

К 150-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ
Б.Г. ГАЛЕРКИНА
МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА И ЕГО СВЯЗЬ С ДРУГИМИ
МЕТОДАМИ

Сергей Игоревич РЕПИН^{1,2}, Максим Евгеньевич ФРОЛОВ²

¹Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

4 марта 2021 г. Семинар по истории математики (ПОМИ)

Б.Г. Галеркин, 1871–1945, родился в Полоцке
работал в Санкт-Петербурге (Ленинграде) и Москве (1941–45)
член Академии наук СССР
1928 (представлен А.Ф. Иоффе, А.Н. Крыловым, П.П. Лазаревым*), 1935



*Записка об ученых трудах проф. Б.Г. Галеркина. Изв. АН СССР, 7 серия, ОФМН, 1928, № 8-10, с. 616. Характеристика научн. и практ. деятельности. Представление в члены-корр. АН СССР.



В. Ритц, 1878–1909, родился в Швейцарии
работал в Цюрихе и Гёттингене

И.Г. Бубнов, 1872–1919

Морская Академия, Санкт-Петербург (ординарный профессор с 1910 г.)

Петербургский Политехнический институт (ординарный профессор с 1909 г.)

Г.И. Петров, 1812–1987, работал в МГУ

член Академии наук СССР (1953, 1958)



Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM-7), 2016, Finland

Repin S.I. One Hundred Years of the Galerkin Method
Comput. Methods Appl. Math. 2017, 17 (3): 351-357.

Vestnik inzhenerov i tekhnikov, (19):897-908, October 1915

RODS AND PLATES

Series in some questions of elastic equilibrium
of rods and plates

by

B. G. Galerkin

Some questions of elastic equilibrium, both static
and dynamic, of rods and plates leads to differential equations,
predominantly of the second and fourth order. The general

Галеркин Б.Г. Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. Вестник инженеров, 1915, № 19, с. 897-908

Репринт

Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Том I. М.: Издательство АН СССР, 1952.

Generalizing this method, we can arrive at the following. Let us take the curved form of the plate

$$w = \sum A_n \varphi_n(x, y) \quad (1)$$

so that every term φ_n should satisfy the boundary conditions, and then substitute the value w into the equation:

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = f(x, y, w). \quad (2)$$

Thus we obtain:

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \sum A_n \left(\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial y^4} \right) = \Phi(x, y).$$

Multiplying both sides of the equality by $\varphi_n dx dy$ and integrating over the whole area of the plate, we obtain n equations of the type:

- 8 -

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \Sigma A_n \int \int \left(\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial y^4} \right) \varphi_n dx dy =$$

$$= \int \int \Phi(x, y) \varphi_n dx dy, \quad (3)$$

from which we determine coefficients A_n .

In the case of bending or stable form of a rod under compression we can proceed in exactly the same manner.

Библиография в работе

- [3] Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. Часть II. С.-Петербург, 1914.
- [6] Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1909, No 135, p. 1-61 - Reprint Walter de Gruyter, Berlin / New York, 2009
- [7] Тимошенко С.П. Об устойчивости упругих систем. Киев, 1910.

Аппроксимация точного решения при помощи суммы базисных функций с весами — это естественный путь, который был известен еще в конце XIX века.
Ключевой вопрос: **какие веса и формы невязок являются правильными?**

Аппроксимация точного решения при помощи суммы базисных функций с весами — это естественный путь, который был известен еще в конце XIX века.
Ключевой вопрос: **какие веса и формы невязок являются правильными?**

Идея Галеркина:

Уравнение должно умножаться на пробные функции
и при этом
невязка должна пониматься (быть вычислена) в интегральной форме.

Аппроксимация точного решения при помощи суммы базисных функций с весами — это естественный путь, который был известен еще в конце XIX века.
Ключевой вопрос: **какие веса и формы невязок являются правильными?**

Идея Галеркина:

Уравнение должно умножаться на пробные функции
и при этом
невязка должна пониматься (быть вычислена) в интегральной форме.

Это оказался верный путь! Он привел к прорыву в **качественном** и **количественном** анализе уравнений в частных производных.

Метод Галеркина и корректность краевых задач для уравнений в частных производных

Сложная математическая проблема XIX столетия: существование и единственность решения скалярной задачи

$$\Delta u + f = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = u_0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2)$$

Метод Галеркина и корректность краевых задач для уравнений в частных производных

Сложная математическая проблема XIX столетия: существование и единственность решения скалярной задачи

$$\Delta u + f = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = u_0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2)$$

Ответ на этот вопрос был получен только после примерно ста лет исследований, что полностью изменило теорию уравнений в частных производных...

..., и связано с именами выдающихся ученых:

D. Hilbert, H. Poincaré, С.Л. Соболев, R. Courant,
J. Leray, K. Friedrichs, О.А. Ладыженская, И.Г. Петровский,
F. Rellich, L. Swartz, В.И. Кондрашов, P. Lax, L. Hörmander...

и многие другие математики, кто внес свой вклад в развитие концепции
обобщенных или *слабых* решений.

Современная форма краевой задачи

Найти такой элемент $u \in V := H_0^1(\Omega)$ ($u_0 = 0$), что

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\Omega} f w \quad \forall w \in V$$

обобщение идеи Галеркина при помощи использования **бесконечного множества пробных функций**, **плотного в подходящем функциональном пространстве**.
Сходимость галеркинских аппроксимаций к обобщенному решению была доказана
С.Г. Михлиным 1948

Современная форма краевой задачи

Найти такой элемент $u \in V := H_0^1(\Omega)$ ($u_0 = 0$), что

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\Omega} f w \quad \forall w \in V$$

обобщение идеи Галеркина при помощи использования **бесконечного множества пробных функций**, **плотного в подходящем функциональном пространстве**.
Сходимость галеркинских аппроксимаций к обобщенному решению была доказана **С.Г. Михлиным** 1948

Аргументы, подобные тем, что предложил Галеркин, позднее часто использовались при анализе слабых решений различных задач математической физики.

Метод Ритца

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w - \int_{\Omega} f w, \quad J(u) = \inf_{w \in V} J(w)$$

$$u_R = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x), \quad \phi_i(x) — \text{глобальные, гладкие функции} \quad i = 1, \dots, N$$

Метод Ритца

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w - \int_{\Omega} f w, \quad J(u) = \inf_{w \in V} J(w)$$

$$u_R = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x), \quad \phi_i(x) \text{ — глобальные, гладкие функции} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial J(u_R)}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N \Rightarrow \quad (3)$$

система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $\Rightarrow u_R$

Метод Галеркина

$$\int_{\Omega} \nabla u_G \cdot \nabla \phi_j(x) = \int_{\Omega} f \phi_j(x) \quad \forall j = 1, N$$

$$u_G = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x), \quad \phi_i(x) — \text{глобальные, гладкие функции} \quad i = 1, \dots, N$$

Метод Галеркина

$$\int_{\Omega} \nabla u_G \cdot \nabla \phi_j(x) = \int_{\Omega} f \phi_j(x) \quad \forall j = 1, N$$

$$u_G = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x), \quad \phi_i(x) \text{ — глобальные, гладкие функции} \quad i = 1, \dots, N$$

аналогичная СЛАУ $\Rightarrow u_G = u_R$

Келдыш М.В. О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1942, том 6, выпуск 6, 309-330. (электр. MathNet.Ru)

Репринт с примечаниями редколлегии и добавленной библиографией

Келдыш М.В. Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1985. с.357–376

... в случае вариационных задач этот метод по существу совпадает с методом Ритца. Однако способ применения этого метода, предложенный Галеркиным, не связан с вариационной задачей, определяющей дифференциальные уравнения, и может быть приложен и к несамосопряженным уравнениям

Наряду с этим, насколько нам известно, применение метода Галеркина к несамосопряженным системам до сих пор не получило обоснования. Недавно появилась работа Г.И. Петрова, где было дано обоснование метода Галеркина для некоторых частных случаев путем сведения исследования о сходимости к изучению бесконечной системы линейных уравнений

Петров Г.И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 3-11.

Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981, 416 с.

Глава 1

§2. Метод Ритца

§3. Метод Бубнова-Галеркина

§8. Метод Галеркина-Петрова

Механика в СССР за 50 лет. Том 3. Механика деформируемого твердого тела. М. Наука, 1972.

Боголюбов А. Н. Математики. Механики: Биографический справочник. Киев: Наукова Думка, 1983.

Афендикова Н.Г. История метода Галеркина и его роль в творчестве М.В.Келдыша // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 77. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-77>

В 1911 лорд Релей ... написал, что *удивительно, как он (В. Ритц) мог рассматривать метод как новый...* В любом случае заслугой Ритца является то, что он дал первое строгое обоснование метода, исследовав его сходимость для трех задач

Григолюк Э.И. О методе Бубнова. К шестидесятилетию его создания. Исслед. по теор. пластин и оболочек. 1975, выпуск 11, 3-41 (электр. MathNet.Ru)

Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М: Наука, 1975
(с. 270 – метод Ритца или Рэлея-Ритца, с. 322 – метод Ритца энергетический)

Галеркин Б.Г., Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Развитие механики в период технической реконструкции СССР, № 3, Вестник Академии наук СССР, 1940 г.

...,достаточно хорошие для практики решения этой проблемы можно получить
путем применения метода Ритца-Галеркина.

Бубнов И.Г. Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко Об устойчивости упругих систем. 1. Избранные труды. Л., Судпромгиз, 1956, стр. 136-139.

Репринт статьи 1913 года

ОТЗЫВ О РАБОТЕ ПРОФ. С. П. ТИМОШЕНКО „ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ“

Работа проф. С. П. Тимошенко „Об устойчивости упругих систем“ заключает решение очень значительного числа весьма интересных и важных задач о нахождении критической нагрузки для стержней и пластин, причем для решения всех этих вопросов автор пользуется одним и тем же методом, что составляет большое достоинство работы.

Сущность этого метода заключается в том, что, допустив разложимость функции, выражающей перемещение точек тела, в сходящийся ряд:

$$w = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 \dots,$$

где φ — нормальные функции координат x и y или одной только координаты x (для стержней), автор составляет выражения Φ — изменения энергии упругих сил системы и T — работы внешних сил и, уравнивая эти выражения, находит выражение для критической нагрузки P , подбирая в нем отношения между коэффициентами ряда $a_1, a_2, a_3, \dots$ так, чтобы P было наименьшим. Сходимость выбранного ряда, а также и степень точности результатов, получаемых при незначительном числе членов его, автор проверяет, — правда, не всегда с достаточной полнотой, — сравнением последовательных приближений в получаемых результатах, причем такое сравнение, а также и сопоставление с точными решениями, когда они известны, указывает в большинстве случаев на достаточноую точность второго приближения [$a_2 = 0, a_4 = 0, \dots$], если только нормальные функции выбраны удачно.

При таких сопоставлениях автор неоднократно указывает, насколько применяемый им метод облегчает получение результатов по сравнению с теми способами, которыми пользовался ранее он сам и его предшественники; это указание мне представляется не вполне верным; дело в том, что весьма простые решения можно получить и обычным путем, т. е. не прибегая к рассмотрению энергии системы, если только сходимость ряда для w достаточно велика. При этом простой подстановкой разложения для w в общее дифференциальное уравнение

равновесия, затем умножением полученного выражения на $\varphi_k dx dy$ и интегрированием по всему объему тела мы получим уравнение, связывающее коэффициент a_k со всеми другими, если только функции φ выбраны так, что

$$\int \int \varphi_n \varphi_k dx dy = 0 \text{ при } n \neq k;$$

это равенство имеет место почти во всех задачах рассматриваемой работы, так как автор обычно берет выражение w в виде тригонометрических рядов, где это условие выполнено; если же почему-либо желательно разложить по целым рациональным функциям — их можно заменить таковыми. Написав из полученного соотношения столько уравнений, сколько членов ряда мы желаем сохранить, и уравнивая нулю определитель из множителей при коэффициентах, мы сведем задачу о нахождении критической нагрузки к определению наименьшего корня целой рациональной функции, высшая степень которой равна числу сохраненных членов. Так, например, в классической задаче Эйлера о „силе колонны“, положив, как сделано у автора,

$$w = a_1 \cos \frac{\pi x}{2l} + a_2 \cos \frac{3\pi x}{2l} + a_3 \cos \frac{5\pi x}{2l} + \dots,$$

мы получим указанным путем такое уравнение для коэффициента a_k

$$0 = a_k \left(1 - \frac{2\alpha}{k^2 \pi^2} + \frac{8\alpha}{k^4 \pi^4} \right) + \frac{32\alpha}{k^2 \pi^4} \left(\sum_{i=1}^k \frac{k a_i}{(i+k)^2} - \sum_{i=1}^k \frac{i a_i}{(i-k)^2} \right),$$

где i и k — нечетные числа, первая сумма в скобках берется только когда $\frac{(i-k)}{2}$ четное, а вторая — если это количество нечетное; множитель же α связан с критической нагрузкой соотношением

$$\alpha = \frac{P l^2}{EI}.$$

Сохраняя только первый член разложения, мы получим

$$1 - \frac{2\alpha}{\pi^2} + \frac{8\alpha}{\pi^4} = 0,$$

откуда

$$P = \frac{8,30 EI}{l^2},$$

вместо $\frac{7,87 EI}{l^2}$; при двух, трех членах получим для α квадратное, кубическое... уравнение, наименьший корень которого находится весьма просто, так как приближенное значение его уже

Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Наука, 1970 (2-е издание)

Введение: Описанный здесь прием по существу и применял Тимошенко в работе, рецензированной Бубновым. Последний заметил, однако, что систему ... можно получить другим, более простым путем... В качестве условия для применимости своего приема И.Г. Бубнов выставляет требование ортогональности координатных функций, что на самом деле не обязательно.

Заметка И.Г. Бубнова положила начало новому прямому методу, развитие и широкое применение которого тесно связано с именем Б.Г. Галеркина.

Михлин С.Г. О сходимости метода Галеркина. Доклады АН СССР, 1948, Т. 61, N 2.

Выводы об истории метода

1909: В. Ритц использовал идею лорда Релея (Rayleigh, Рэлей) и предложил метод на основе минимизации потенциальной *энергии*

Выводы об истории метода

1909: В. Ритц использовал идею лорда Релея (Rayleigh, Рэлей) и предложил метод на основе минимизации потенциальной *энергии*

1910: С.П. Тимошенко успешно применил метод к задачам механики

Выводы об истории метода

1909: В. Ритц использовал идею лорда Релея (Rayleigh, Рэлей) и предложил метод на основе минимизации потенциальной *энергии*

1910: С.П. Тимошенко успешно применил метод к задачам механики

1913: И.Г. Бубнов в отзыве о работе Тимошенко предложил идею, связанную с умножением уравнения равновесия на пробные функции и интегрированием

Выводы об истории метода

1909: В. Ритц использовал идею лорда Релея (Rayleigh, Рэлей) и предложил метод на основе минимизации потенциальной *энергии*

1910: С.П. Тимошенко успешно применил метод к задачам механики

1913: И.Г. Бубнов в отзыве о работе Тимошенко предложил идею, связанную с умножением уравнения равновесия на пробные функции и интегрированием

1915: Б.Г. Галеркин дал более развернутое математическое описание и реализовал идею Бубнова

Выводы об истории метода

1909: В. Ритц использовал идею лорда Релея (Rayleigh, Рэлей) и предложил метод на основе минимизации потенциальной энергии

1910: С.П. Тимошенко успешно применил метод к задачам механики

1913: И.Г. Бубнов в отзыве о работе Тимошенко предложил идею, связанную с умножением уравнения равновесия на пробные функции и интегрированием

1915: Б.Г. Галеркин дал более развернутое математическое описание и реализовал идею Бубнова

1940: Г.И. Петров обобщил метод Галеркина и доказал сходимость для некоторого класса задач механики жидкости

Современный метод Галеркина

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_h = \int_{\Omega} f w_h \quad \forall w_h \in V_h$$

V_h — конечномерное подпространство V , h — параметр сетки

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i^h(x), \quad \phi_i^h(x) — \text{кусочно-гладкие функции с локальным носителем}$$

Метод Галеркина как основа количественного анализа для уравнений в частных производных

Ключевой вопрос:

Как должны строиться соответствующие конечномерные пространства $\{V_h\}$?

В 1943 г. **R. Courant** предложил метод, который позднее получил название **метод конечных элементов (МКЭ)**.

Метод Галеркина как основа количественного анализа для уравнений в частных производных

Ключевой вопрос:

Как должны строиться соответствующие конечномерные пространства $\{V_h\}$?

В 1943 г. **R. Courant** предложил метод, который позднее получил название **метод конечных элементов (МКЭ)**.

В 60-е - 70-е годы математическая теория МКЭ была развита многими авторами
O. Zienkiewicz, M. Zlámal, С.Г. Михлин, J. Bramble, I. Babuška, A. Aziz,
G. Strang, G. Fix, J. Aubin, J. Nitsche, F. Brezzi, Ph. Ciarlet, J. Cea,
J.-L. Lions, R. Glowinski, T. Oden, J. Douglas, J.-C. Nédélec, J. Argiris,
O. Widlund, V. Thomée, L. Wahlbin, A. Schatz, P.-A. Raviart, R. Temam,
J.-M. Thomas, Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец, В.Я. Ривкинд, I. Hlaváček... и другие
известные математики.

Ciarlet Ph.G. The Finite Element Method for Elliptic Problems, Vol. 4, 1978

Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980

В книге упомянуты метод Галеркина и метод Ритца

В предисловии к русскому изданию академик Н.Н. Яненко указал

Этот метод в своей основе является вариационным, и история его возникновения и развития восходит к основополагающим работам отечественных математиков Бубнова и Галеркина

В настоящее время известен широкий спектр методов, связанных или перекликающихся с методом Галеркина.

- Смешанные и гибридные МКЭ
- Методы граничных элементов
- Разрывный метод Галеркина
- Метод конечных объемов
- Бессеточные методы
- Методы изогеометрического анализа
- ...

С развитием МКЭ возникли важные сопряженные вопросы:

Эффективные методы нахождения $u_h \Rightarrow$ линейные и нелинейные (например, методы декомпозиции области, многосеточный метод, методы седловой точки)

С развитием МКЭ возникли важные сопряженные вопросы:

Эффективные методы нахождения $u_h \Rightarrow$ линейные и нелинейные (например, методы декомпозиции области, многосеточный метод, методы седловой точки)

Имеет ли место сходимость $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$ к точному решению u ? Как квалифицировать сходимость в терминах h ?

$\Rightarrow$ Теория интерполяции в пространствах Соболева и априорные оценки скорости сходимости

С развитием МКЭ возникли важные сопряженные вопросы:

Эффективные методы нахождения $u_h \Rightarrow$ линейные и нелинейные (например, методы декомпозиции области, многосеточный метод, методы седловой точки)

Имеет ли место сходимость $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$ к точному решению u ? Как квалифицировать сходимость в терминах h ?

$\Rightarrow$ Теория интерполяции в пространствах Соболева и априорные оценки скорости сходимости

Оптимальное перестроение подпространств для метода Галеркина ($V_{h_k} \rightarrow V_{h_{k+1}}$)
 $\Rightarrow$ Адаптивные численные методы, индикаторы погрешности

С развитием МКЭ возникли важные сопряженные вопросы:

Эффективные методы нахождения $u_h \Rightarrow$ линейные и нелинейные (например, методы декомпозиции области, многосеточный метод, методы седловой точки)

Имеет ли место сходимость $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$ к точному решению u ? Как квалифицировать сходимость в терминах h ?

$\Rightarrow$ Теория интерполяции в пространствах Соболева и априорные оценки скорости сходимости

Оптимальное перестроение подпространств для метода Галеркина ($V_{h_k} \rightarrow V_{h_{k+1}}$)
 $\Rightarrow$ Адаптивные численные методы, индикаторы погрешности

Эффективные и явно вычисляемые оценки $u - u_h$
 $\Rightarrow$ Теория апостериорного контроля точности для уравнений в частных производных

Заключительные ремарки

Метод Галеркина следует называть *методом Бубнова-Галеркина*, если отражать авторов идеи

Обобщение метода может также носить название *метод Петрова-Бубнова-Галеркина*

Заключительные ремарки

Метод Галеркина следует называть *методом Бубнова-Галеркина*, если отражать авторов идеи

Обобщение метода может также носить название *метод Петрова-Бубнова-Галеркина*

TITLE (Galerkin) >10K результатов поиска Scopus
TITLE (Petrov AND Galerkin) <1K результатов поиска

Заключительные ремарки

Метод Галеркина следует называть *методом Бубнова-Галеркина*, если отражать авторов идеи

Обобщение метода может также носить название *метод Петрова-Бубнова-Галеркина*

TITLE (Galerkin) >10K результатов поиска Scopus
TITLE (Petrov AND Galerkin) <1K результатов поиска

TITLE (Bubnov AND Galerkin) 60 результатов поиска
TITLE (Petrov AND Bubnov AND Galerkin) 0

<https://www.spbstu.ru/university/about-the-university/history/contribution-science/mechanics/>
<https://www.spbstu.ru/university/about-the-university/history/contribution-science/mathematics/>





БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ