Изометрии обобщенных пространств интегрируемых с логарифмом функций

Абдуллаев Р.,Мадаминов Б.

25 февраля, 2021

Одним из важных классов Банаховых функциональных пространств являются пространства $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ всех функций заданных на измеримом пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ интегрируемых с p -той степенью относительно конечной меры μ. Изучение изометрий L_p пространства начато Банахом, который описал все изометрии пространств $L_p[0, 1]$, $p \neq 2$. Последние результаты в этом направлении были получены Йедоном.

(F.J. Yeadon Isometries of non-commutative Lp-spaces.Math. Proc.Camb. Phil. Soc. 90 (1981) 41-50),

который полностью описал все изометрии L_p-пространств, построенных по различным мерам.

В работе (K. Dykema, F. Sukochev, D. Zanin, Algebras of log-integrable functions and operators, Journal, Complex Anal. Oper. Theory 10 (8) (2016), 1775-1787)
были введены алгебры интегрируемых с логарифмом функций $L_{log}(\nabla_\mu)$ с $F-$ нормой $\| \ \|_{log,\mu}$.
В работе
(R.Abdullaev, V.Chilin, B.Madaminov. Isometric F-spaces of log-integrable function. Siberian Electronic Mathematical Reports. том 17,стр. 218-226(2020)
введен другой класс интегрируемых с логарифмом функции $L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$, который вообще говоря не являются алгеброй. Все эти пространтва $L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$ изометричны между собой для различных мер как и в случае L_p- пространств. Но $F-$ пространства $L_{log}(\nabla_\mu)$ между собой для различных мер вообще говоря неизометричны.
Нами введен более широкий класс пространств называемых обобщенными пространствами интегрируемых с логарифмом функций. Изучаются алгебраические и метрические свойства этих пространств. Также установлены необходимые и достаточные условия изометричности этих пространств.

Пространства интегрируемые с логарифмом рассматривались в работах -(R.Abdullaev, V.Chilin, B.Madaminov. Isometric F-spaces of log-integrable function. Siberian Electronic Mathematical Reports. том 17,стр. 218-226(2020)

-R.Z. Abdullaev, V.I. Chilin, somorphic Classification of $*$-Algebras of Log-Integrable Measurable Functions.Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 264, 73-83. Springer, Cham.,

-R.Abdullaev, B.Madaminov. Isomorphisms and isometries of F-spaces of log-integrable measurable functions. arXiv:3383988 [math.FA] 24 sep 2020.).

Напомним определение полной однородной булевой алгебра из (D.A. Vladimirov, Boolean Algebras in Analysis. Mathematics and its Applicatio
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).)

Определение 1

Булевой алгеброй называется дистрибутивная структура с неравными друг другу единицей и нулем, в которой всякий элемент имеет дополнение.

Определение 2

Булева алгебра называется полной, если всякое множество элементов имеет верхнюю грань.

Обозначим через $\nabla = \nabla_\mu$ полную, булеву алгебру всех классов эквивалентности [A], где A - класс μ-почти всюду равных множеств из σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть $L_0(\nabla_\mu) = L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ алгебра эквивалентных классов измеримых функции на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Следуя
(K. Dykema, F. Sukochev, D. Zanin, Algebras of log-integrable functions and operators, Journal, Complex Anal. Oper. Theory 10 (8) (2016), 1775-1787.), рассмотрим в $L_0(\nabla_\mu)$ подалгебру

$$L_{\log}(\nabla_\mu) = \{f \in L_0(\nabla_\mu) : \int\limits_\Omega \log(1 + |f|)d\mu < +\infty\}$$

log-интегрируемых измеримых функций, и для каждого $f \in L_{\log}(\nabla_\mu)$ положим

$$\|f\|_{\log} = \int_\Omega \log(1 + |f|)d\mu.$$

Из работы

(K. Dykema, F. Sukochev, D. Zanin, Algebras of log-integrable functions and operators, Journal, Complex Anal. Oper. Theory 10 (8) (2016), 1775-1787. Lemma 2.1)

получем

Утверждение 1

(*i*). $\|f\|_{\log} > 0$ *для всех* $0 \neq f \in L_{\log}(\nabla_\mu)$;
(*ii*). $\|\alpha f\|_{\log} \leq \|f\|_{\log}$ *для любых* $f \in L_{\log}(\nabla_\mu)$ *и действительных чисел* α , $|\alpha| \leq 1$;
(*iii*). $\lim_{\alpha\to 0} \|\alpha f\|_{\log} = 0$ *для всех* $f \in L_{\log}(\nabla_\mu)$;
(*iv*). $\|f+g\|_{\log} \leq \|f\|_{\log} + \|g\|_{\log}$ *для всех* $f, g \in L_{\log}(\nabla_\mu)$;
(*v*). $\|fg\|_{log} \leq \|f\|_{log} + \|g\|_{log}$ *для всех* $f, g \in L_{\log}(\nabla_\mu)$.

Определение 3

F-нормой на линейном пространстве L называется положительный функционал $\|\cdot\| : L \to R$ удовлетвояющий следующим условиям.
1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \forall x \in L$;
2. $\|\lambda x\| = \|x\|, \quad \forall x \in L, \ \ \lambda \in R, \ \ \lambda \leq 1$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in L$;

Из свойств (i),(ii) и (iv) следует, что функция $\|\cdot\|_{\mathrm{log}} : L_{\mathrm{log}}(\nabla_\mu) \to [0, \infty)$ является F-нормой, а из свойства (v) следует, что $L_{log}(\nabla_\mu)$ замкнуто относительно операции умноженния.

Определение 4

F-пространство это линейное пространство в котором введена F-норма относительно которой это пространство полно.

Из (K. Dykema, F. Sukochev, D. Zanin, Algebras of log-integrable functions and operators, Journal, Complex Anal. Oper. Theory 10 (8) (2016), 1775-1787. Proposition 2.4), слуедует

Предложение 1

Пространство $L_{log}(\nabla_\mu)$ полно относительно F-нормы $\|\cdot\|_{log,\mu}$.

Отсюда получаем пространство $L_{log}(\nabla_\mu)$- является F-пространством относительно F-норма $\|\cdot\|_{log,\mu}$.

Пусть X-произвольная полная булева алгебра и $e \in X, X_e = \{g \in X : g \leq e\}$. Через $\tau(X_e)$, обозначим минимальную мощность множества, плотного в X_e в (o)-топологии.(D.A. Vladimirov, Boolean Algebras in Analysis. Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).)

Определение 5

Бесконечная полная булева алгебра X называется однородной, если $\tau(X_e) = \tau(X_g)$ для любых не равных нулю $e, g \in X$.

Следующая теорема доказана в работе.
(R.Abdullaev, V.Chilin, B.Madaminov. Isometric F-spaces of log-integrable function. Siberian Electronic Mathematical Reports. том 17,стр. 218-226(2020)

Теорема 1

Пусть ∇_μ полная однородная булева алгебра. Тогда F-пространства $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{\log}(\nabla_\nu)$ изометричны тогда и только тогда, когда $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$.

Пусть μ и ν две эквивалентные конечные меры на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ и $0 \leq \frac{d\nu}{d\mu} = h$ - производная Радона - Никодима, меры ν относительно меры μ т.е. $\nu(x) = \mu(hx)$. Ясно, что

$$L_{\log}(\nabla_\nu) = \{f \in L_0(\nabla) : \int\limits_\Omega \log(1 + |f|) d\nu < +\infty\} =$$

$$= \{f \in L_0(\nabla) : \int\limits_\Omega h \cdot \log(1 + |f|) d\mu < +\infty\} = L_{\log}^\nu(\nabla_\mu)$$

и

$$\|f\|_{log,\nu} = \int\limits_\Omega log(1 + |f|) d\nu = \int\limits_\Omega h(log(1 + |f|)) d\mu = \|f\|_{log,\mu}^\nu$$

F-норма на пространстве $L_{log}^\nu(\nabla_\mu)$. Вместо меры μ может быть любая другая мера.

Рассмотрим также следующий аналог алгебр $L_{log}(\nabla_\mu)$ log-интегрируемых измеримых функций

$$L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu) = \{f \in L_0(\nabla) : \int\limits_\Omega \log(1 + h|f|)d\mu < +\infty\}$$

и пусть $\|f\|^{(\nu)}_{log,\mu} = \int\limits_\Omega \log(1 + h|f|)d\mu$.

Утверждение 2

Функция $\|f\|^{(\nu)}_{log,\mu}$ удовлетворяет следующим условиям:

(i). $\|f\|^{(\nu)}_{log,\mu} > 0$ для всех $0 \neq f \in L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$;

(ii). $\|\alpha f\|^{(\nu)}_{log,\mu} \leq \|f\|^{(\nu)}_{log,\mu}$ для всех $f \in L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$ и действительных чисел α , $|\alpha| \leq 1$;

(iii). $\lim_{\alpha\to 0} \|\alpha f\|^{(\nu)}_{log,\mu} = 0$ для всех $f \in L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$;

(iv). $\|f + g\|^{(\nu)}_{log,\mu} \leq \|f\|^{(\nu)}_{log,\mu} + \|g\|^{(\nu)}_{log,\mu}$ для всех $f, g \in L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$.

Из свойств (i),(ii) и (iv) следует, что функция $\|\cdot\|^{(\nu)}_{\log,\mu}$ является F-нормой на $L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$

Предложение 2

Пространство $L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$ *полно относительно* F*-нормой* $\|\cdot\|^{(\nu)}_{\log,\mu}$.

Отсюда следует $L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$ является F-пространством.
Напомним, что

$$L_p(\nabla_\mu) = \{f \in L_0(\nabla) : \int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty\}, \ \|f\|_{p,\mu} = (\int\limits_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

$$L_p(\nabla_\nu) = \{f \in L_0(\nabla) : \int\limits_\Omega |f|^p \, d\nu = \int\limits_\Omega h|f|^p \, d\mu < +\infty\},$$

$$\|f\|_{p,\nu} = (\int\limits_\Omega |f|^p) d\nu)^{\frac{1}{p}} = (\int\limits_\Omega h|f|^p) d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Поэтому, в случае эквивалентных мер μ и ν, отображение $U : L_p(\nabla_\mu) \to L_p(\nabla_\nu)$, определяемое равенством $U(f) = h^{-1}f, \ f \in L_p(\nabla_\mu)$, есть линейная сюръективная изометрия из $L_p(\nabla_\mu)$ на $L_p(\nabla_\nu)$.

Аналогично для пространств $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$ имеем.

Теорема 2

Для эквивалентных и неравных μ и ν пространства $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$ изометричны.

Действвийтельно, для эквивалентных мер μ и ν отображение $U : L_{log}(\nabla_\mu) \to L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$ определяемое равенством $U(f) = h^{-1}f$, $f \in L_{log}(\nabla_\mu)$ есть линейная сюръективная изометрия из $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$.

Из теоремы 2 следует, что для любой меры m на ∇, $L_{log}^{(m)}(\nabla_\mu)$ изометрично $L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$.

Замечание 1

Как видно из теоремы 1 пространства $L_{log}(\nabla_\mu)$ *и* $L_{log}(\nabla_\nu) = L^\nu_{log}(\nabla_\mu)$ *вообще говоря не изометричны в случае* $\mu(\Omega) \neq \nu(\Omega)$.

Определение 6

Назовем $L^\nu_{log}(\nabla_\mu)$ *внешними* $log-$ *алгебрами и* $L^{(\nu)}_{log}(\nabla_\mu)$ *внутренними* $log-$ *пространствами.*

Пространство $L^{(\nu)}_{log}(\nabla_\mu)$ вообще говоря не является алгеброй. (R.Abdullaev, B.Madaminov. Isomorphisms and isometries of f-spaces of log-integrable measurable functions. arXiv:3383988 [math.FA] 24 sep 2020.)

Теорема 3

$L_{\log}(\nabla_\mu) = L_{\log}(\nabla_\nu)$ *тогда и только тогда, когда* h, $h^{-1} \in L_\infty(\nabla)$.

(R.Abdullaev, B.Madaminov. Критерий изоморфности интегрируемых алгебр, Узб. Мат. Журнал.1 (2017) стр.3-9.)

$L_{\log}(\nabla_\mu)$ и $L_{\log}(\nabla_\nu)$ могут совпадать, но при этом не будут изометричными. Например при $h = 2$ имеем h, $h^{-1} \in L_\infty(\nabla)$, т.е. из теоремы 3 следует, что $L_{\log}(\nabla_\mu)$=$L_{\log}(\nabla_\nu)$. Но из равенства $\mu(\Omega) = 2\nu(\Omega)$ и теоремы 1 следует, что они не изометичны.

Теорема 4

$L^{(\nu)}_{\log}(\nabla_\mu)$ *алгебра тогда и только тогда, когда* $h^{-1} \in L_{\log}(\nabla_\mu)$.

(R.Abdullaev, B.Madaminov. Isomorphisms and isometries of F-spaces of log-integrable measurable functions. arXiv:3383988 [math.FA] 24 sep 2020.)

Обозначим через M множество всех мер на ∇. В следующей таблице показаны основные алгебраические и метрические свойства классических L_p пространств, внутрених $log-$ алгебр и внешних $log-$ пространств.

$L_p(\nabla_\mu)$	Пространство	Изометричны для $\forall \mu,\nu \in M$
$L_{log}(\nabla_\mu)$	Алгебра	Изометричны для $\forall \mu,\nu \in M \iff \mu(\Omega) = \nu(\Omega)$
$L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$	Пространство (алгебра $\iff \frac{d\mu}{d\nu} \in L_{log}(\nabla_\mu)$)	Изометричны для $\forall \mu,\nu \in M$

Определение 7

Пространства

$$L_{\log}^{\nu(\mu)}(\nabla_m) = \{f \in L_0(\nabla_m) : \int\limits_{\Omega} \frac{d\nu}{dm} \log(1 + \frac{d\mu}{dm}|f|)dm < \infty\},$$

назовем обобщенными $log-$ пространствами. Далее будет считать, что m фиксирована.

Из утверждений 1 и 2 следует, что функция

$$\|f\|_{log,\mu}^{\nu(\mu)} = \int\limits_{\Omega} \frac{d\nu}{dm} \log(1 + \frac{d\mu}{dm}|f|)dm$$

является F-нормой на $L_{\log}^{\nu(\mu)}(\nabla_m)$. В случае $\frac{d\nu}{dm} = 1$ получаем внутреннее $log-$ пространство $L_{log}^{(\nu)}(\nabla_\mu)$, а в случае $\frac{d\mu}{dm} = 1$ получаем внешнюю $log-$ алгебру $L_{log}^{\nu}(\nabla_m)$.

Зафиксируем меру μ и обозначим её через μ_0. Рассмотрим класс пространств $L_{log}^{\nu(\mu_0)}$, для которых $\nu(\Omega) = k, \quad k \in R^+$ и обозначим этот класс через $L_{log}^{\nu\mu_0}$. Тогда в силу теорем 1 имеем.

Утверждение 3

Все пространства класса $L_{log}^{\nu\mu_0}$ попарно изометричные.

Из теорем 1, 2 и утверждения 3 получаем соответственно пункты (i), (ii),(iii) следующей теоремы.

Теорема 5

(i) Пространства $L_{log}^{\nu\mu}$ для различных ν и фиксированном μ могут быть не изометричными;
(ii) Пространства $L_{log}^{\nu\mu}$ для различных μ и фиксированном ν изометричны;
(iii) Пространства из класса $L_{log}^{\nu\mu}$ при фиксированном μ изометричны.

Список публикаций докладчика

1. R.Abdullaev, B.Madaminov. Критерий изоморфности интегрируемых алгебр, Узб. Мат. Журнал. (2017) стр.3-9.

2. R.Abdullaev, V.Chilin, B.Madaminov. Isometric F-spaces of log-integrable function. Siberian Electronic Mathematical Reports. том 17,стр. 218-226(2020).(Scopus)

3. R.Abdullaev, B.Madaminov. Isomorphisms and isometries of F-spaces of log-integrable measurable functions. Methods of Functional Analysis and Topology. (Scopus, Сдано в печать)

4. Б.Мадаминов. Некоммутативные пространства Аренса. Тезисы докладов конференции: Проблемы современной топологии и их приложения.Тошкент 5-6 май 2016г, стр.110-111

5. Б.Мадаминов, Кутлимуратов Ш.К. Пространство log- интегрируемых операторов относительно состаяния. Тезисы докладов конференции: Проблемы современной топологии и их приложения.Тошкент 5-6 май 2016г, стр.111-112

6. Р.Абдуллаев, Б.Мадаминов. Условие изоморфности коммутативных алгебр. Тезисы докладов конференции: Проблемы современной топологии и их приложения.Тошкент 11-12 май 2017г, стр.119-120

7. Р.Абдуллаев, Б.Мадаминов. Изометрии log-пространств построенных по различным конечным мерам. Тезисы докладов конференции: Проблемы современной топологии и ее приложения.Тошкент 11-12 сен. 2018г, стр.11-13

8. Р.Абдуллаев, Б.Мадаминов. Критерий Изоморфности log-Алгебр, Ассоциированных Агебрами Фон Неймана Типа I. Международной научно-практической конференнции.Шымкент 19-20 марта. 2019г, стр.9-13

9. R.Abdullaev, V.Chilin, B.Madaminov. Isometric F-spaces of log-integrable function. arXiv:1909.11876v1 [math.FA] 26 sep 2019.

10. Р.Абдуллаев, Б.Мадаминов. Abstracns Of The International Conference Modern Problems Of Geometry And Topology And Their Applications.Тошкент 21-23 nov. 2019г, стр.11-13

11. R.Abdullaev, B.Madaminov. Isomorphisms and isometries of F-spaces of log-integrable measurable functions. arXiv:3383988 [math.FA] 24 sep 2020.

12. Б.Мадаминов, М.Худайбеганова, А.Шагатеава. Изометрии пространств функций интегрируемых с логарифмом.Материалы международной научно практической онлайн-конфренции.Теории функций одного и многих комплексных переменных.Нукус 26-28 ноября. 2020г, стр.11-13

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!