

О плотнейшей упаковке шаров в размерности 8

Весна 2021 Лекция 4

Лекция 4.

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det \gamma = 1 \right\}$$

действует на $\hat{\mathbb{C}}$ группово-линейным
преобр-зом:

$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \gamma z &= \operatorname{Im} \left(\frac{ax+b+ia y}{cx+d+ia y} \right) = \frac{-(ax+b)cy + (cx+d)ay}{|cz+d|^2} = \\ &= \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}. \end{aligned}$$

Пл.о.,

$$H = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$$

инвариантна относительно $SL_2(\mathbb{R})$

$$\text{или } PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{ \pm I \}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Композиция $\mapsto \gamma_2 \cdot \gamma_2$ (произведение матриц).

Опр.: $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) / \{ \pm I \}$ наз.

модулярной группой.

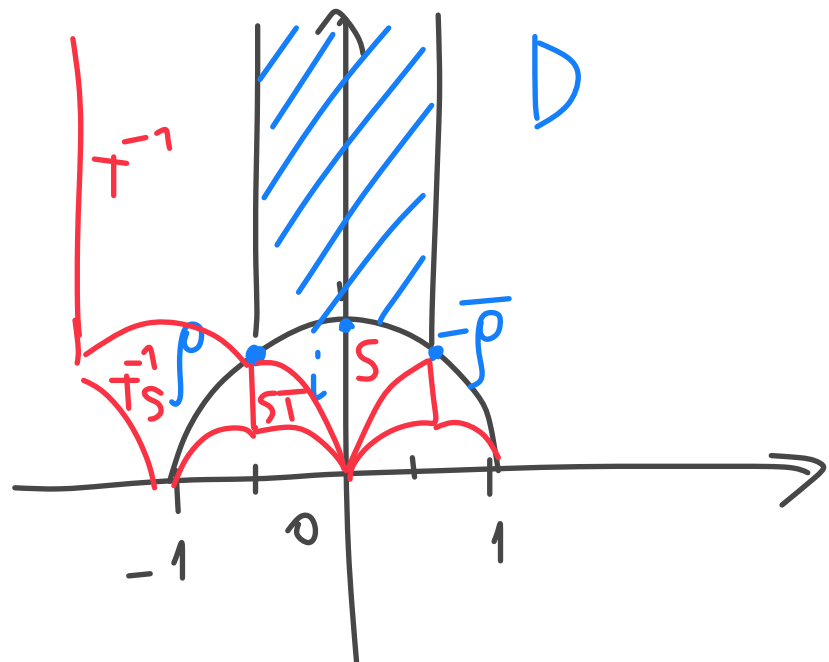
Теорема: $SL_2(\mathbb{Z})$ порождается матрицами

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Tz = z+1, \quad Sz = -\frac{1}{z}, \quad S^2 = -I)$$

Теорема: лм-во $D = \{z \in \mathbb{H} : |z| > 1, |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}\}$

явл-ся фундаментальной областью для
мод.-ой группы, т.е. любая орбита
имеет точку в $\bar{D}$, а две различные
точки в D не принадлежат одной
орбите.



$$\Gamma := \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

Замечание: если $z \in \overline{D}$ и

$\text{St}(z) = \{g \in \Gamma : g(z) = z\}$ — стабилизатор
в Γ точки z , то $\text{St}(z) = \{I\}$ за
исключением:

- 1) $z = i$, $\text{St}(i) = \langle S \rangle_2$
- 2) $z = p = e^{2\pi i/3}$, $\text{St}(p) = \langle ST \rangle_3$
- 3) $z = -\bar{p} = e^{i\pi/3}$, $\text{St}(-\bar{p}) = \langle TS \rangle_3$

Опр.: голоморфная на $\mathbb{H}$ гр-ие f наз.-ся
модулярной формой веса k относительно

$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, или $\forall \gamma \in \Gamma$ верно

$$(*) \quad f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z) \quad \text{и} \quad f(x+iy) = \begin{cases} O(e^{cy}), & y \rightarrow +\infty \\ O(e^{c/y}), & y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$\forall C > 0$.

Замечание: $f(\gamma \cdot \gamma' z) = f(\gamma(\gamma' z))$.

Замечание: $(*) \Rightarrow f(-Iz) = f(z) = (-1)^k f(z)$.

Замечание: можно рассм.-ть

более общий случай, когда

$$f(\gamma z) = \chi(\gamma) \cdot (cz+d)^k f(z).$$

П.к. $e^{2\pi i z} : \mathbb{H} \rightarrow \{0 < |q| < 1\}$, мо

получим $q = e^{2\pi i z}$, найдем

$g(q)$ - функ. в $\{0 < |q| < 1\}$:

$$f(z) = g(e^{2\pi i z})$$

П.о. $g(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n$ и

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i z n}$$

Докажем, что $a_n = 0$ при $n < 0$. с
помощью условий на рост $f(z)$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} \frac{g(t)}{t^{n+1}} dt = \int_0^1 g(\varepsilon e^{2\pi i \varphi}) \varepsilon^{-n} e^{-2\pi i n \varphi} d\varphi$$

$$|a_n| \leq \varepsilon^{-n} \int_0^1 |g(e^{2\pi i(\varphi - \frac{1}{2\pi i} \log \frac{1}{\varepsilon})})| d\varphi =$$

$$= \varepsilon^{-n} \int_0^1 |f(\varphi + \frac{i}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon})| d\varphi \leq \varepsilon^{-n} e^{C \log \frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$= \varepsilon^{-n-C} \quad \forall C > 0.$$

Если $n \leq -1$, то берём $C = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad \forall \varepsilon > 0,$

т.е. $a_n = 0$ при $n \leq -1$.

Примеры: ф-ии на решетках.

Рассм. в $\mathbb{C}$ решетку

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, \text{ где } \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}.$$

Без упр. общности будем считать,

$$\text{что } \operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0.$$

Тогда (ω_1', ω_2') с условием $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1'}{\omega_2'}\right) > 0$ определяют одну и ту же решетку $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } z' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \gamma z = \gamma \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

П.о. можно отождествить мн-во всех
 решеток Λ в $\mathbb{C}$ с факторпространством
 пространства $W = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0\}$
 по действию группы $SL_2(\mathbb{Z})$.

Пусть $\mathbb{C}^*$ действует на решетках
 $\Lambda \mapsto \lambda \Lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (\lambda \omega_1, \lambda \omega_2).$$

Тогда $W/\mathbb{C}^* = \mathbb{H} \quad ((\omega_1, \omega_2) \mapsto z = \frac{\omega_1}{\omega_2})$.

Это отождествление индуцирует
 действие $SL_2(\mathbb{Z})$ на W и действие
 $PSL_2(\mathbb{Z})$ на $\mathbb{H}$.

П.о. отображение $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}$ при
факторизации индуцирует биекцию

$$\mathbb{L}/\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

Пусть $F: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}$ и удовл.-ет

$$F(\lambda \underline{\Delta}) = \lambda^{-k} F(\underline{\Delta}) \quad \forall \underline{\Delta} \in \mathbb{L}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$$

при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

Положим $F(\omega_1, \omega_2) = F(\underline{\Delta})$, где $\underline{\Delta} = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Тогда $F(\lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-k} F(\omega_1, \omega_2)$ и

$\omega_2^k F(\omega_1, \omega_2)$ зависит лишь от $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Тл.о., $\exists f$ на $\mathbb{H}$: $F(\omega_1, \omega_2) \cdot \omega_2^k = f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$.

Поскольку $F(\omega_1, \omega_2)$ — инв-на при действии $SL_2(\mathbb{Z})$ на (ω_1, ω_2) , то

$$\begin{aligned} F(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) &= F(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \\ &= (c\omega_1 + d\omega_2)^{-k} f\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right) = \omega_2^{-k} (cz + d)^{-k} f(\gamma z), \end{aligned}$$

т.е.
$$f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z), \quad \forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$z = \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{H}.$$

Тл.о. модулярные на $\mathbb{H}$ гр-ые отождествляются с однородными гр-ыми на решетках.

Ряд Эйнштейна.

Утв.: пусть Λ — решетка в $\mathbb{C}$. Тогда

ряд $\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^\sigma}$ сходится при $\sigma > 2$.

Д-во:

пусть $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, где $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$

$$\text{Тогда} \quad \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^\sigma} = \sum_{\substack{(m,n) \neq (0,0) \\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2}} \frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^\sigma} =$$

$$= \frac{1}{|\omega_2|^\sigma} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{|\tau m + n|^\sigma}.$$

Пусть $z = a + ib$, $|a| \leq A$, $b \geq B > 0$. ($z \in D_{A,B}$)

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{|zm+n|^6} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{((am+n)^2 + (bm)^2)^3} =$$

$$1. \quad (am+n)^2 + (bm)^2 \geq (am+n)^2 + (Bm)^2$$

$$2. \quad a) \quad |n| \leq 2A|m| \Rightarrow$$

$$|zm+n|^2 \geq (Bm)^2 \geq \frac{B^2 m^2}{2} + \frac{B^2}{2 \cdot 4A^2} n^2 \geq \\ \geq (m^2 + n^2) \min \left(\frac{B^2}{2}, \frac{B^2}{8A^2} \right).$$

$$b) \quad |n| > 2A|m| \Rightarrow$$

$$|zm+n|^2 \geq (|n| - |am|)^2 + B^2 m^2 \geq \frac{n^2}{4} + B^2 m^2 \geq \\ \geq (m^2 + n^2) \min \left(\frac{1}{4}, B^2 \right).$$

Тогда, полагая $c = \left(\min \left(\frac{1}{4}, \frac{B^2}{2}, \frac{B^2}{8A^2} \right) \right)^{1/2}$,

$$|mz + n| \geq c (m^2 + n^2)^{1/2} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad z \in D_{A,B}.$$

Т.о. $\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{|mz+n|^\sigma} \ll_{A,B} \sum_{\substack{(m,n) \neq \\ (0,0)}} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\sigma/2}}$

Перепишем последнее так, что

$$\forall j=1, 2, 3, \dots \quad \max(|m|, |n|) = j \quad (\Rightarrow m^2 + n^2 \geq j^2).$$

Таких пар $\ll j$. Сл-но,

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\sigma/2}} \ll \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\sigma-1}} < \infty \quad \text{при } \sigma > 2.$$

Пример: $F(\Lambda) := \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}$

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}} \quad \mapsto$$

$$f(z) := G_{2k}(z) = \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} \frac{1}{(mz + n)^{2k}}.$$

Умб.: $G_{2k}(z)$ — модулярная форма веса $2k$. При этом $G_{2k}(\infty) = 2\mathcal{S}(2k)$, где $\mathcal{S}(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$.

$D - \infty$:

$G_{2k}(z)$ — удовле — ет условию модулярности с весом $2k$ как ф-ия, индуцированная "правильной" ф-ей на решетке.

Надо дать, что $G_{2k}(z)$ — голом.-на на H и ограничена на ∞ .

Из утв. — ие следует, что $G_{2k}(z)$ представляется рядом из голом.-ых ф-ий, равномерно сходя на $\forall$ компакте в H (и даже в H), то $G_{2k}(z)$ — голом.-на в H .

Д-ем, что G_{2k} ограничена на ∞ .

Пусть $z \in D$. Из равн.-ой с-ми следует,
что можно перейти к пределу по n .

Если $m \neq 0$ $\frac{1}{(m(x+iy)+n)^{2k}} \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty$

П.о. $G_{2k}(\infty) = a_0 = 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{2k}} = 2\zeta(2k).$

Др-во при $y \rightarrow 0$ следует из того,

что $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ и $f(-\frac{1}{z}) = f(z)z^k$
↓
модуль веса $2k$

Опр.: $M_k(\Gamma)$ — комплексное векторное
пр-во модулярных форм веса k
относительно Γ .

Опр.: $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma) := M(\Gamma)$ — градуированная
алгебра над $\mathbb{C}$ относит.-но обычного
умножения гр-ий:

если $f_1 \in M_{k_1}(\Gamma)$, $f_2 \in M_{k_2}(\Gamma)$, то

$$f_1 f_2 \in M_{k_1 + k_2}(\Gamma).$$

Д-ем, что $M_k(\Gamma)$ — конечномерное, и
 $M(\Gamma)$ — конечно — порождённое над $\mathbb{C}$.

Опр.: пусть f - мером. - ая на $\mathbb{H}$ р-ия.
 $(f \neq 0)$. Определим $v_{z_0}(f)$ - **порядок f в т. z_0**
 как целое число : $f/(z-z_0)^{v_{z_0}(f)} \neq 0$ в
 окр-ти z_0 (и во всем-на там).

Если f удовл. - ет условию модулярности
 с весом $2k$, т.е.

$$f(\gamma z) = (cz+d)^{2k} f(z), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

то $v_{z_0}(f) = v_{\gamma(z_0)}(f)$, т.е. порядок
 зависит от представителя в $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$.

Пусть f -мероморфна на ∞ (т.е. $g(q)$ -мероморфна в 0) и определим

$$\tau_{\infty}(f) = \tau_0(g).$$

Определим $e_z := |St(z)|$ (в $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$).

Теорема: пусть f -мероморфная на $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$
 q -ия, удовл.-ая условию модулярности.
с весом k (f -модулярная q -ия); $f \neq 0$.

$$\text{Тогда} \quad \tau_{\infty}(f) + \sum_{z \in \mathbb{H}/\Gamma} \frac{1}{e_z} \tau_z(f) = \frac{k}{12}.$$

Замечание:

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_j(f) +$$

*

$$+ \sum_{z \in H/\Gamma} v_z(f) = \frac{k}{12}.$$

→ нет i, j

Замечание:

функция — конечная, т.е.

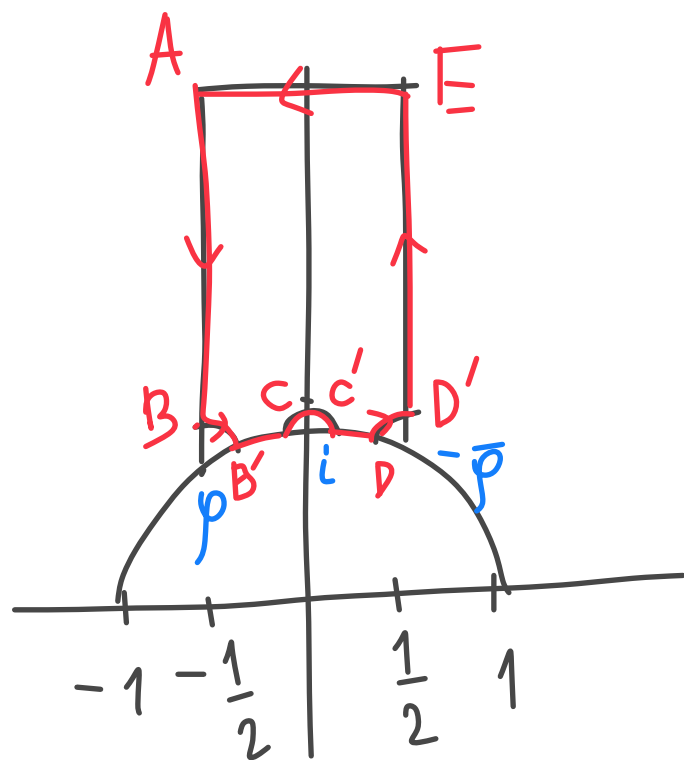
число нулей и полюсов — конечное.

D-но, т.к. $g(q)$ — мероморфная в $\{0 < |q| < 1\}$,

то $\exists \tau > 0$: у g нет нулей или полюсов
при $0 < |q| < \tau$, т.е. на H при $\text{Im } z > e^{\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\tau}}$

f не имеет нулей и полюсов. Т.к.

$\overline{D} \cap \{ \text{Im } z \leq e^{\frac{\log 1/\tau}{2\pi}} \}$ — компакт $\Rightarrow$ там лишь
конечное число нулей и полюсов



D -бо:

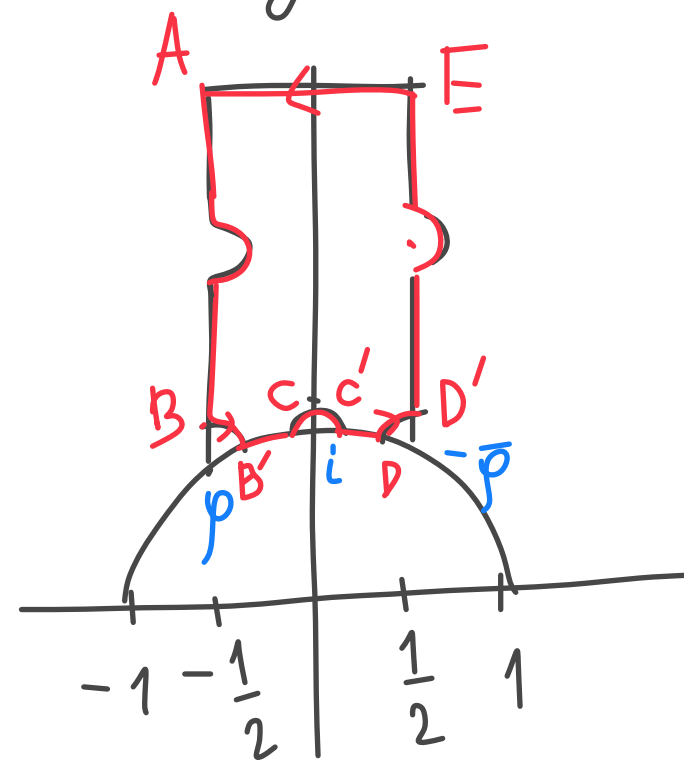
пусть f не имеет на ∂D
нулей и полюсов, кроме быть
может $i, \rho, -\bar{\rho}$.

Тогда внутри контура $\gamma = AB \dots EA$

есть по одному представителю всех нулей
и полюсов f , кроме $i, \rho, -\bar{\rho}$.

Иногда модифицируем контур:

Пусть ε - радиус окр.-ей ($\varepsilon \rightarrow 0$).



to th. Roum o barmax:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{z \in H/\Gamma}^* v_z(f).$$

1. Ho $\int_{D'}^E \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_B^A \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} dz = - \int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$

m.e. unnerpaar yurmanomca.

2. $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z),$ mo

$$\frac{df(Sz)}{f(Sz)} = \frac{df(z)}{f(z)} + k \frac{dz}{z}. \quad \text{Ifu mau}$$

$$S(B'C) \mapsto DC', \text{ m.e.}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{B'}^C \frac{df}{f} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'}^D \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{B'}^C \left(\frac{df(z)}{f(z)} - \frac{df(Sz)}{f(Sz)} \right) = \\
 & = \frac{1}{2\pi i} \int_{B'}^C (-k) \cdot \frac{dz}{z} \rightarrow \frac{k}{12}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (m.k. \angle COB' \rightarrow \frac{\pi}{6}) \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{12} \cdot 2\pi.
 \end{aligned}$$

Then $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{B_{C'}}^{B'} \frac{df}{f} \rightarrow -\frac{1}{6} \sigma_p(f)$$

$$\int_{D_{C'}}^C \frac{df}{f} \rightarrow -\frac{1}{2} \sigma_i(f)$$

$$\int_D^{D'} \frac{df}{f} \rightarrow -\frac{1}{6} \sigma_{(p+1)}(f) = -\frac{1}{6} \sigma_p(f)$$

Остаётся g -то, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_E^A \frac{df}{f} = -v_\infty(f).$$

Замена $g = e^{2\pi i z}$ преобр-ет $\Gamma \in A$ в
 окр-ть с центром в 0 , не содержащую
 нулей и полюсов f кроме 0 может
 в т. 0 , т.е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_E^A \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\odot} \frac{dg}{g} = -v_\infty(f).$$

Все g -но.

Теорема: $M_k = \{0\}$ при $k < 0$, а также
при любом нечетном k .

Если $k \geq 0$ — четное, то

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor, & k \equiv 2(12) \\ \lfloor k/12 \rfloor + 1, & k \not\equiv 2(12). \end{cases}$$

k	$\dim M_k$
0	1
2	0
4	1
6	1
8	1
10	1
12	2

k	$\dim M_k$
14	1
16	2
18	2
...	...

D/z :

14. 1) Показать, что действие $SL_2(\mathbb{R})$ на $\mathbb{H}$ транзитивно
2) Если $\gamma \in PSL_2(\mathbb{R})$, $\gamma \neq I$, то γ имеет единственную неподвижную точку в $\mathbb{H}$ при $|a+d| < 2$, иначе — не имеет.

15. Показать, что если $f(z)$ удовлетворяет св-ву
$$f(\gamma z) = f(z) \cdot (cz+d)^k, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),$$
 то
а) $|f(z)| \cdot (\text{Im } z)^{k/2}$ — инвариантна относительно $z \mapsto \gamma z$.
б) $f(z) (dz)^{k/2}$ — инв-на относ.-но $z \mapsto \gamma z$.

16. Показать, что
а) $\dim M_2(SL_2(\mathbb{Z})) = 0$,
б) Д-ть, что $f \in M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ имеет нуль
в i , если $4 \nmid k$, и нуль в ρ , если $3 \nmid k$.
в) Найти все функции $E_4(z)$, $E_6(z)$.

17. Показать, что любые три модулярные функции на Γ алгебраически независимы (т.е. любые две модулярные функции на Γ алг.-ки нез.-им).

18. До-ть, что ф-ла

$$(f|_k \gamma)(z) := (cz+d)^{-k} f(\gamma z), \quad \gamma \in SL_2(\mathbb{R}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

определяет правое действие $SL_2(\mathbb{R})$ на им-ве мероморфных ф-ий в $\mathbb{H}$.