

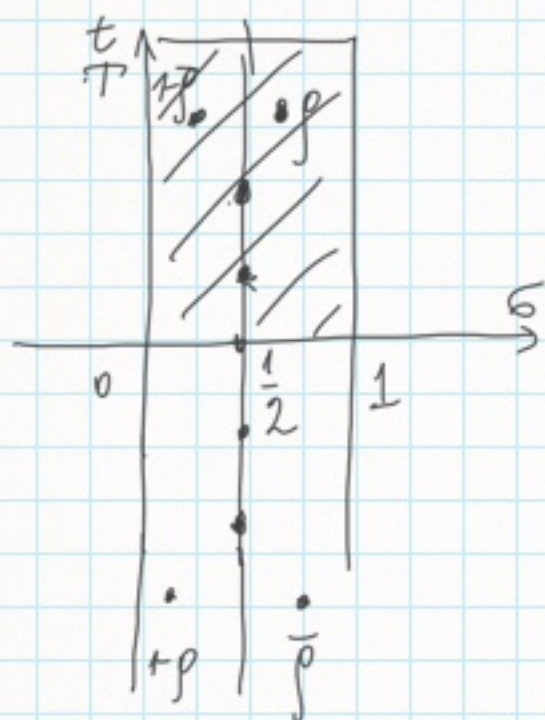
Лекция 3.

$$\zeta(s) = s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \xi(s) - \text{целая ф-ия}$$

$$\boxed{\zeta(s) = \zeta(1-s)}$$

Фунд. $\zeta(s)$ - это "нетривиальные" нули $\xi(s)$

Все нули $\zeta(s)$ лежат в области $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.



$$s = \sigma + it$$

Пронумеруем нули в порядке возрастания модуля ординат

нулей, при этом если

при одном и том же значении

модуля ординаты есть несколько

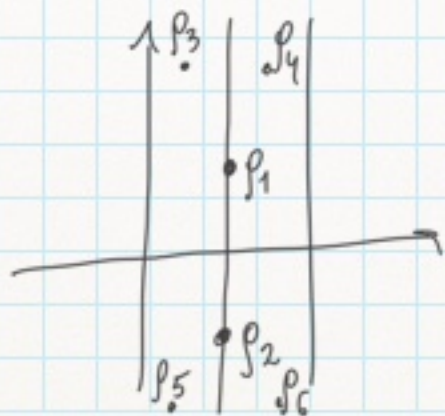
нулей, то пронумеруем их в

порядке убывания значения

абсциссы нулей (но нули с отриц. -ой

ординатой идут после соотв. их нулей с

положит. -ой ординатой).



Теорема (о разложении $\zeta(s)$ в виде произведения Вейерштрасса).

Проведливо рав-во:

$$\zeta(s) = e^{as} \prod_p \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}}, \quad \text{где}$$

p — нули $\zeta(s)$ с учётом кратности, расположенные по порядку (в порядке возрастания модулей), при этом

$$a = \ln 2\sqrt{\pi} - \frac{\gamma}{2} - 1. \quad \text{Кроме того}$$

$$\sum_n \frac{1}{|p_n|} = +\infty, \quad \sum_n \frac{1}{|p_n|^{1+\varepsilon}} < +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Для g -го нуля два вспомогательных утв.-ия.

Лемма 1 (гр-ла Йенсена):

пусть $f(s)$ — анал. в круге $|s| \leq R$ гр-ия, при этом $f(0) \neq 0$ и $f(s) \neq 0$ при $|s| = R$.

Тогда

$$\ln \frac{|f(0)| \cdot R^n}{z_1 \dots z_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi,$$

где $z_1, \dots, z_n$ — модули нулей $f(s)$ в круге $|s| \leq R$ с учётом кратности.

До-во:

$$F(s) = \frac{f(s)}{R^n} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{R^2 - s \cdot \bar{s}_k}{s - s_k}$$

$s_1, \dots, s_n$ — нули $f(s)$.

$F(s)$ — анал. в круге $|s| \leq R$ и не имеет там нулей. $\Rightarrow \ln F(s)$ — анал. г-ве в круге $|s| \leq R$.

По теореме Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{\ln F(s)}{s} ds = \ln F(0).$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln F(R e^{i\varphi})}{R e^{i\varphi}} R e^{i\varphi} d\varphi$$

Далее берем часть от обеих частей:

$$\ln |F(0)| = \ln \frac{|f(0)| R^n}{z_1 \dots z_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(R e^{i\varphi})| d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(R e^{i\varphi})| d\varphi, \text{ м.к.}$$

$$\text{при } s = R e^{i\varphi} \quad \frac{1}{R^n} \prod_{k=1}^n \frac{|R^2 - R e^{i\varphi} \bar{s}_k|}{|R e^{i\varphi} - s_k|} = \prod_{k=1}^n \frac{|R e^{-i\varphi} - \bar{s}_k|}{|R e^{i\varphi} - s_k|} = 1.$$

Все г-во.

Лемма 2 (теорема Фурье-Каратеодори):

пусть $f(s)$ - анал. в круге $|s| \leq R$.

Тогда $\forall n \geq 1$
$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq 2(A(R) - \operatorname{Re} f(0)) R^{-n},$$

где $A(R) = \max_{|s|=R} \operatorname{Re} f(s).$

До-во:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) R^{-n} e^{-in\varphi} d\varphi.$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) \cdot s^{n-1} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) R^n e^{in\varphi} d\varphi$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{-n} \overline{f(Re^{i\varphi})} e^{-in\varphi} d\varphi$$

Скрещиваем:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = R^{-n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \Leftrightarrow$$

$$\text{Так как } n \geq 1 \quad \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} d\varphi = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} R^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} (\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R)) d\varphi$$

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{1}{\pi} R^{-n} \int_0^{2\pi} (A(R) - \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})) d\varphi.$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \int_{|s|=R} \frac{f(s)}{s} ds \right) = 2\pi \operatorname{Re} f(0). \Rightarrow$$

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{\pi} R^{-n} \int_0^{2\pi} (A(R) - \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})) d\varphi =$$

$$= 2 R^{-n} (A(R) - \operatorname{Re} f(0)).$$

Всё гно.

До-во теоремы о разложении $\zeta(s)$ по нулям.

Начинаем с тем, что

$$\sum_n \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} < +\infty.$$

Применим гр-у Писсона.

Пусть R - произвольное. и

$\rho_1, \dots, \rho_n$ - все нули $\zeta(s)$ в круге $|s| \leq R$.

Пусть $R_1 > R$ такое, что $2R \leq R_1 \leq 3R$, при

этом $\zeta(s) \neq 0$ при $|s| = R_1$.

Пусть $\rho_1, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}, \dots, \rho_k$ - все нули $\zeta(s)$ в круге $|s| \leq R_1$. Тогда, используя $\zeta(0) = \zeta(1) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) = 1$.

получим

$$\ln \frac{R_1^k}{|\rho_1| \dots |\rho_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\zeta(R_1 e^{i\varphi})| d\varphi \leq \max_{|s|=R_1} (\ln |\zeta(s)|, 0),$$

$$\ln \frac{R_1^k}{\underbrace{R_1^n \cdot R_1^{kn}}_{\substack{\text{"} \\ \ln \left(\frac{R_1}{R} \right)^n \\ \vee \\ n \ln 2}}} \leq \ln \frac{R_1^k}{|p_1| \cdots |p_k|}$$

$$n \leq \frac{1}{\ln 2} \max_{|s|=R_1} (\ln |\zeta(s)|, 0).$$

Оценим $\max_{\substack{|s|=R \\ \sigma \geq \frac{1}{2}}} |\zeta(s)|$:

$$|s| = R \Rightarrow |s-1| \leq R+1,$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du$$

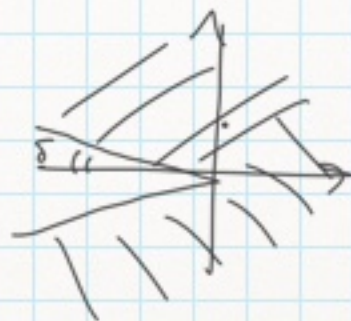
$$|\zeta(s)(s-1)| \leq 1 + \frac{1}{2}(R+1) + R(R+1) \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}} \ll R^2$$

Опр: $f(x) \ll g(x) \Leftrightarrow |f(x)| \leq Cg(x)$, $C - \text{a} \delta c.$
норм.

Оценим $|\Gamma(\frac{s}{2})|$:

$$\ln \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O_\delta\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

$$|\arg s - \pi| \geq \delta.$$



$$\ln \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{s}{2} - \frac{s}{2} + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\left| \ln \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \right| = \left| \operatorname{Re} \ln \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| = \left| \frac{\sigma-1}{2} \ln \left| \frac{s}{2} \right| - \frac{t}{2} \arg \frac{s}{2} - \frac{\sigma}{2} \tau + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right| \ll R \ln R.$$

П.о. из предыдущего утверждения следует, что
при $|s| \leq R$ $|\zeta(s)| \ll e^{CR \ln R}$.

П.о. мы найдем

$$n \ll R_1 \ln R_1 \ll R \ln R.$$

Берем $R = |p_n| \Rightarrow |p_n| \gg \frac{n}{\ln n} \Rightarrow$

$$\sum_n \frac{1}{|p_n|^{1+\varepsilon}} < +\infty.$$

Д/З:

10. Доказать, что если $\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x^d)$, то

$\zeta(s)$ не имеет нулей в области $\operatorname{Re} s > d$.

11. Доказать, что $\zeta(s) < 0$ при $0 \leq s < 1$

(из продолжения $\zeta(s)$ с помощью формулы суммирования Эйлера).

12. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^z}$ сходится при $z = z_0$, то он сходится для $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ и определяет там абсолютированную ф-ию.

(Замечание: аналогичное верно для обобщенных рядов Дирихле вида $\sum_{n=1}^{+\infty} a(n) e^{-\lambda_n z}$, где λ_n — строго возрастающая к $+\infty$ последовательность вещ.-ых чисел).

13. Доказать, что

$$S_N := \sum_{h=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{h^2}{N}} = \varepsilon_N \sqrt{N}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_N = \frac{1+i^{-N}}{1+i^{-1}}.$$

(можно решать разными способами, в т.ч. использовать ф-лу суммирования Пуассона).