Периодические градуировки и связанные с ними Пуассон-коммутативные подалгебры

Оксана Якимова
по совместной работе с Д.И. Панюшевым
`arXiv:2102.10065[math.RT]`

Institut für Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Москва, МГУ, Семинар “Группы Ли и теория инвариантов”
10.3.2021

Пусть $\mathfrak{q} = \mathrm{Lie}\, Q$ – комплексная алгебра Ли, $Q = Q^\circ$ – связная алгебраическая группа, $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{q}^*]$ – симметрическая алгебра алгебры $\mathfrak{q}$. Тогда на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ задана скобка Пуассона–Ли:

- $\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]$ при $\xi, \eta \in \mathfrak{q}$, продолжается на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ по правилу Лейбница;
- $\{F_1, F_2\}(\gamma) = \gamma([d_\gamma F_1, d_\gamma F_2])$, если $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, $\gamma \in \mathfrak{q}^*$;
- $\{\boldsymbol{f} + \mathcal{U}_a(\mathfrak{q}), \boldsymbol{h} + \mathcal{U}_b(\mathfrak{q})\} = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}] + \mathcal{U}_{a+b}(\mathfrak{q})$, если $\boldsymbol{f} \in \mathcal{U}_{a+1}(\mathfrak{q})$ и $\boldsymbol{h} \in \mathcal{U}_{b+1}(\mathfrak{q})$.

Третье определение скобки использует каноническую фильтрацию на $\mathcal{U}(\mathfrak{q})$ и тот факт, что $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) \cong \mathrm{gr}\, \mathcal{U}(\mathfrak{q})$.

Определение

Подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ называется Пуассон-коммутативной, если $\{A, A\} = 0$.

$$\{\boldsymbol{f} + \mathcal{U}_a(\mathfrak{q}), \boldsymbol{h} + \mathcal{U}_b(\mathfrak{q})\} = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}] + \mathcal{U}_{a+b}(\mathfrak{q}), \quad \text{если} \quad \boldsymbol{f} \in \mathcal{U}_{a+1}(\mathfrak{q}) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{h} \in \mathcal{U}_{b+1}(\mathfrak{q}).$$

Соответственно, если подалгебра $C \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})$ коммутативна, то $\mathrm{gr}(C) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ Пуассон-коммутативна. Также возникает обратная задача.

Проблема квантования. Пусть дана Пуассон-коммутативная подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$. Существует ли такая коммутативная подалгебра $\widetilde{A} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})$, что $A = \mathrm{gr}(\widetilde{A})$?

Индекс алгебры Ли и симплектические формы

Линейная функция $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ задает кососимметрическую форму $\hat{\gamma}$ на $\mathfrak{q}$ по формуле

$$\hat{\gamma}(\xi, \eta) = \gamma([\xi, \eta]) \text{ для любых } \xi, \eta \in \mathfrak{q}.$$

Пусть $\mathfrak{q}_\gamma = \operatorname{Lie} Q_\gamma = \ker \hat{\gamma}$ – стабилизатор точки γ. Форма $\hat{\gamma}$ невырождена на $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_\gamma \cong T^*_\gamma(Q\gamma)$.

Число $\operatorname{ind} \mathfrak{q} = \min\limits_{\gamma \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\gamma = \dim \mathfrak{q} - \max_{\gamma \in \mathfrak{q}^*} \dim(Q\gamma)$ называется *индексом* алгебры $\mathfrak{q}$.

Положим $\mathfrak{q}^*_{\text{reg}} = \{\gamma \in \mathfrak{q}^* \mid \dim \mathfrak{q}_\gamma = \operatorname{ind} \mathfrak{q}\}$, $\mathfrak{q}^*_{\text{sing}} = \mathfrak{q}^* \setminus \mathfrak{q}^*_{\text{reg}}$,

$$\boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{q} + \operatorname{ind} \mathfrak{q}) = \frac{1}{2} \max_{\gamma \in \mathfrak{q}^*} \operatorname{rk} \hat{\gamma} + \operatorname{ind} \mathfrak{q}.$$

Заметим, что $\boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) \in \mathbb{Z}$, так как $\operatorname{rk} \hat{\gamma} = \dim(Q\gamma)$ чётное число.

$\{F_1, F_2\}(\gamma) = \gamma([d_\gamma F_1, d_\gamma F_2]) = \hat{\gamma}(d_\gamma F_1, d_\gamma F_2)$, если $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, $\gamma \in \mathfrak{q}^*$.

Для $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ положим $d_\gamma A := \langle d_\gamma F \mid F \in A \rangle_{\mathbb{C}}$.

Предположим $\{A, A\} = 0$, тогда $\hat{\gamma}(d_\gamma A, d_\gamma A) = 0$ и следовательно

1. $\dim d_\gamma A \leqslant \frac{1}{2} \dim(Q\gamma) + \dim \mathfrak{q}_\gamma$.
2. Поэтому $\operatorname{tr.deg} A \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$.
3. Кроме того, $A|_{Q\gamma}$ – Пуассон-коммутативная подалгебра.

Определение

Пуассон-коммутативная подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ *полна* на орбите $Q\gamma$, если $\operatorname{tr.deg}(A|_{Q\gamma}) = \frac{1}{2} \dim(Q\gamma)$.

Если $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ Пуассон-коммутативна и $\operatorname{tr.deg} A = \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$, то A полна на орбите общего положения.

Неформальный вывод: *интересно изучать Пуассон-коммутативные подалгебры максимальной степени трансцендентности*.

Предложение (А. Молев – О.Я., 2019)

Для любой подалгебры Ли $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{q}$ *и любой Пуассон-коммутативной подалгебры* $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{l}}$ *выполнено* $\operatorname{tr.deg} A \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) - \boldsymbol{b}(\mathfrak{l}) + \operatorname{ind} \mathfrak{l}$.

Заметим, что $\boldsymbol{b}(\mathfrak{l}) \geqslant \operatorname{ind} \mathfrak{l}$ и $\boldsymbol{b}(\mathfrak{l}) = \operatorname{ind} \mathfrak{l}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{l}$ абелева.

Зачем рассматривать Пуассон-коммутативные подалгебры в $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{l}}$?

1. У квантований таких подалгебр могут возникнуть приложения в теории представлений, в частности, при описании правил ветвления $\operatorname{Res}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{l}}$.
2. Поскольку $\dim \mathfrak{l} < \infty$, существует такая Пуассон-коммутативная подалгебра $C \subset \mathcal{S}(\mathfrak{l})$, что $\operatorname{tr.deg} C = \boldsymbol{b}(\mathfrak{l})$ – гипотеза Мищенко-Фоменко, доказанная Садэтовым. Добавив к C Пуассон-коммутативную подалгебру $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{l}}$, у которой
$$\operatorname{tr.deg} A = \boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) - \boldsymbol{b}(\mathfrak{l}) + \operatorname{ind} \mathfrak{l} \text{ (если она существует)},$$
мы получим нечто Пуассон-коммутативное со степенью трансцендентности $\boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$.

Симметрические инварианты

Рассмотрим алгебру $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} = \mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \{H \mid \{\mathfrak{q}, H\} = 0\} = \mathbb{C}[\mathfrak{q}^*]^Q$. Как алгебра и как Q-модуль она изоморфна центру $\mathcal{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{q}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})$. Многие конструкции Пуассон-коммутативных подалгебр используют $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$.

Всегда $\operatorname{tr.deg} \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} \leqslant \operatorname{ind} \mathfrak{q}$. Для многих конструкций необходимо равенство $\operatorname{tr.deg} \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$. (Это довольно безобидное условие, если инвариантов не хватает, можно взять полуинварианты.)

Если $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ редуктивна, то $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \operatorname{rk} \mathfrak{g} =: \ell$ и $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_\ell]$, где многочлены H_i однородны и алгебраически независимы.

Напомним также, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$.

Согласованные скобки Пуассона

Определение

Две скобки Пуассона на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ *согласованы*, если любая их линейная комбинация снова является скобкой Пуассона. (Достаточно проверить для суммы.)

Пример. С точкой $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ связана скобка $\{\ ,\ \}_\gamma$, для которой

$$\{\xi, \eta\}_\gamma = \gamma([\xi, \eta]),\text{ если } \xi, \eta \in \mathfrak{q}.$$

Скобки $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_\gamma$ согласованы.

По двум согласованным скобкам строится Пуассон-коммутативная подалгебра по “схеме Ленарда-Магри".

Допустим, что $\{\ ,\ \}_t = \{\ ,\ \}_I + t\{\ ,\ \}_{II}$ при $t \in \mathbb{C}$ и $\{\ ,\ \}_\infty = \{\ ,\ \}_{II}$ порождают 2-мерный пучок согласованных скобок.

Пусть π_t ($t \in \mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) – это тензор Пуассона (бивектор) скобки $\{\ ,\ \}_t$, то есть

$$\pi_t(dF \wedge dH) = \{F, H\}_t, \quad \text{если} \quad F, H \in \mathcal{S}(\mathfrak{q}).$$

Положим $\operatorname{rk} \pi_t = \max\limits_{\gamma \in \mathfrak{q}^*} \operatorname{rk} \pi_t(\gamma)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{reg}} = \{t \in \mathbb{P} \mid \operatorname{rk} \pi_t \geqslant \operatorname{rk} \pi_{t'} \ \forall t' \in \mathbb{P}\}$.

Алгебра $\mathcal{A} = \mathsf{alg}\langle \mathcal{Z}_t = \mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q}, \{\ ,\ \}_t) \mid t \in \mathbb{P}_{\mathrm{reg}} \rangle$ Пуассон-коммутативна относительно любой из скобок $\{\ ,\ \}_t$.

Выбор второй скобки

Пусть $\{\ ,\ \}_I$ – это обычная скобка Пуассона-Ли на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$. В качестве $\{\ ,\ \}_{II}$ можно взять:

- $\{\ ,\ \}_\gamma$, $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ (скобка степени ноль, так возникают подалгебры Мищенко-Фоменко);
- некоторую линейную скобку, то есть, другую структуру алгебры Ли на пространстве $\mathfrak{q}$, например,
  - если $\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}$ подалгебры Ли, то $\{\ ,\ \}_I$ стягивается к скобке алгебры $\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}$, согласованной с первой,
  - если $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1$ – это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировка (симметрическое разложение), то $\{\ ,\ \}_I$ стягивается к скобке алгебры $\mathfrak{q}_0 \ltimes \mathfrak{q}_1^{\mathrm{ab}}$,
  - аналогичная конструкция приводит к согласованной скобке в случае автоморфизма любого конечного порядка m (то есть, при наличии $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировки),

  полная классификация неизвестна;
- скобку большей степени (наука разрабатывается).

Периодические градуировки

Пусть $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{q}_{m-1}$ – это $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$-градуировка, где $m \geqslant 2$. Выберем примитивный корень $\zeta = \sqrt[m]{1}$ и положим $\theta(\xi) = \zeta^k \xi$ для $\xi \in \mathfrak{q}_k$. Тогда $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{q})$ – автоморфизм порядка m. *Каждому автоморфизму конечного порядка m соответсвует $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$-градуировка.*

Рассмотрим представление $\varphi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}(\mathfrak{q})$, для которого $\varphi_s(\xi) = s^k \xi$ при $\xi \in \mathfrak{q}_k$. Пусть $\xi \in \mathfrak{q}_k$, $\eta \in \mathfrak{q}_r$, тогда

- $\{\varphi_s(\xi), \varphi_s(\eta)\} = \varphi_s(\{\xi, \eta\})$, если $k + r < m$; и
- $\{\varphi_s(\xi), \varphi_s(\eta)\} = s^m \varphi_s(\{\xi, \eta\})$, если $k + r \geqslant m$.

При $s \in \mathbb{C}^\times$ определим скобку Пуассона $\{\ ,\ \}_{(s)}$ на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ по формуле

$$\{\xi, \eta\}_{(s)} = [\xi, \eta]_{(s)} = \varphi_s^{-1}(\{\varphi_s(\xi), \varphi_s(\eta)\}) \ \text{для}\ \ \xi, \eta \in \mathfrak{q}.$$

Легко видеть, что $(\mathfrak{q}, [\ ,\ ]) \cong (\mathfrak{q}, [\ ,\ ]_{(s)})$. Кроме того,

$$\{\ ,\ \}_{(s)} = \{\ ,\ \}_0 + s^m \{\ ,\ \}_\infty,$$

где $\{\ ,\ \}_0$ и $\{\ ,\ \}_\infty$ согласованные скобки Пуассона на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$.

По автоморфизму конечного порядка m строится семейство согласованных скобок Пуассона $\{\ ,\ \}_{(s)} = \{\ ,\ \}_0 + s^m\{\ ,\ \}_\infty$. Здесь $\{\ ,\ \}_0 = \lim\limits_{s\to 0}\{\ ,\ \}_{(s)}$ и $\{\ ,\ \}_\infty = \{\ ,\ \} - \{\ ,\ \}_0$. Заменим s^m на t. Теперь $\{\ ,\ \}_t = \{\ ,\ \}_0 + t\{\ ,\ \}_\infty$ при $t \in \mathbb{C}$. Аналогично поступим и с коммутаторами Ли.

Напомним, что $(\mathfrak{q}, [\ ,\ ]) \cong (\mathfrak{q}, [\ ,\ ]_t)$, если $t \neq 0, \infty$. В частности, $\mathbb{C}^\times \subset \mathbb{P}_{\text{reg}}$. В семействе $(\mathfrak{q}, [\ ,\ ]_t)$ есть две выделенные точки, 0 и ∞.

Обе алгебры, $(\mathfrak{q}, [\ ,\ ]_0)$ и $(\mathfrak{q}, [\ ,\ ]_\infty)$, $\mathbb{N}_0$-градуированы. Они являются *стягиваниями* алгебры $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{q}_{m-1}$.

В нуле имеем

$[\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_r]_0 = [\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_r] \subset \mathfrak{q}_{k+r}$, если $k + r < m$; и $[\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_r]_0 = 0$, если $k + r \geqslant m$.

В бесконечности:

$[\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_r]_\infty = [\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_r] \subset \mathfrak{q}_{k+r-m}$, если $k+r \geqslant m$; и $[\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_r]_\infty = 0$ при $k+r < m$.

Согласно общему методу, алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{q}, \theta) = \mathsf{alg}\langle \mathcal{Z}_t \mid t \in \mathbb{P}_{\text{reg}}\rangle$ Пуассон-коммутативна. Отметим, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}_0}$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли; $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{m-1}$ – это $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировка, связанная с автоморфизмом $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ порядка m, где $m \geqslant 2$. В этом случае, $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ редуктивная подалгебра.
Положим $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta)$. Напомним, что $\mathrm{ind}\,\mathfrak{g} = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ и что $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$ и следовательно $\mathrm{tr.deg}\,\mathcal{A} \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}) - \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}_0) + \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}_0 =: \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}, \theta)$ (Молев – О.Я.).

Теорема (Д. Панюшев – О.Я.)

Если $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, *то* $\mathrm{tr.deg}\,\mathcal{A} = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}, \theta)$.

Замечание

Верно и обратное, если $\mathrm{tr.deg}\,\mathcal{A} = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}, \theta)$, то $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

Что мы знаем про индекс алгебры $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0)$?

– Всегда $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) \geqslant \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

– Если $m = 2$, то $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ (Панюшев, 2007);

– другие случаи с равенством: внутренние автоморфизмы $\mathfrak{sl}_n$; при m=3.

Индекс загадочен!

Индекс в бесконечности

Заметим, что $\mathfrak{g}_0$ лежит в центре алгебры $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\infty)$.

Теорема (Д. Панюшев – О.Я.)

Для любого автоморфизма $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ конечного порядка выполнено: $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\infty) = \dim \mathfrak{g}_0 + \mathrm{rk}\, \mathfrak{g} - \mathrm{rk}\, \mathfrak{g}_0$. В частности, $\infty \in \mathbb{P}_{\mathrm{reg}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}_0$ абелева.

Если подалгебра $\mathfrak{g}_0$ абелева, то с точностью до сопряжения $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{t}$, где $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ – картановская подалгебра. Если при этом автоморфизм θ внутренний, то $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$.

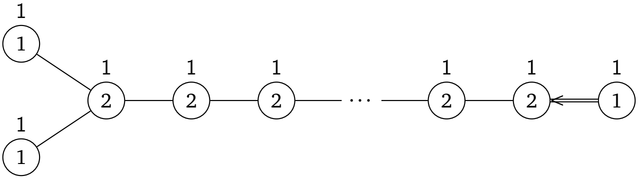
От включения $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{t}$ имеется очевидная польза.

Если $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) = \mathrm{rk}\, \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$ абелева, то $\mathbb{P}_{\mathrm{reg}} = \mathbb{P}$, $\boldsymbol{b}(\mathfrak{g}, \theta) = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$, и $\mathrm{tr.deg}\, \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta) = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$.

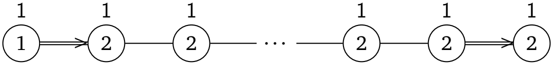
Автоморфизмы конечного порядка классифицированы (В.Г. Кац).

Внешние автоморфизмы в типе A, схемы Каца

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{sp}_{2n}$, $n \geqslant 2$, порядок θ равен $4(n-1)$



$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n+1}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{so}_{2n+1}$, порядок θ равен $4n+2$



Образующие алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta)$

Будем считать, что $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, то есть $\mathrm{tr.deg}\,\mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta) = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}, \theta)$.

Напомним: $\mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta) = \mathsf{alg}\langle \mathcal{Z}_t \mid t \in \mathbb{P}_{\rm reg}\}$, где $\mathcal{Z}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{S}(\mathfrak{g}), \{\ ,\ \}_t)$. При $t \ne 0, \infty$ имеем $\mathcal{Z}_t = \varphi_s^{-1}(\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$, где $s^m = t$ и $\varphi_s \colon \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ продолжено с $\mathfrak{g}$, на которой $\varphi_s|_{\mathfrak{g}_k} = s^k \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_k}$.

Рассмотрим также алгебру

$$\mathcal{A}_\times = \mathsf{alg}\langle \mathcal{Z}_t \mid t \in \mathbb{C}^\times\} = \mathsf{alg}\langle \varphi_s(\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) \mid s \in \mathbb{C}^\times\rangle.$$

Из некоторых общих соображений, $\mathrm{tr.deg}\,\mathcal{A}_\times = \mathrm{tr.deg}\,\mathcal{A}$.

Для начала попробуем описать образующие алгебры $\mathcal{A}_\times$.

Как известно, $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_\ell]$, где $\ell = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ и все H_i однородны; если $d_j = \deg H_j$, то $\sum_{j=1}^{\ell} d_j = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$. Без ограничения общности, $\theta(H_j) = \zeta^{r_j} H_j$. При помощи φ_s определим биградуировку на $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

Распишем $H_j = \sum_{i \geqslant 0} H_{j,i}$, где $\varphi_s(H_{j,i}) = s^i H_{j,i}$. Здесь $H_{j,i} \ne 0$ только если $i \in r_j + m\mathbb{Z}$. Скажем, что $\deg_\varphi H_{j,i} = i$, обозначим через $H_j^\bullet$ старшую (ненулевую) φ-компоненту H_j, и положим $d_j^\bullet = \deg_\varphi H_j^\bullet$.

Обозначения: $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_\ell]$, $H_j = \sum_{i \geqslant 0} H_{j,i}$, где $\varphi_s(H_{j,i}) = s^i H_{j,i}$, каждый многочлен $H_{j,i}$ однороден (как и H_j) и $\deg H_{j,i} = \deg H_j = d_j$, если $H_{j,i} \neq 0$.

Утверждение

(1) $\mathcal{A}_\times = \mathrm{alg}\langle H_{j,i} \mid 1 \leqslant j \leqslant \ell, 0 \leqslant i \leqslant d_j^\bullet \rangle$.

(2) Имеем $H_j^\bullet \in \mathcal{Z}_0$ для каждого j.

Док-во. Первый факт – стандартное применение определителя Вандермонда. Второй доказывается рассмотрением предела в нуле. □

Определение

Назовём автоморфизм θ *хорошим*, если существует такой набор образующих H_j, что $\theta(H_j) = \zeta^{r_j} H_j$ и старшие φ_s-компоненты $H_j^\bullet$ алгебраически независимы.

Факт. Условие $\theta(H_j) = \zeta^{r_j} H_j$ можно из определения хорошести выкинуть, класс хороших автоморфизмов от этого не изменится.

Лемма

Старшие φ_s-компоненты $H_j^\bullet$ алгебраически независимы тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{\ell} d_j^\bullet = \sum_{k=1}^{m-1} k \dim \mathfrak{g}_k =: D_\theta$.

Теорема (Д. Панюшев – О.Я.)

Если автоморфизм θ хороший и $\theta(H_j) = \zeta^{r_j} H_j$, причём $0 \leqslant r_j < m$, то биоднородные компоненты $H_{j,d_j^\bullet}, H_{j,d_j^\bullet - m}, \ldots, H_{j,r_j}$ с $1 \leqslant j \leqslant \ell$ свободно порождают алгебру $\mathcal{A}_\times$.

Идея доказательства: пересчитать компоненты.

Некоторые факты.

◇ Если $\sum_{j=1}^{\ell} d_j^\bullet \leqslant D_\theta$, то $\sum_{j=1}^{\ell} d_j^\bullet = D_\theta$ и θ хороший автоморфизм.

◇ Почти все **инволюции** хорошие. Существует 4 исключения, это инволюции особых алгебр типа E.

◇ Автоморфизм третьего порядка алгебры типа G_2 – хороший.

◇ Внешний автоморфизм третьего порядка алгебры $\mathfrak{so}_8$ – нехороший.

В дальнейшем будем считать, что автоморфизм θ хороший.

Напомним, что π_t ($t \in \mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) – это тензор Пуассона скобки $\{\ ,\ \}_t = \{\ ,\ \}_0 + t\{\ ,\ \}_\infty$, $\operatorname{rk} \pi_t = \max\limits_{\gamma \in \mathfrak{g}^*} \operatorname{rk} \pi_t(\gamma)$.

Положим

$$\mathfrak{g}^*_{(t),\mathsf{sing}} = \{\xi \in \mathfrak{g}^* \mid \operatorname{rk} \pi_t(\xi) < \operatorname{rk} \pi_t\} \text{ при } t \in \mathbb{P}.$$

Утверждение (Д. Панюшев – О.Я.)

Если $\dim \mathfrak{g}^*_{(0),\mathsf{sing}} \leqslant \dim \mathfrak{g} - 2$, то $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{C}[H_1^\bullet, \ldots, H_\ell^\bullet]$, где $H_1, \ldots, H_\ell$ – это образующие алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, у которых $\sum_{j=1}^{\ell} d_j^\bullet = D_\theta$.

Следствие

Пусть $\dim \mathfrak{g}^*_{(0),\mathsf{sing}} \leqslant \dim \mathfrak{g} - 2$ *и* $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq 0$. *Тогда* $\infty \notin \mathbb{P}_{\rm reg}$ *и* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\times$ *свободно порождается компонентами* $H_{j,i}$.

Следствие

Пусть $\dim \mathfrak{g}^*_{(0),\mathsf{sing}} \leqslant \dim \mathfrak{g} - 2$, *$\theta$ внутренний и* $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$. *Тогда* $\mathcal{Z}_\infty = \mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)$ *и алгебра* $\mathcal{A} = \mathsf{alg}\langle \mathcal{A}_\times, \mathfrak{g}_0 \rangle$ *тоже свободна.*

Следствие

Пусть $\dim \mathfrak{g}^*_{(0),\mathrm{sing}} \leqslant \dim\mathfrak{g}-2$*,* θ *внутренний и* $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$*. Тогда* $\mathcal{Z}_\infty = \mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)$ *и алгебра* $\mathcal{A} = \mathrm{alg}\langle \mathcal{A}_\times, \mathfrak{g}_0 \rangle = \mathrm{alg}\langle \mathcal{A}, \mathfrak{t} \rangle$ *тоже свободна.*

Док-во. Так как $\mathfrak{g}_0$ лежит в центре алгебры $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\infty)$, имеем $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_0) \subset \mathcal{Z}_\infty$. Так как θ внутренний, $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\infty) = \dim \mathfrak{g}_0 = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. Следовательно $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_0) \subset \mathcal{Z}_\infty$ – это алгебраическое расширение. Поскольку подалгебра $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)$ алгебраически замкнута в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, получаем $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}_\infty$.

Если $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$, то число ненулевых компонент вида $H_{j,0} \in \mathcal{S}(\mathfrak{t})$ равно $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. Если заменить их на базис $\mathfrak{t}$, то алгебра останется свободной. □

Поскольку $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$, алгебра $\tilde{\mathcal{A}} := \mathrm{alg}\langle \mathcal{A}, \mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{g}_0} \rangle$ тоже Пуассон-коммутативна. Если θ – **хорошая инволюция**, то $\tilde{\mathcal{A}}$ – максимальная (по включению) Пуассон-коммутативная подалгебра в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$.

При $m \geqslant 3$ дела обстоят не так просто.

Рассмотрим следующие условия:

($\Diamond_1$) $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, то есть, $0 \in \mathbb{P}_{\mathrm{reg}}$;

($\Diamond_2$) $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{C}[H_1^\bullet, \ldots, H_\ell^\bullet]$, где $H_1, \ldots, H_\ell$ – образующие алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$;

($\Diamond_3$) $\dim \mathfrak{g}^*_{(0),\mathrm{sing}} \leqslant \dim\mathfrak{g} - 2$;

($\Diamond_4$) либо $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq 0$, либо $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$.

Тут $(\Diamond_1) \wedge (\Diamond_3) \Rightarrow (\Diamond_2)$. Если условия ($\Diamond_1$), ($\Diamond_2$) выполнены, то алгебра $\tilde{\mathcal{A}}$ свободна.

Предложение (Д. Панюшев – О.Я.)

Если условия ($\Diamond_1$)–($\Diamond_4$) выполнены, то и алгебра $\tilde{\mathcal{A}}$ свободна.

Теорема (Д. Панюшев – О.Я.)

Предположим ($\Diamond_1$), ($\Diamond_2$), ($\Diamond_3$) выполнены. Если $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^*_{\mathrm{sing}}$ не содержит дивизоров, то $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{g}_0} \subset \mathcal{A}_\times$ и $\mathcal{A}_\times = \mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$ максимальная Пуассон-коммутативная подалгебра в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$.

Свойства θ-групп (Э.Б. Винберг)

Пусть $G_0 \subset G$ связная подгруппа с Lie $G_0 = \mathfrak{g}_0$. Тогда G_0 действует на $\mathfrak{g}_1$.

- Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_1]^{G_0}$ свободна;
- морфизм факторизации $\pi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1 /\!\!/ G_0 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\mathfrak{g}_1]^{G_0})$ сюрьективен и является плоским;
- $\pi^{-1}(\pi(0)) = \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}_1$ и любой слой π содержит конечное число G_0-орбит.

Определение

(1) θ *$\mathcal{S}$-регулярен*, если $\mathfrak{g}_1$ содержит регулярный полупростой элемент алгебры $\mathfrak{g}$;

(2) θ *$\mathcal{N}$-регулярен*, если $\mathfrak{g}_1$ (то есть $\mathcal{N}_1$) содержит регулярный нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$;

(3) θ *сильно $\mathcal{N}$-регулярен*, если каждая неприводимая компонента нуль-конуса $\mathcal{N}_1$ содержит регулярный нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$.

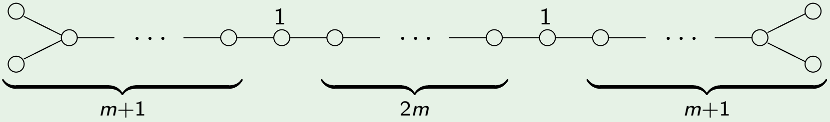
Теорема (Д.И. Панюшев, 2009)

- *Если* $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{ind}(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$;
- *Если* θ $\mathcal{S}$*-регулярен и сильно* $\mathcal{N}$*-регулярен, то*
  - $\dim \mathfrak{g}^*_{(0),\mathrm{sing}} \leqslant \dim\mathfrak{g} - 2$;
  - $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{C}[H_1^\bullet, \ldots, H_\ell^\bullet]$, *где* $H_1, \ldots, H_\ell$ *– произвольные однородные образующие алгебры* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$*, являющиеся собственными векторами* θ.

Примеры ($\mathcal{S}$-регулярные сильно $\mathcal{N}$-регулярные автоморфизмы)

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{mn}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}_n^{\oplus m}$, порядок θ равен m.

(2) Пусть $\mathfrak{g}$ алгебра типа D_{4m+3}, θ внутренний автоморфизм порядка 4 с $\mathfrak{g}_0$ типа $\mathsf{D}_{m+1} + \mathsf{D}_{m+1} + \mathsf{A}_{2m} + \mathbb{C}$. Диаграмма Каца:



В обоих случаях алгебры $\mathcal{A}_\times = \mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ свободны.

Пусть теперь $\mathfrak{h}$ – простая (неабелева) алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\oplus m}$ – прямая сумма m копий $\mathfrak{h}$ $(m \geqslant 2)$. В качестве θ возьмём циклическую перестановку слагаемых. Тогда $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{h}$ как алгебра Ли, $\mathfrak{g}_k \cong \mathfrak{h}$ как векторное пространство и как $\mathfrak{g}_0$-модуль для любого k. Далее

$$\mathfrak{g}_{(0)} := (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) \cong \mathfrak{h}\langle m\rangle := \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]/(t^m) = \mathfrak{h}[t]/(t^m).$$

Эта алгебра известна также под именем *обобщенной алгебры Такифа*.

Имеем $\operatorname{ind} \mathfrak{g}_\infty = m \cdot \operatorname{rk} \mathfrak{h} = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$ (Raïs–Tauvel), $\mathfrak{g}_0$ неабелева, следовательно $\mathbb{P}_{\mathrm{reg}} = \mathbb{C}$. Кроме того,

$\operatorname{tr.deg} \mathcal{A} = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}, \theta) = \frac{1}{2}((m-1)\dim \mathfrak{h} + (m+1)\operatorname{rk} \mathfrak{h}) = (m-1)\boldsymbol{b}(\mathfrak{h}) + \operatorname{rk} \mathfrak{h}$
для $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta)$.

Замечание (интересное наблюдение)

Имеем $\mathfrak{g}_{(\infty)} := (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\infty) \cong \mathfrak{h}\langle m+1\rangle^u$ (где $\mathfrak{h}\langle m+1\rangle^u \lhd \mathfrak{h}\langle m+1\rangle^u$ – это нильпотентный радикал). Откуда, с помощью теоремы об “индексе в бесконечности”, получаем

$$\operatorname{ind} \mathfrak{h}\langle m\rangle^u = \dim \mathfrak{h} + (m-2)\operatorname{rk} \mathfrak{h}.$$

Свойства алгебры $\mathcal{A}$:

- $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\times$ – свободная алгебра,
- $\mathcal{A}$ максимальная (по включению) Пуассон-коммутативная подалгебра в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$,
- у алгебры $\mathcal{A}$ есть квантование.

Положим $\widehat{\mathfrak{h}}_- = t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}] \cong \mathfrak{h}[t, t^{-1}]/\mathfrak{h}[t]$,

$$\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}}) = \mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}}_-)^{\mathfrak{h}[t]}.$$

Известно, что $\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}})$ это кольцо многочленов от бесконечного числа переменных, $\{\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}}), \bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}})\} = 0$. Более того, образующие кольца $\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}})$ можно описать явно.

Подстановка $t = 1$ задаёт отображение $\mathrm{Ev}_1 : \mathcal{S}(\mathfrak{h}t^{-1}) \to \mathcal{S}(\mathfrak{h})$. Для $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$ положим $F[-1] := \mathrm{Ev}_1^{-1}(F) \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}[-1])$. Поскольку $\mathfrak{h}$ редуктивна, имеем $\mathcal{S}(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}} = \mathbb{C}[F_1, \dots, F_r]$, где $r = \operatorname{rk}\mathfrak{h}$.

Утверждение (бесконечномерное обобщение т-мы Раиса-Товеля)

Имеем $\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}}) = \mathbb{C}[\partial_t^k F_i[-1] \mid 1 \leqslant i \leqslant r,\ 0 \leqslant k]$.

Мы рассматриваем $\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}}) \subset \mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}}_-)$, где $\widehat{\mathfrak{h}} = t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]$.
Заметим, что $\widehat{\mathfrak{h}}_-/(t^{-n}-1) \cong \mathfrak{g}$.

Утверждение (Д. Панюшев – О.Я.)

Образ $\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}})$ в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ совпадает с $\mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta)$.

Далее, $\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}}) = \mathrm{gr}(\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{h}}))$, где $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{h}}) \subset \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}}_-)$ – это *центр Фейгина-Френкеля*.
Образ $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{h}})$ в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ известен как *подалгебра Годена* $\mathcal{G}(\vec{z})$, *соответствующая набору* $\vec{z} = (1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1})$, где $\zeta = \sqrt[n]{1}$ – примитивный корень.

Теорема (Д. Панюшев – О.Я.)

Имеем $\mathrm{gr}(\mathcal{G}(\vec{z})) = \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \theta)$.

Замечание

При помощи другого фактора алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{h}})$ Л. Рыбников нашел квантования алгебр Мищенко-Фоменко, решив тем самым проблему Винберга.

Можно ли скрутить центр Фейгина-Френкеля?

Теперь $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ (порядок θ равен m), $\zeta = \sqrt[m]{1}$ – примитвный корень. Положим $\theta(t) = \zeta^{-1}t$, $\theta(t^{-1}) = \zeta t^{-1}$. Тогда θ действует на $\mathfrak{h}[t, t^{-1}]$. Пусть $\mathfrak{h}[t, t^{-1}]^{\theta} = (\mathfrak{h}[t, t^{-1}])^{\vartheta}$, $\widehat{\mathfrak{h}}_{-}^{\theta} := (\widehat{\mathfrak{h}}_{-})^{\theta} \cong (\mathfrak{h}[t, t^{-1}]/\mathfrak{h}[t])^{\theta}$. Тогда $(\mathfrak{h}[t])^{\theta}$ действует на $\widehat{\mathfrak{h}}_{-}^{\theta}$ и следовательно на $\mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}}_{-}^{\theta})$.

Алгебру инвариантов $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{h}}_{-}, \theta) := \mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}}_{-}^{\theta})^{(\mathfrak{h}[t])^{\theta}}$ можно рассматривать как подкрученную (на θ) версию алгебры $\bar{\mathfrak{z}}(\widehat{\mathfrak{h}})$.

- $\diamond$ Алгебра $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{h}}_{-}, \theta)$ довольно большая, она имеет бесконечную степень трнсцендентности.
- $\diamond$ Но вот можно ли её проквантовать?
- $\diamond$ Верно ли, что $\{\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{h}}_{-}, \theta), \mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{h}}_{-}, \theta)\} = 0$?

Нам понадобятся некоторые новые объекты.

Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\oplus n}$, определим автоморфизм $\tilde{\theta} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ как композицию автоморфизма θ, примененного только к первому слагаемому, и циклической перестановки.

Положим $\mathfrak{g}_{(0)} = (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0)$ относительно $\tilde{\theta}$.

Имеем $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}[t]^{\theta}/(t^{nm} - 1) \cong \widehat{\mathfrak{h}}_{-}^{\theta}/(t^{-nm} - 1)$ и $\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{h}[t]^{\theta}/(t^{nm})$.

Бесконечномерное применение равенства для индекса

Теорема (Д. Панюшев – О.Я.)

Если $\operatorname{ind}(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{(0)}) = \operatorname{rk}\mathfrak{h}$, *то алгебра* $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{h}}_-, \theta)$ *Пуассон-коммутативна.*

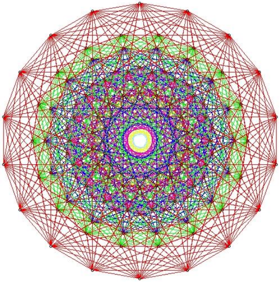
Набросок док-ва. При $N = nm$

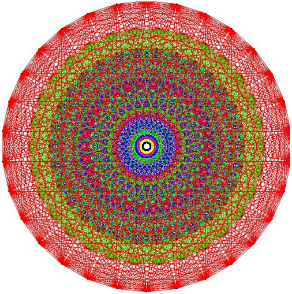
$$\mathbb{W}_N := (\mathfrak{h}t^{-N} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}t^{-1})^\theta \subset \widehat{\mathfrak{h}}_-^\theta.$$

Алгебра $\mathfrak{h}[t]^\theta$ действует на $\mathbb{W}_N$ как её фактор $\mathfrak{g}_{(0)}$ и $\mathbb{W}_N \simeq \mathfrak{g}_{(0)}$ как $\mathfrak{g}_{(0)}$-модуль. Следовательно $\mathcal{S}(\mathbb{W}_N)^{\mathfrak{h}[t]^\theta} \cong \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{(0)})^{\mathfrak{g}_{(0)}}$ как алгебра.

Если $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}}_-^\theta)$, то найдется такое $N' = n'm$, что $f_1, f_2 \in \mathbb{W}_{N'}$. Положим $n = 2n'$. Тогда $\{f_1, f_2\} = 0 \Leftrightarrow \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\} = 0$ для образов элеметов f_1, f_2 в $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{S}(\widehat{\mathfrak{h}}_-^\theta)/(t^{-N} - 1)$.

Если $f_1, f_2 \in \mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{h}}_-, \theta)$, то $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{(0)})^{\mathfrak{g}_{(0)}}$. Из предположения $\operatorname{ind}(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_{(0)}) = \operatorname{rk}\mathfrak{h}$ следует, что $\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)} = \operatorname{rk}\mathfrak{g}$ и поэтому $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{(0)})^{\mathfrak{g}_{(0)}}$ содержится в Пуассон-коммутативной подалгебре $\mathcal{A}(\mathfrak{g}, \tilde{\theta}) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Получаем $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\} = 0$. $\square$





Спасибо за внимание!