\epsilon} \leq e^d$

Случайный выбор точек не кубе работает.

работает.

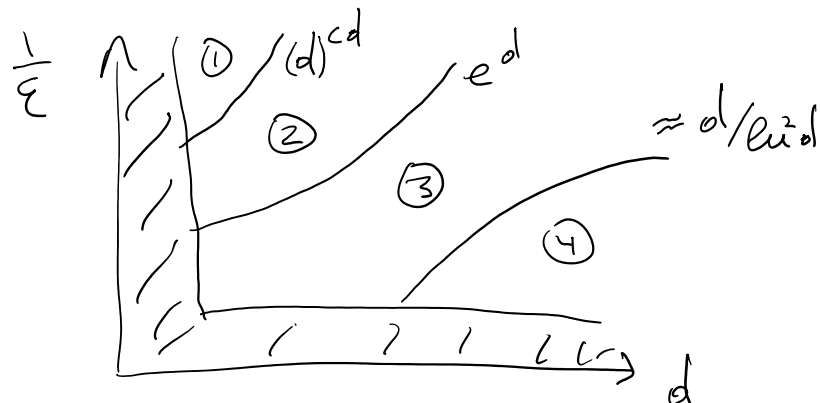
$\ln \frac{1}{\varepsilon}$

Замечание Hinrichs - Krieg - Kunsch - Rudolf (20)

$$N_{\text{can}}(\varepsilon, d) \geq \max \left\{ \frac{c}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \frac{d}{2\varepsilon} \right\}$$

$$\frac{1}{4} > \varepsilon \geq \frac{\ln d}{d} \quad N \leq \frac{\ln d}{\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$N(\varepsilon, d) = \min \left\{ n \mid \exists P_n = \{x_1, \dots, x_n\} \right. \\ \left. \forall B \subset \mathbb{R}_d \quad |B| \geq \varepsilon \Rightarrow \exists x_i \in B \right\}$$



$$N(\varepsilon, d) = \min \left\{ n \mid \exists P_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset Q_d = [0, 1]^d \right. \\ \left. \forall B \in \mathcal{R}_d, |B| \geq \varepsilon : B \cap P_n \neq \emptyset \right\}$$

уже доказ.

$$\mathcal{B}_{d, \varepsilon} = \left\{ B \mid B \in \mathcal{R}_d, |B| \geq \varepsilon \right\}.$$

Выберем n случ. точек x_i на кубе.

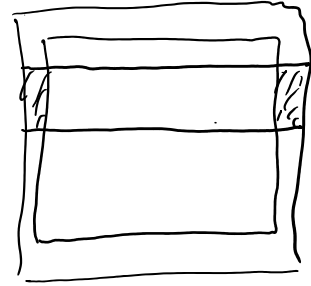
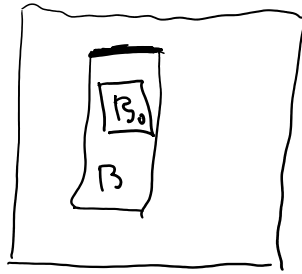
Хотим $\forall B \in \mathcal{B}_{d, \varepsilon} \quad \exists x_i \in B$

Построим "сеть" $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_d$ т.ч.

Построим "сеть" $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ т.ч.

$$\boxed{\forall \underline{B} \in \mathcal{N} \quad \exists x_i \in B \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}_{d\varepsilon} \quad \exists x_i \in B}$$

$$\forall B \in \mathcal{B}_{d\varepsilon} \quad \exists B_0 \in \mathcal{N} : \underline{B_0} \subset B$$



Опр $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ — δ -сеть для $\mathcal{B}_{d\varepsilon}$
если $\forall B \in \mathcal{B}_{d\varepsilon} \quad \exists B_0 \in \mathcal{N} : B_0 \subset B$
и $|B_0| \geq (1-\delta)\varepsilon$.

Лемма (Rudolf) Пусть $\mathcal{N}$ — δ -сеть,

$|\mathcal{N}| \geq 3$, Тогда с вер. $\geq 1 - 3/|\mathcal{N}|$

$$\boxed{N = \frac{3 \ln |\mathcal{N}|}{(1-\delta)\varepsilon}}$$

точек работают.

Доказ. Пусть $B \in \mathcal{N}$, $x_1, \dots, x_N$ — сл. точки

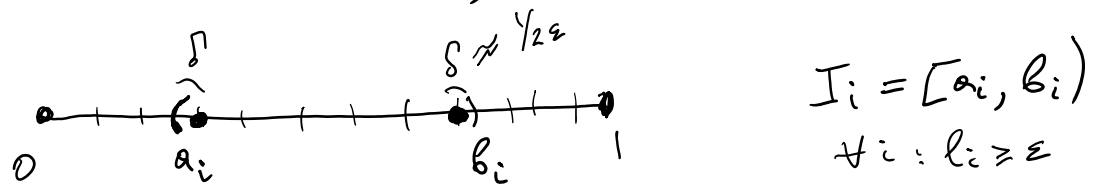
$$P(\forall j : x_j \notin B) = (1-\nu)^N, \quad \nu = (1-\delta)\varepsilon$$

$$\Rightarrow P(\exists B \in \mathcal{N} : \forall j : x_j \in B) \leq |\mathcal{N}| e^{-\nu N} < 1.$$

Как строить сеть?

$$B = \prod_{i=1}^d [t_i, t_i + \varepsilon] \quad p_i = |T_i| \quad \prod p_i \geq \varepsilon$$

$$B = \prod_{i=1}^d I_i \in \mathcal{B}_{\varepsilon d}, \quad l_i = |I_i|, \quad \prod_{i=1}^d l_i \geq \varepsilon \dots (*)$$



Можно взять δ -сеть в каждом $[0, 1]$, аппрокс. a_i, b_i по сети, получить $I_i' \subset I_i$ и взять $B_0 = \prod_{i=1}^d I_i'$

Проблема размер $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$ — слишком большой

Идея брать разные δ .

Использовать

$$\prod_{i=1}^d l_i \geq \varepsilon$$

Допустим

$$l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots \leq l_d$$

Тогда $\underline{l_j} \geq \left(\prod_{i=1}^j l_i\right)^{1/j} \geq \varepsilon^{1/j} \geq 1 - \frac{l_1^{1/\varepsilon}}{j}$

Чем больше j тем больший δ мы можем брать.

Хотелось бы $\delta_j \approx \frac{l_1^{1/\varepsilon}}{j}$

Проблема $\rightarrow$ появится множитель

$$d! \approx \left(\frac{e}{e}\right)^d$$

Идея

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \dots 8 \quad 2^{j-1}+1 \dots 2^j \quad 2^{k-1}+1 \dots 2^k$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underbrace{1 \ 2}_{A_1} & \underbrace{3 \ 4}_{A_2} & \underbrace{5 \dots 8}_{A_3} & \dots & \underbrace{2^{j-1}+1 \dots 2^j}_{A_j} & \dots & \underbrace{2^{k-1}+1 \dots 2^k}_{A_k} \\
 \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & & \delta_j \approx \frac{\varepsilon 2^{k-j}}{8d} & & \boxed{2^k = d}
 \end{array}$$

Мощность сети

$$\approx \prod_{j=1}^k \prod_{i \in A_j} \frac{2}{\delta_j^2} \leq \dots \leq \frac{2^d (d^2)^{2d}}{\sum 2 \ln(2d)}$$

Перестановки

$$\binom{2^k}{2^{k-1}} \binom{2^{k-1}}{2^{k-2}} \dots \leq 2^{2d}$$

Мощность $\longrightarrow$

$$\left| \exp \left(c \ln d \left(\underline{d} + \underline{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \right) \right) \right|$$

Потеря объема

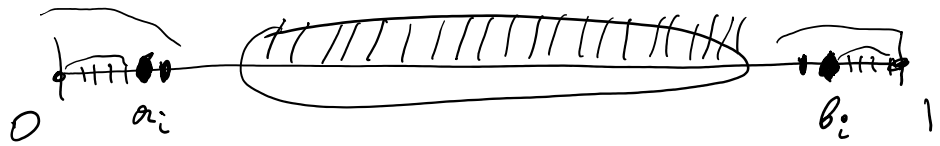
$$|B_0| \geq \prod_{j=1}^k \prod_{i \in A_j} (l_i - 2\delta_j) \geq \dots \geq \frac{|B|}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Дает оценку где $\ln \frac{1}{\varepsilon} \geq d$.

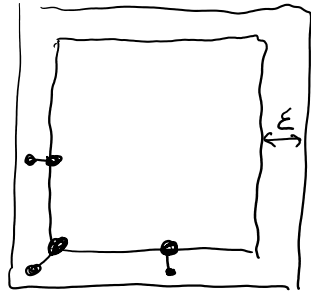
Если $\underline{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq d$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underbrace{1 \ 2}_{\delta_1} & \underbrace{3 \ 4}_{\delta_2} & \dots & \underbrace{2^{m-1}+1 \dots 2^m}_{\delta_j} = \ln \frac{1}{\varepsilon} & \underbrace{\quad}_{\delta_0} & \underbrace{\quad}_{\delta_0 \approx \frac{1}{d}} & \underbrace{\quad}_{\delta_0 \approx \frac{1}{d}}
 \end{array}$$

$$\underline{l_{m+j}} \geq 1 - \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2^{m+j}} \geq 1 - \frac{1}{2^j}$$



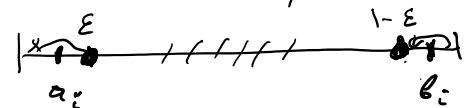
Большее: $\varepsilon \geq \frac{1}{d}$



$$12 \dots 34 \dots \quad 2^{n-1} + \dots + 2^0 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \frac{2^n - 1}{1} \quad \left[\dots \dots \dots d \right]$$

не антропо.

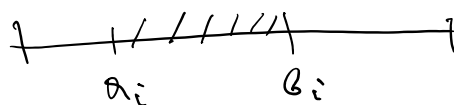
$$B_0 = \prod I_i' \times \prod [0, 1]$$



Дисперсия на торе



$$\tilde{R}_d = \left\{ \prod I_i(a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in [0, 1] \right\}$$



$$I_i(a_i, b_i) = \begin{cases} (a_i, b_i), & a_i < b_i \\ [0, 1] \setminus [b_i, a_i], & a_i \geq b_i \end{cases}$$

M. Ullrich (18), Rudolf (18)

$$\frac{d}{\varepsilon} \leq \tilde{N}(\varepsilon, d) \leq \frac{8d}{\varepsilon} \left(\ln d + \ln \frac{8}{\varepsilon} \right)$$

$$\text{vc-dim}(\mathcal{R}_d) \approx d \ln d$$

Th

$\boxed{\varepsilon \leq \frac{1}{2}}$

① $\tilde{N}(\varepsilon, d) \leq \frac{C \ln d}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \geq e^d$

② $\tilde{N}(\varepsilon, d) \leq \frac{C d \ln d}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \leq e^d$