О плотнейшей упаковке шаров в размерности 8

Весна 2021 Лекция 5

Лекция 5.

В прошлый раз доказали след.-ую теорему.

Теорема: пусть f – мероморфная на $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ ф-ия, удовл.-ая условию модулярности с весом k (f – модулярная ф-ия); $f \neq 0$.

Тогда
$$v_\infty(f) + \sum_{z \in \mathbb{H}/\Gamma} \frac{1}{e_z} v_z(f) = \frac{k}{12}.$$

Применим её для вычисления размерности пр-ва $M_k(\Gamma)$.

Пусть $f \neq 0$, $f \in M_k(SL_2(\mathbb{Z})) \Rightarrow v_z(f) \geq 0 \Rightarrow$ $k \geq 0$.

Также $k \neq 2$ ввиду отсутствия решений

$$\frac{1}{6} = n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3}, \quad n_i \geq 0.$$

Если k — нечётное, то $M_k = \{0\}$ из св-ва модулярности относительно $SL_2(\mathbb{Z})$.

Пусть $k = 4$ $\Rightarrow \exists\ G_4(z) \in M_4$.

$$\frac{1}{3} = n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3} \Rightarrow \quad n_1 = n_2 = 0, \ n_3 = 1.$$

Т.о., $v_\rho(G_4) = 1$, $v_z(G_4) = 0 \ \forall z \not\equiv \rho \ (\mathrm{mod}\ SL_2(\mathbb{Z}))$.

$$\Rightarrow \boxed{\dim M_4 = 1}$$

Аналогично видим, что уравнение при $\boxed{k=6}$

$$\frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3} \quad \text{даёт}$$

$$v_i(G_6) = 1, \quad v_z(G_6) = 0 \quad \forall z \neq i. \Rightarrow \boxed{\dim M_6 = 1}$$

Аналогично, $\dim M_8 = \dim M_{10} = 1$.

Д-ем, что

$$\boxed{\dim M_k(SL_2(\mathbb{Z})) \leq \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right]+1, & k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ \left[\frac{k}{12}\right], & k \equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}}$$

Пусть $m := m(k) = \left[\frac{k}{12}\right]+1$. Возьмём m различных точек внутри фунд.-ой области D. Если даны $m+1$ произвольных мод.-их форм $f_1, \ldots, f_{m+1} \in M_k$, то из курса лин.-ой алгебры следует, что $\exists$ ненулевая линейная комбинация $x_1 f_1 + \ldots + x_{m+1} f_{m+1} \in M_k$, обращающаяся в нуль в $m = \left[\frac{k}{12}\right]+1$ точках, для которых $v_{f_i}(z) = 1$. Но тогда

$$\frac{k}{12} \geqslant m = \left[\frac{k}{12}\right] + 1$$ — противоречие (т.е. $x_1 f_1 + .. + x_{m+1} f_{m+1} \equiv 0$).

Значит $\dim M_k \leq \left[\frac{k}{12}\right] + 1$.

Если при этом $k \equiv 2 \pmod{12}$, то $k = 2 + 12k_1$ и берём $m = \left[\frac{k}{12}\right]$ точек. Пусть $\dim M_k \geqslant m+1$.

Берём $f_1, \dots, f_{m+1}$ и строим $x_1 f_1 + \dots + x_{m+1} f_{m+1} = 0$ в $m = \left[\frac{k}{12}\right]$ точках. При этом

$$\frac{k}{12} \geqslant m + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3} \Leftrightarrow k_1 + \frac{1}{6} \geqslant m + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3}.$$ Т.к.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{6},$$ то

$$k_1 = \left[\frac{k}{12}\right] \geqslant m+1 = \left[\frac{k}{12}\right] + 1$$ — противоречие; т.е. $\dim M_k \leq \left[\frac{k}{12}\right]$.

Утв.: $\bigoplus M_k(SL_2(\mathbb{Z})) := M_*(SL_2(\mathbb{Z}))$ — свободно порождена E_4 и E_6.

Д-во:

д-ем, что $E_4(z)$ и $E_6(z)$ алгебраически независимы (над $\mathbb{C}$).

1) $E_4^3(z) \neq \lambda E_6^2(z)$, иначе либо $E_4 \equiv 0$ (не верно), либо E_4 и E_6 имеют нули в одних и тех же точках. Но $E_4(\rho) = 0$, $E_6(i) = 0$; $E_4(i) \neq 0$, $E_6(\rho) \neq 0$.

2) Любые две непропорциональные модул.-ые формы веса k алгебраически независимы.

Д-но, если $P(X,Y)$ — многочлен из $\mathbb{C}[X,Y]$ и

$P(f_1(z), f_2(z)) \equiv 0$, то, группируя слагаемые с

одинаковым весом (обозначим их через $P_d(f_1, f_2)$),

получим, что $P_d(f_1, f_2) \equiv 0$. Д-но

$$\sum_d P_d(E_4, E_6) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{H} \xRightarrow[z \mapsto -\frac{1}{z}]{} \sum_d P_d(E_4(z), E_6(z)) \cdot z^d = 0 \xRightarrow[z \to -\frac{1}{z}]{}$$

$$\Rightarrow \sum_d P_d(E_4(z), E_6(z)) \cdot z^{2d} = 0. \quad \text{и т.д.}$$

$$\sum_d P_d(E_4(z), E_6(z))\, z^{kd} = 0. \quad \forall k.$$

Пусть $\max d = n$. Тогда.

$$\begin{pmatrix} 1, & \ldots, & 1 \\ 1, z, & \ldots & z^n \\ \ldots & & \\ 1, z^{n-1}, & \ldots & z^{n(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(\cdot,\cdot) \\ \vdots \\ P_n(\cdot,\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_d(\cdot,\cdot) \equiv 0.$$

т.к. $P_d(E_4, E_6)$ принимает беск. число значений

конечное число нулей и определителя Ван-дер-Монда

Но

$$\frac{P_d(f_1,f_2)}{f_2^{\,d}} = p\left(\frac{f_1}{f_2}\right),$$ где $p(\cdot)$ — многочлен (т.е.

имеет конечное число нулей) $\Rightarrow P_d(f_1,f_2)\equiv 0 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2}=\lambda$.

Т.о. E_4^3 и E_6^2 — алг.-ки независимы $\Rightarrow$

E_4 и E_6 — алг.-ки независимы.

Т.о. при фикс.-ом k $E_4^a E_6^b$ с условием $4a+6b=k$

алг.-ки нез.-мы.

Для $k<12$ размерности знаем.

Если $k=12l+r$, $0\le r<12$, то

$12l = a(4+4+4) + b(6+6) \Rightarrow (l+1)$ возможностей $\Rightarrow (l+1)$

построено ф-ий при $r\neq 2$.

Если $r=2$, то $12l+2-6 = 12(l-1)+8 \Rightarrow l$ ф-ий.

по одной ф-ии из M_6.

Следствие:

$$\dim M_k(SL_2(\mathbb{Z})) = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right]+1, & k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ \left[\frac{k}{12}\right], & k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Ряд Фурье для рядов Эйзенштейна.

Опр.: числа Бернулли B_{2k} определяются ф-ой

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} B_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$

B_{2k} – рациональные числа.

Утв.: $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $$\boxed{\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2 \cdot (2k)!}}.$$

Д-во:

$x = 2iz$, $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x}{e^x-1} = \frac{2iz}{e^{2iz}-1} = \frac{z}{\sin z} e^{-iz}$

$x = -2iz \Rightarrow \frac{x}{e^x-1} = \frac{z}{\sin z} e^{iz}$

Т.о. $z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot B_{2k} \frac{(2z)^{2k}}{(2k)!}$

При этом

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$ Возьмём логарифм.-ую производную:

$$z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2z^2/n^2\pi^2}{1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}} = 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{\pi n}\right)^{2k} =$$

$$= 1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{\pi^{2k}}\zeta(2k).$$

Сравнивая, получим: $(-1)^k B_{2k}\dfrac{2^{2k}}{(2k)!} = -\dfrac{2}{\pi^{2k}}\zeta(2k)$, или

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$ Всё д-но.

Заметим, что

$$\pi \operatorname{ctg}\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{+i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi i \frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} = \pi i - \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i z}} =$$

$$\boxed{\underset{z \in \mathbb{H}}{=} -\pi i - 2\pi i \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2\pi i n z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right).} \quad (z \in \mathbb{H}).$$

Дифференцируем и получаем:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{m=1}^{+\infty} m e^{2\pi i m z}.$$

Последовательно находим:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = (-1)^k \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{+\infty} m^{k-1} e^{2\pi i m z} \quad (z \in \mathbb{H}).$$

Утв.: $k \geq 2$ – натуральное, то

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n z},$$ где

$$\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k.$$

Д-во:

$$G_{2k}(z) = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} = 2\zeta(2k) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} =$$

$$= 2\zeta(2k) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{+\infty} m^{2k-1} e^{2\pi i m n z} =$$

$$= 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{l=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(l) \cdot e^{2\pi i l z}.$$

Всё д-но.

$$\boxed{G_{2k}(z) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n)\, e^{2\pi i n z}.}$$

$$E_{2k}(z) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n)\, e^{2\pi i n z}$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n\geq 1} \sigma_5(n)\, e^{2\pi i n z},$$

$$E_8(z) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_7(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_{10}(z) = 1 - 264 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_9(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{11}(n) e^{2\pi i n z},$$

$$E_{14}(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{13}(n) e^{2\pi i n z}.$$

Замечание: коэфф.-ты $E_{2k}(z)$ — рациональные числа.

Задача: д-ть, что $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$.

Замечание: $E_{2k} \in \mathbb{C}[E_4, E_6]$.

Ряд Эйзенштейна веса 2.

Положим $G_2(z) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^2} =$

$$= 2\zeta(2) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^2}.$$

$G_2(z+1) = G_2(z)$ – верно. Но G_2 не соотв.-ет ф-ии на решётке и не удовл.-ет $G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 G_2(z)$.

не верно.

$$G_2(z) = 2\zeta(2) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{2\pi i mnz} = \quad , \quad z \in \mathbb{H}.$$

$$= 2\zeta(2) + 2\cdot(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i nz},$$

$$E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i nz}$$

$G_2(z)$ – голом.-ая на $\mathbb{H}$ ф-ия.

Утв.: $\boxed{G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 G_2(z) - 2\pi i z}.$

(или $E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 E_2(z) - \frac{6i}{\pi} z$)

Д-во:

$$G_2(z) = \sum_m \sum_n{}' \frac{1}{(mz+n)^2}.$$ Определим

$$G(z) = \sum_n \sum_m{}' \frac{1}{(mz+n)^2}$$

$$H_2(z) = \sum_m \sum_n{}' \frac{1}{(mz+n)(mz+n-1)}$$

$$H(z) = \sum_n \sum_m{}' \frac{1}{(mz+n)(mz+n-1)}$$

Т.к. $\frac{1}{(mz+n)(mz+n-1)} = \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n}$, то

$H_2(z) = 0$,

$$H(z) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N<n\le N} \sum_{m\neq 0} \left(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{m\neq 0} \sum_{-N<n\le N} \left(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{m\neq 0} \left(\frac{1}{mz-N} - \frac{1}{mz+N} \right) =$$

равны

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{mz-N} + \frac{1}{-mz-N} - \frac{1}{mz+N} - \frac{1}{-mz+N} \right) =$$

равные

$$= \frac{2}{z} \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{-N/z+m} + \frac{1}{-N/z-m} \right), \text{ где } -N/z \in \mathbb{H}.$$

Но: $\displaystyle \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) = -\pi i - 2\pi i \sum_{l=1}^{+\infty} e^{2\pi i l z}$

$$\Rightarrow H(z) = \lim_{N\to+\infty} \frac{2}{z} \left(-\pi i - 2\pi i \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-2\pi i \frac{lN}{z}} \right) =$$

→ сх-ся равн.-но при $N \geq 1$.

$$= -\frac{2\pi i}{z}.$$

При этом:

$$H_2(z) - G_2(z) = \sum_m \sum_n{}' \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}$$

$$H(z) - G(z) = \sum_n \sum_m{}' \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}$$

сх-ся абс-но

Т.о. $H_2 - G_2 = H - G$, или

$$G_2(z) - G(z) = H_2(z) - H(z) = \frac{2\pi i}{z}.$$

При этом:

$$z^{-2} G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = 2\zeta(2) z^{-2} + \sum_{n\neq 0} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz-m)^2} = \sum_m \sum_n{}' \frac{1}{(nz+m)^2} =$$

$$= G(z).$$

Т.о. $G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 G_2(z) - 2\pi i z.$

Всё д-но

Д/з:

19. Найти $\dim M_{26}(SL_2(\mathbb{Z}))$, выписать базис.

20. Пусть $f, g \in M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$, при этом $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$, $g = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n q^n$. Если $a_j = b_j$ при $j = 0, 1, \dots, [\frac{k}{12}]$, то $f = g$.

21. Д-ть, что

а) $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_3(j)\sigma_3(n-j) \quad \forall n \geq 1$,

где $\sigma_\ell(n) = \sum_{d|n} d^\ell$.

б) $\sigma_9(n) = \frac{21}{11}\sigma_5(n) - \frac{10}{11}\sigma_3(n) + \frac{5040}{11} \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_3(j)\sigma_5(n-j)$, $n \geq 1$.

22. Д-ть, что $441 E_4 E_8 + 250 E_6^2 = 691 E_{12}$.

23. Д-ть, что $G_2(\gamma z) = (cz+d)^2\, G_2(z) - 2\pi i c\,(cz+d)$, где

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$