

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

А. Г. ЭЛАШВИЛИ

Институт Математики им. Размадзе, ТГУ, Тбилиси 0186, Грузия

Семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. Ломоносова
“Группы Ли и теория инвариантов”

3 марта 2021 г.

Пусть $\mathfrak{g}$ — ненулевая конечномерная алгебра Ли, определенная над алгебраическим замкнутым полем k ($\bar{k} = k$ char $k = 0$) и пусть e — ненулевой nilпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. По теореме Морозова-Диксони, элемент e можно вложить в $\mathfrak{sl}(2)$ -триплет $\mathfrak{s} = \{e, h, f\}$ т.е. $[e, f] = h$; $[h, e] = 2e$; $[h, f] = -2f$
 $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Элемент h полурост с целыми собственными значениями и он определяет $\mathbb{Z}$ -градуировку алгебры $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=-d}^{d} \mathfrak{g}_j$, где

$$\mathfrak{g}_j := \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = jx\} \quad \text{где } \mathfrak{g}_{\pm d} \neq 0$$

Максимальное число d называют глубиной $\mathbb{Z}$ -градуировки и глубиной $d \in d(e)$ nilпотента e . Элемент алгебры $\mathfrak{g}$ вида $e + F$, где $F \neq 0$ элемент $\mathfrak{g}_{-d}$ называют максимальным элементом ассоциированным с nilпотентом e .

Подматрица $\mathcal{O}_\theta$ по определению является централизатором $Z_\theta(h)$ полупростого элемента, поэтому она редуктивна и $\dim Z_\theta(h) \geq l := \text{rk } \mathcal{O}$ (т.к. для всякого элемента x из полупростой алгебры $\mathcal{O}$ размерность $Z_\theta(x) \geq l$) $x \in \mathcal{O}$ называется главным регулярным если $\dim Z_\theta(x) = l$.

В 1959 г. Берт Костант доказал Теорему. Циклический элемент $e + f^{-1}$ ассоциированный с регулярным нильпотентом e , будет регулярным полупростым элементом $\mathcal{O}$.

Тонн Спрингер в 1974 доказал что циклический элемент ассоциированный с субрегулярным нильпотентом простой алгебры $\mathcal{M}$ особого типа тоже регулярен и полупрост, кроме того он обнаружил два ~~ниль~~ отмеченных нильпотента $e, f \in \mathcal{O}$ с тем же свойством.

Пример 1. Пусть $\mathcal{O} = \mathfrak{sl}(n+1)$ - $e \in \mathcal{O}$ регулярный ниль. e - максимальная жорданова клетка в некоторой базе $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n+1}$ $h = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ 0 & n-2 & \\ & & -n+2 & \\ 0 & & & -n \end{pmatrix}$ $\mathcal{O}_{2e} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\dim \mathfrak{g}_{-2n} = \dim \mathfrak{g}_{2n} = 1 \quad F = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$e + F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ \alpha & & 0 \end{pmatrix}$ — имеет собственные значения $\pm \sqrt[n]{\alpha}$ и $e + F$ — полупростой регулярный элемент.

Пример 2. Пусть $e = e_2$ — нильпотент, где 2 младший корень. Хорошо известно, что среди ненулевых нильпотентов орбита e_2 имеет наименьшую размерность, $d(e) = 2$ и

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} + \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ $\dim \mathfrak{g}_{-2} = \dim \mathfrak{g}_2 = 1$
и $e \in \mathfrak{g}_2$ $f \in \mathfrak{g}_{-2}$ и $F = e + f$ — полупростой элемент.

Пример 3 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5)$ $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$d(e) = 4$ $e + F$ — имеет в каноническом базисе $F \neq 0 \in \mathfrak{g}(4)$

разложится на ненулевую полупростую и нильпотентную части.

Из вышесказанного достаточно естественно вытекает следующая задача: для каждого нильпотентного класса: т.е. орбита Be нильпотента e относительно присоединенной группы описать исорданов тип ассоциированной ~~с e~~ циклического элемента. Именно такой вопрос задал мне где-то между 2010 и 2014 годом В. Кач. Ровно такая же задача возникла при обобщении редукции Дринфельда-Соколова в теории интегрируемых систем. В исходной форме этой редукции нильпотент e из простой алгебры $\mathfrak{g}$ был регулярным.

Мы скажем, что нецикловой нильпотент $e \in \mathfrak{g}$ (и его орбита Be) имеют нильпотентный (соответ. полуростой; соответ. регулярный полуростой) тип, если любой (соответ. циклический, ассоциированный с e нильпотент) (соответ. любой общий циклический элемент ассоциированный с e полуростой, соответ.

регулярно полупростой).

В противном случае назовем $\mathfrak{g}$ ^{нильпотент} смешанного типа.

Не трудно доказать это задавая описание типа $\mathfrak{g}$ ^{нильпотент} в полупростой подгруппе регулярной кривой $\mathfrak{g}$ -простая алгебра $\mathfrak{m}$.

Пусть e ^{нильпотент} $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^d \mathfrak{g}_i$ $\mathbb{Z}$ -радикальное описание выше. Можно считать это мы фиксируем Картановскую подгруппу $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ и множество простых корней $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ так что корни $\mathfrak{g}$ подпространства $\mathfrak{g}_i$ связаны с простыми корнями α_i тем что $\mathfrak{g}_{s_i} \subset \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_0$ где $1 \leq i \leq \ell$. Хорошо известно что возможные значения для s_i это 0, 1, 2. Это позволяет ассоциировать с $\mathfrak{g}$ ^{нильпотент} e весовую диаграмму Дынкина, а именно это схема Дынкина простых корней алгебры $\mathfrak{g}$, где над каждым простым корнем написано число s_i . Эту В.Д.Д. часто называют характеристикой

Нильпотент e и характеристика e
 однозначно определяют орбиту Ge .
 Например, характеристика мажоранчи
 регулярного нильпотента $\mathfrak{H}_0$
 схема Дынкина, где против каждого
 простого корня стоит 2. Нильпотент
 e на $B \cdot D \cdot D$ которого стоит 0 или 2
 называется центральным нильпотентом.
 Если $-\alpha_0 = \sum a_i \alpha_i$ есть старший
 корень $\mathfrak{g}$ то глубина $d(e)$ нильпотента e
 определяется по формуле

$$d(e) = \sum_{i=1}^l a_i s_i$$

Теорема 1. Нильпотент e простой
 алгебры $\mathfrak{L}$ имеет нильпотентный
 тип тогда и только тогда когда
 $d(e)$ нечетно.

Доказательство теоремы 1 требует знания
 θ -групп Вилберга, схем Кава для автоморфизмов
 конечного порядка полупростых алгебр $\mathfrak{L}$
 и явной конструкции билинейной симметрической
 невырожденной формы θ_0 -инвариантной
 на пространстве векторном пространстве $\mathfrak{g}'$
 которое будет определено ниже.

Схема Каца внутреннего автоморфизма Γ конечного порядка это расширенная диаграмма Дынкина (т.е. схема Дынкина простых алгебр и расширенная мнимыми корнями α_0 т.е. $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_e\}$) $= \prod$ с целыми неотрицательными числами $(m_0, m_1, \dots, m_e)$ напротив каждого из корней системы $\prod$, при этом взаимно простыми в совокупности. Схема Каца определяет автоморфизм внутренний однозначно с точностью до сопряжения относительно группы всех автоморфизмов и порядок автоморфизма равен $m = m_0 + \sum_{i=1}^m a_i m_i$. По нумерации $e \in WDD(e)$ и $d = d(e)$ построим автоморфизм σ_e со схемой Каца которая на простых корнях имеет отметки те же что и $WDD(e)$, на $-\alpha_0$ отметку $d(e)$ и $d(e)$ равной $d(e)$. Если нильпотент не четен то порядок автоморфизма будет равен $m = d + 2$ (если все нильпотент e четен то надо все отметки разделить на 2 и тогда порядок будет равен $m/2$). Автоморфизм σ_e определяет $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировку

$$\sigma_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \sigma_j^i.$$

где $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0$ редуктивная подалгебра $\mathfrak{g}$ &
 полупростая часть имеет диаграмму
 Динкина $\mathfrak{g}$ в которой стерты все вершины
 с ненулевыми отметками. Отметим также
 что наименьшие весовые вектора $\mathfrak{g}^0$ -модуля
 $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_1$ есть корни, для которых $s_i = 1$
 если все ϵ -метки, тогда наименьшие
 весовые вектора $\mathfrak{g}^0$ -модуля $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_{-d}$
 есть корни α_i с $s_i = 2$ (включая минимальный
 корень).

Пусть G есть связанная огранизованная
 группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и G^0 -линейно
 неподвижных точек автоморфизма τ_e в G .
 Связная линейная алгебраическая $G^0 / \mathfrak{g}^j$
 для каждого $j \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ называют
 $\oplus$ группой Вилберга.

Одним из основных факстов теории
 θ -групп является следующий: если
 элемент $v \in \mathfrak{g}^j$ имеет $G^0 v$ -замкнутую
 (содержащую ноль в замыкании орбиты) тогда
 и только тогда когда v - есть полупростой
 (квадратично nilпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$).

Так как циклический элемент $e + F \in \mathbb{Z}$
 лежит в $\mathfrak{o}_f^2$ то его полупростота
 или nilпотентность редуцируется к
 изучению аналогичных свойств но
 действию меньшей группы G^0 .
 Кроме того $d(e)$ nilпотента e
 определим $\text{rk}(e)$ nilпотента e как
 $\dim(\mathfrak{o}_f^2 / G^0)$ и теорема 1 на этом
 языке означает что $\text{rk}(e) > 0$ т.ч.
 когда $d(e)$ есть ненулевое число.

Для $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ градировок $\mathfrak{o}_f$ эквивалентно
 $\mathfrak{o}_0 / \mathfrak{o}_f^j$ имеет и другое эквивалентное
 определение как размерность максималь-
 ного абелева подпространства состоящего
 из полупростых элементов и если
 $\text{Mod}(j_1, m) = \text{Mod}(j_2, m)$ тогда $\text{rk}(G^0 / \mathfrak{o}_f^{j_1}) =$
 $= \text{rk}(G^0 / \mathfrak{o}_f^{j_2})$. Так как для $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
 градировки определенной выше по К.Д.Д
 nilпотента e (при условии что $d(e)$ не равно
 $\mathfrak{o}_f^0 = \mathfrak{o}_f$, а $\mathfrak{o}_f^1 = \mathfrak{o}_f$ то отсюда и все элементы
 $\mathfrak{o}_f^1$ — nilпотенты, то отсюда следует по лемме
 теоремы 1

Пусть $Z(\mathfrak{g})$ (соответ $Z_f(\mathfrak{g})$) централизатор 10
 $sl(2)$ -подалгебры $\mathfrak{g} = \langle e, h, f \rangle$ в G (соответ $\mathfrak{g}$)

лемма. Пусть $e \in \mathfrak{g}$ нильпотент четной
 глубины. Тогда
 а) $((\text{ad } e)^d, X, X)$ есть $Z(\mathfrak{g})$ -инвариантная
 не вырожденная квадратичная форма

на $\mathfrak{g}^{-d}$

б) G^0 -инвариантный полином $f(u+x)$
 не нулевой
 $= ((\text{ad } u)^d, X, X)$ на $e + \mathfrak{g}^{-d}$

эта лемма завершает доказательство
 теоремы 1

TABLE 1.1. Nilpotent orbits of nilpotent type in exceptional Lie algebras

$\mathfrak{g}$	e	d	$e + F$
E_6	$3A_1$	3	D_4
E_6	$2A_2 + A_1$	5	E_6
E_7	$[3A_1]'$	3	D_4
E_7	$4A_1$	3	$D_4 + A_1$
E_7	$2A_2 + A_1$	5	E_6
E_8	$3A_1$	3	D_4
E_8	$4A_1$	3	$D_4 + A_1$
E_8	$2A_2 + A_1$	5	E_6
E_8	$2A_2 + 2A_1$	5	$E_6 + A_1$
E_8	$2A_3$	7	D_7
E_8	$A_4 + A_3$	9	E_8
E_8	A_7	15	E_8
F_4	$A_1 + \tilde{A}_1$	3	C_3
F_4	$\tilde{A}_2 + A_1$	5	F_4
G_2	$\tilde{A}_1$	3	G_2

Задача 1.1) Для всех nilпотентов без
 $\mathfrak{g}$ - когда $\mathfrak{g}$ простая алгебра типа A или C
 $d(e)$ четно. Для ортогонального случая
 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$
 nilпотент e имеет нечетную глубину
 т. е. т. т. когда $\dim V \geq 7$ n_1 - нечетно и
 $n_1 - n_2 = 1$

Замечание 2. Для негётного d форма определена в Лемме будет невырожденной ~~то~~ $Z(S)$ -инвариантной кососимметрической формой. Перебором всех случаев когда d -негётно мы проверим что $Z(S)|_{\mathcal{O}_S(-d)}$ будет полной симплектической алгеброй этой формы. Хотелось бы иметь концептуальное доказательство этого факта.

Далее будем ~~сказать~~ предполагать что Рильпотент Φ имеет глубину $d(e)$

Напомним что действие редуктивной алгебраической группы называют стабильным если его орбиты общего положения замкнуты. В этом случае коразмерность орбиты общего положения равна размерности категориального фактора. Так как $\mathcal{B}^0$ -орбита открыта в $\mathcal{O}_2$, то e имеет полустой тип тогда и только тогда когда действие $\mathcal{B}^0/\mathcal{O}_2^2$ стабильно

Хорошо известно что ортогональное представление редуктивной группы стабильно. Из вышеизложенного следует что $Z(\mathfrak{g})|_{\mathfrak{g}_{-d}}$ стабильно. Имеет место следующее предложение 1) Следующие числа равны

- 1) $\dim(\mathfrak{g}^2/G^0) (=rk G^0|_{\mathfrak{g}^2})$;

- 2) $\dim(\mathfrak{g}_{-d}|Z(\mathfrak{g}'))$

- 3) коразмерность о.о.п. $G^0|_{\mathfrak{g}^2}$

- 4) коразмерность о.о.п. действия $Z(\mathfrak{g}')|_{\mathfrak{g}(-d)}$.

Предложение 2.

а) Если фиксированный элемент $e \in F$ полурост, тогда F полурост под действием $Z(\mathfrak{h}_e)|_{\mathfrak{g}(-d)}$

б) Если существует фиксированный элемент ассоциированный с e , тогда любой фиксированный элемент полурост.

Определение. Полупростая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ назовем редуцирующей подалгеброй для e , если она нормализует $\mathfrak{h}$ и если $Z(s) \mathfrak{g}_{-d} = \mathfrak{g}_{-d}$ (т.е. общая орбита действия $Z(s)|_{\mathfrak{g}_{-d}}$ пересекает $\mathfrak{g}_{-d}$).

Обозначим через Q свободную, ассоциативную алгебраическую группу с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ полупростая подалгебра нормализуемая $\mathfrak{h}$ тогда

$$\mathfrak{h} \subset \mathcal{H}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} + \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

Обозначим $e_{\mathfrak{g}}$ (соответ $\mathfrak{g}_{\mathfrak{g}}$) проекцией e (соответ $\mathfrak{g}$) на $\mathfrak{g}$ вдоль $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$. Если

$e_{\mathfrak{g}} \neq 0$ тогда $\mathfrak{g}_{\mathfrak{g}}$ есть $sl(2)$ тройка содержит $e_{\mathfrak{g}}$. Следующая теорема удобного критерий для $\mathfrak{g}$ быть редуцирующей:

Теорема. Полупростая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ нормализуемая $\mathfrak{h}$ редуцирующая для e т.ч.т.т. когда $e_{\mathfrak{g}} \neq 0$ и $e_{\mathfrak{g}}$ имеет ту же глубину k в $\mathfrak{g}$, как e в $\mathfrak{g}$.

Пусть z — полупростая часть централизатора
Картановской подалгебры централизатора $\mathfrak{g}$
 ~~z~~ ~~$\mathfrak{g}$~~ Как хорошо известно это z — минимальная
подалгебра Леви содержащая $\mathfrak{g}$.

Интересно отметить что z — редукция e в
 z всегда равна $d(e)$, когда d — четно.
Мы проверили это прямым вычислением
от случая к случаю и не знаем концептуального
доказательства этого факта.

Следовательно z — хороший кандидат для
редуцирующей подалгебры и то теореме
это во всяком случае так, если кроме
того $rk(e) = 1$. За небольшим исключением
 z — всё так и редуцирующая подалгебра.

Теорема. Пусть $q \subset \mathfrak{g}$ редуцирующая
подалгебра для e . Тогда e имеет
полупростой тип т.ч.т. когда $e \in q$ и
 e имеет полупростой тип в q .

Можно доказать что существует для $e \in \mathfrak{g}$
где существует минимальная редуцирующая
подалгебра. Открытый вопрос когда она
единственна с точностью до сопряжения

Пусть $\mathfrak{g}$ -простая алгебра Ли
 классического типа т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V), \mathfrak{so}(V), \mathfrak{sp}(V)$.
 Хорошо известно что, с точностью
 до автоморфизма $\mathfrak{g}$, нильпотент $e \in \mathfrak{g}$
 определяется порядками $n_1, \dots, n_r$ пр. Жордана
 блоков. Мы будем предполагать что
 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r (> 0)$

Вспомогат. $G = \mathfrak{so}(V)$ (соответ. $G = \mathfrak{sp}(V)$)
 последовательность ность содержит каждую n_i -ую
 (соответ. нечетную) часть e четное
 кратности. Если мы вложим
 e в $\mathfrak{g} = \{e, h, h^\vee\}$. Тогда пространство V
 разложится в сумму

$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ - симметричных
 подпространств размерностей $n_1, \dots, n_r$,

Теорема. 1) Пусть $G = Sk(V)$ или $Sp V$ 15

тогда ϵ полупростого типа тогда только
тогда когда соответствующее разбиение
имеет вид $(n_1, \dots, n_i, 1, \dots, 1)$ и регулярный
полупростой тип если 1 встречается не
более одного раза

2) Если $G = SO(V)$ тогда ϵ полупростого
типа если выполняется одно из условий

а) n_1 имеет четную кратность ϵ все
остальные части 1

б) $n_1 = 2m+1$ $n_2 = 2m-1$ ($m \geq 1$) и все остальные
части 1.

в) $n_1 \geq 5$ и все остальные части 1

и ϵ не регулярный тип т.ч. и т.д) n_1 - нечетно
и 1 встречается не более чем дважды

д) число частей $p \leq 4$; е) $p \leq 2$;

Теорема. Пусть e нильпотен
 в $d(e)$ центром, тогда для
 него существует редукционная
 идеалеа q такая что e_q имеет
 регулярный полупростой тип в q .

Замечание. Проекты e_q с
 вышеупомянутыми свойствами
 однозначно определены с точностью
 до сопряжения. Она обозначается
 через e_s ("полупростая часть")

В куст объединяет все нильпотенты
 e с одним и тем же e_s

Table 5.1. Nilpotent orbits of semisimple and mixed type in E_6

e	d	r	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{g}^s$	e^s	$\mathfrak{g}^n$	e^n	$Z(\mathfrak{s})^0 \mathfrak{g}_{-d}$
A_1	2	1	A_5	A_1	2	A_5	0	1
$2A_1$	2	2	A_3	$2A_1$	(2; 2)	A_3	0	$SO_7 \oplus 1$
A_2	4	1	$2A_2$	A_2	(3)	$2A_2$	0	1
$A_2 + A_1$							$(2, 1; 1^3)$	1
$A_2 + 2A_1$							$(2, 1; 2, 1)$	SO_3
$2A_2$	4	2	A_2	$2A_2$	(3; 3)	A_2	0	$G_2 \oplus 1$
A_3	6	1	A_3	A_3	(4)	$2A_1$	0	1
$A_3 + A_1$							$(2; 1^2)$	1
$D_4(a_1)$	6	2	0	D_4	(5, 3))	0	0	2
A_4	8	1	A_1	A_4	(5)	A_1	0	1
$A_4 + A_1$							(2)	1
D_4	10	1	$2A_2$	B_3	(7)	A_1	0	1
$D_5(a_1)$							(2)	1
A_5	10	1	A_2	A_5	(6)	A_1	0	1
$E_6(a_3)$	10	2	0	F_4	$F_4(a_2)$	0	0	2
D_5	14	1	0	B_4	(9)	0	0	1
$E_6(a_1)$	16	1	0	E_6	$E_6(a_1)$	0	0	1
E_6	22	1	0	F_4	F_4	0	0	1

Пусть $S_{\mathfrak{g}}(e) = \{F \in \mathfrak{g}_{-d} \mid e + F \text{ полупрост в } \mathfrak{g}\}$ 16

Теорема. Пусть $e \in \mathfrak{g}$ нильпотент полупростого типа. Тогда

- а) $S_{\mathfrak{g}}(e)$ содержит не пустое открытое по Зарисскому открытое подмногообразие в $\mathfrak{g}_{-d}$
- б) Если $F \in S_{\mathfrak{g}}(e)$, тогда $Z(\mathfrak{s})$ -орбита в $\mathfrak{g}_{-d}$ замкнута

Следовательно $S_{\mathfrak{g}}(e)$ состоит из замкнутых $Z(\mathfrak{s})$ -орбит в $\mathfrak{g}_{-d}$ и для классификации полупростых циклотических элементов нам нужно описание, для каждого нильпотента полупростого типа, как disjoint union множества $S_{\mathfrak{g}}(e)$ которое называют сингулярностями в $\mathfrak{g}_{-d}$.

Теорема [Д.К.Э.] Если e - нильпотент полупростого типа в $\mathfrak{g}$. Тогда существует редукцирующая подгруппа q для e , такое что q_{-d} Картановская подгруппа для действия $Z(\mathfrak{s})$ на $\mathfrak{g}_{-d}$

Доказательство теоремы сводится к случаю когда нильпотент e отжуженный т.е. когда $Z(S)$ -коидна. Кроме того можно предполагать что $\mathfrak{g}$ не содержит меньшей редуктирующей подальбры $\mathfrak{e}$. В этом случае нильпотент e полупростого типа называется неприводимым.

Если $\text{rk}(e) = 1$ и e полупростого типа то

$$S_{\mathfrak{g}}(e) = {}_K Z(S) F_0 = \{ F \in \mathfrak{g}_{-1} \mid (F, F) \neq 0 \}$$

где $(F_0, F_0) \neq 0$

Отметим также что есть всего несколько неприводимых нильпотентов для которых $\text{rk} > 1$ в простых алгебрах $A_4 : SO(4, \mathbb{C})$, $\mathbb{C} \text{rk} = 2$; $F_4 - 1$ с $\text{rk} = 2$; E_6 в E_7 с $\text{rk} = 3$; G_2 с $\text{rk} = 2$ и E_8 с $\text{rk} = 4$ в E_8 . В этих случаях, прямым вычислением удается описать $S_{\mathfrak{g}}(e)$

Следует отметить что описать явно
множество $S_{\mathfrak{g}}(e)$ можно и в
терминах структуры алгебры на
подпространстве $\mathfrak{g}_{-d}$, которая
задается формулой

$$x * y = [(\operatorname{ad} e)^{\frac{d}{2}} x, y] \quad \text{для } x, y \in \mathfrak{g}$$

Это произведение коммутативно
(соответ. антикоммутативно) если $\frac{d}{2}$ четно
(соответ. нечетно)

Если глубина $d(e)$ нильпотента e
равна 2, e всегда полупростого типа
и вышеприведенная формула дает на
 $\mathfrak{g}_{-2}$ структуру простой Ли-алгебры
(на самом деле простые
Ли-алгебры могут быть
получены таким образом).

Для неприводимых нильпотентов с глубиной
 d такой что $\frac{d}{2}$ нечетно, множество
сингулярных элементов $F \in \mathfrak{g}_{-d}$
состоит из F таких что F не
содержится в собственной
подалгебре алгебры определений выше.