Эффективное продолжение многозначной аналитической функции и полиномы Эрмита–Паде

С. П. Суетин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

Семинар по комплексному анализу (Семинар Гончара),
г. Москва, Россия, 15 марта 2021 г.

Эффективное аналитическое продолжение

Эффективное аналитическое продолжение

Эффективное аналитическое продолжение $\Leftrightarrow$ конструктивные (рациональные) аппроксимации

Эффективное аналитическое продолжение

Эффективное аналитическое продолжение $\Leftrightarrow$ конструктивные (рациональные) аппроксимации

> "…a procedure may be called constructive if it yields the desired mathematical object …as the limit of a single sequence of rational functions of the data of the problem …"
> P. Henrici [1, Sec. 2].

Peter Henrici, "An algorithm for analytic continuation", SIAM J. Numer. Anal., 3, 1966, 1, 67–78

Задача аналитического продолжения

Пусть функция f голоморфная в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(z_0)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1}$$

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k=0} |c_k|^{1/k}, \qquad R \in (0, \infty).$$

Задача аналитического продолжения

Пусть функция f голоморфная в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(z_0)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k=0}} |c_k|^{1/k}, \qquad R \in (0, \infty).$$

Задача "эффективного" голоморфного (мероморфного) продолжения ряда $f(z)$, $|z - z_0| < R$ за пределы $|z - z_0| < R$.

Задача аналитического продолжения

Пусть функция f голоморфная в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(z_0)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k=0}} |c_k|^{1/k}, \qquad R \in (0, \infty).$$

Задача “эффективного” голоморфного (мероморфного) продолжения ряда $f(z)$, $|z - z_0| < R$ за пределы $|z - z_0| < R$. Суммирование ряда f_{z_0} за пределами круга его сходимости.

Задача аналитического продолжения

Пусть функция f голоморфная в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(z_0)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k=0}} |c_k|^{1/k}, \qquad R \in (0, \infty).$$

Задача "эффективного" голоморфного (мероморфного) продолжения ряда $f(z)$, $|z - z_0| < R$ за пределы $|z - z_0| < R$.
Суммирование ряда f_{z_0} за пределами круга его сходимости.
Эффективность: использование только частных сумм ряда (1)

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Результаты отрицательного характера. Теорема Хаусдорфа

Результаты отрицательного характера. Теорема Хаусдорфа

Из общей теоремы Ф. Хаусдорфа 1919 г. вытекает

Теорема Хаусдорфа

Пусть $\{c_k\}$ – заданная последовательность такая, что существует

$$\lim_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = 1.$$

Тогда среди рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pm c_k z^k$$

только счетное число может быть продолжено за пределы круга $|z| < 1$.

Результаты отрицательного характера. Теорема Хаусдорфа

Из общей теоремы Ф. Хаусдорфа 1919 г. вытекает

Теорема Хаусдорфа

Пусть $\{c_k\}$ – заданная последовательность такая, что существует

$$\lim_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = 1.$$

Тогда среди рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pm c_k z^k$$

только счетное число может быть продолжено за пределы круга $|z| < 1$.

Результаты Бореля, Штейнгауза, Фабри (1890–1920): непродолжимость степенного ряда через окружность его круга сходимости является правилом, а возможность продолжения – исключением.

Предположение о рассматриваемом классе функций

Предположение о рассматриваемом классе функций

Многозначные аналитические функции f с конечным числом особых точек Σ, $\#\Sigma < \infty$, в $\widehat{\mathbb{C}}$.

Предположение о рассматриваемом классе функций

Многозначные аналитические функции f с конечным числом особых точек Σ, $\#\Sigma < \infty$, в $\widehat{\mathbb{C}}$.

Предположение о классе функций: $f \in \mathcal{H}(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, и $f \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma) \setminus \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, где $\Sigma = \{a_1, \dots, a_p\}$, $p = p(f)$, $z_0 \notin \Sigma$.

Тем самым росток $\mathfrak{f}_{z_0} = (f, z_0)$ аналитически продолжается по любому пути, не проходящему через множество точек Σ. При этом по-крайней мере одна из точек a_j – точка ветвления f.

Предположение о рассматриваемом классе функций

Многозначные аналитические функции f с конечным числом особых точек Σ, $\#\Sigma < \infty$, в $\widehat{\mathbb{C}}$.

Предположение о классе функций: $f \in \mathcal{H}(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, и $f \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma) \setminus \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, где $\Sigma = \{a_1, \dots, a_p\}$, $p = p(f)$, $z_0 \notin \Sigma$. Тем самым росток $\mathfrak{f}_{z_0} = (f, z_0)$ аналитически продолжается по любому пути, не проходящему через множество точек Σ. При этом по-крайней мере одна из точек a_j – точка ветвления f.

Частные случаи: аналитический элемент $\mathfrak{f}_{z_0}$ – росток алгебраической функции; явное представление $(f \in \mathcal{L})$:

$$f(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{\alpha_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 0, \quad a_j \neq a_k.$$

Предположение о рассматриваемом классе функций

Многозначные аналитические функции f с конечным числом особых точек Σ, $\#\Sigma < \infty$, в $\widehat{\mathbb{C}}$.

Предположение о классе функций: $f \in \mathcal{H}(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, и $f \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma) \setminus \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, где $\Sigma = \{a_1, \dots, a_p\}$, $p = p(f)$, $z_0 \notin \Sigma$. Тем самым росток $\mathfrak{f}_{z_0} = (f, z_0)$ аналитически продолжается по любому пути, не проходящему через множество точек Σ. При этом по-крайней мере одна из точек a_j – точка ветвления f.

Частные случаи: аналитический элемент $\mathfrak{f}_{z_0}$ – росток алгебраической функции; явное представление $(f \in \mathcal{L})$:

$$f(z) = \prod_{j=1}^{p}(z - a_j)^{\alpha_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 0, \quad a_j \neq a_k.$$

Вопрос: каким способом, куда, можно осуществить голоморфное (мероморфное) продолжение ростка $\mathfrak{f}_{z_0}$ и какая ветвь аналитической функции $f(z)$ при этом получится?

Разложение Миттаг-Леффлера

Разложение Миттаг-Леффлера

Будем называть область $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ звездной относительно точки $z_0 \in G$, если для любой точки $\zeta \in G$ весь отрезок $[z_0, \zeta] \subset G$.

Разложение Миттаг-Леффлера

Будем называть область $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ звездной относительно точки $z_0 \in G$, если для любой точки $\zeta \in G$ весь отрезок $[z_0, \zeta] \subset G$.

Теорема Миттаг-Леффлера, 1905

Существует таблица чисел $\{b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \dots, b_{k_n}^{(n)}\}$, $n = 0, 1, \dots$, такая, что для любой области G, звездной относительно точки $z_0 \in G$, и для любой функции $f \in \mathcal{H}(G)$, справедливо следующее свойство. Пусть функция $f \in \mathcal{H}(G)$ задана

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - z_0)^\nu, \qquad |z - z_0| < R_0. \tag{2}$$

Тогда равномерно внутри G справедливо представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ b_0^{(n)} c_0 + b_1^{(n)} c_1 (z - z_0) + \dots + b_{k_n}^{(n)} c_{k_n} (z - z_0)^{k_n} \Big\}, \quad z \in G. \tag{3}$$

Разложение Миттаг-Леффлера

Разложение Миттаг-Леффлера

Метод Миттаг-Леффлера – линейный метод эффективного голоморфного продолжения элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$ ($\sim$ суммирования степенного ряда) вдоль прямолинейных лучей в главную звезду.

Разложение Миттаг-Леффлера

Метод Миттаг-Леффлера – линейный метод эффективного голоморфного продолжения элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$ ($\sim$ суммирования степенного ряда) вдоль прямолинейных лучей в главную звезду.

Свойства метода:

Разложение Миттаг-Леффлера

Метод Миттаг-Леффлера – линейный метод эффективного голоморфного продолжения элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$ ($\sim$ суммирования степенного ряда) вдоль прямолинейных лучей в главную звезду.

Свойства метода:

1) Метод Миттаг-Леффлера – это линейный метод суммирования степенного ряда за пределами его круга сходимости;

Разложение Миттаг-Леффлера

Метод Миттаг-Леффлера – линейный метод эффективного голоморфного продолжения элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$ ($\sim$ суммирования степенного ряда) вдоль прямолинейных лучей в главную звезду.

Свойства метода:

1) Метод Миттаг-Леффлера – это линейный метод суммирования степенного ряда за пределами его круга сходимости;

2) Полюс функции f уже является препятствием для этого метода; метод не распознает типов особенностей исходной функции f;

Разложение Миттаг-Леффлера

Метод Миттаг-Леффлера – линейный метод эффективного голоморфного продолжения элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$ ($\sim$ суммирования степенного ряда) вдоль прямолинейных лучей в главную звезду.

Свойства метода:

1) Метод Миттаг-Леффлера – это линейный метод суммирования степенного ряда за пределами его круга сходимости;

2) Полюс функции f уже является препятствием для этого метода; метод не распознает типов особенностей исходной функции f;

3) Сама звезда с помощью представления Миттаг-Леффлера не восстанавливается;

Разложение Миттаг-Леффлера

Метод Миттаг-Леффлера – линейный метод эффективного голоморфного продолжения элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$ ($\sim$ суммирования степенного ряда) вдоль прямолинейных лучей в главную звезду.

Свойства метода:

1) Метод Миттаг-Леффлера – это линейный метод суммирования степенного ряда за пределами его круга сходимости;

2) Полюс функции f уже является препятствием для этого метода; метод не распознает типов особенностей исходной функции f;

3) Сама звезда с помощью представления Миттаг-Леффлера не восстанавливается;

4) Медленная скорость сходимости внутри области G.

Линейные методы суммирования степенного ряда

Линейные методы суммирования степенного ряда

N. H. Arakelian, Power series: localization of singularities on the boundary of the disk of convergence. Reprinted in J. Contemp. Math. Anal. 52 (2017), no. 5, 227–231. Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. 52 (2017), no. 5, 3–24; MR3844091

Norair Arakelian, Wolfgang Luh, Efficient analytic continuation of power series by matrix summation methods. Comput. Methods Funct. Theory 2 (2002), no. 1, [On table of contents: 2003], 137–153; MR2000554

Н. У. Аракелян, Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов, Матем. сб., 124(166):1(5) (1984), 24–44; MathNet.RU

Levon Nurbekyan, On analytic continuation of the power series outside of the convergence disc. Armen. J. Math. 4 (2012), no. 1, 25–43 MR2956328

Вейерштрассов подход

Вейерштрассов подход

Понятие элемента аналитической функции (кратко элемента) $\mathfrak{f}_{z_0} = \{f(z), |z - z_0| < R_0\}$, который задается сходящимся степенным рядом $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

Вейерштрассов подход

Понятие элемента аналитической функции (кратко элемента) $\mathfrak{f}_{z_0} = \{f(z), |z - z_0| < R_0\}$, который задается сходящимся степенным рядом $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

Подход ставит целью выразить все свойства аналитической функции в терминах одного из ее элементов вида (1), т. е. фактически в терминах коэффициентов $\{c_k\}$ элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$.

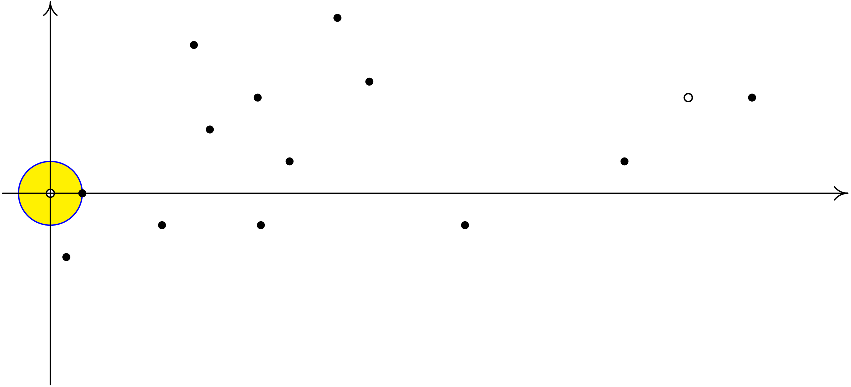
Вейерштрассов подход

Понятие элемента аналитической функции (кратко элемента) $\mathfrak{f}_{z_0} = \{f(z), |z - z_0| < R_0\}$, который задается сходящимся степенным рядом $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

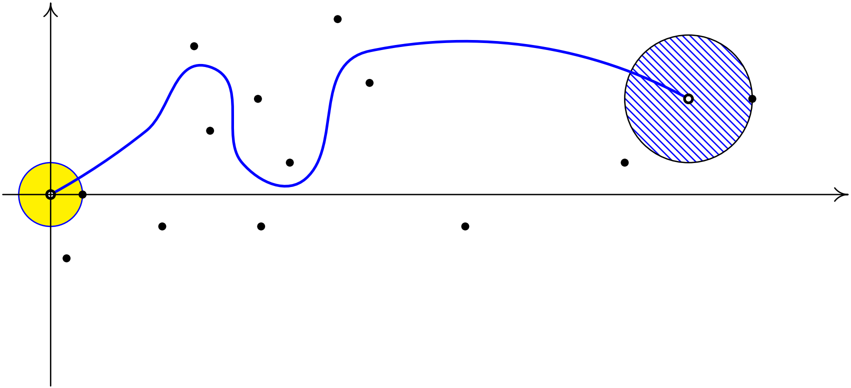
Подход ставит целью выразить все свойства аналитической функции в терминах одного из ее элементов вида (1), т. е. фактически в терминах коэффициентов $\{c_k\}$ элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$.

Для осуществления этой Программы предлагалось воспользоваться конкретным методом – построением непосредственного аналитического продолжения $\mathfrak{f}_{z_1}$ элемента $\mathfrak{f}_{z_0}$ с помощью его переразложения вокруг нового центра $z_1 \in U(z_0; R_0)$ с многократным повторением этого приема к вновь образованным элементам.

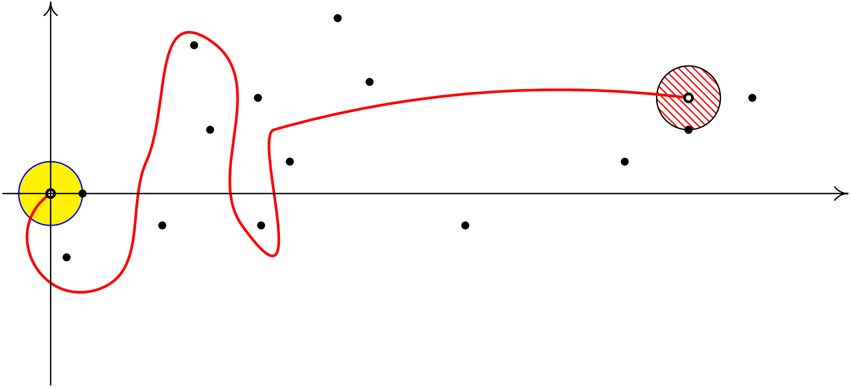
Вейерштрассов подход



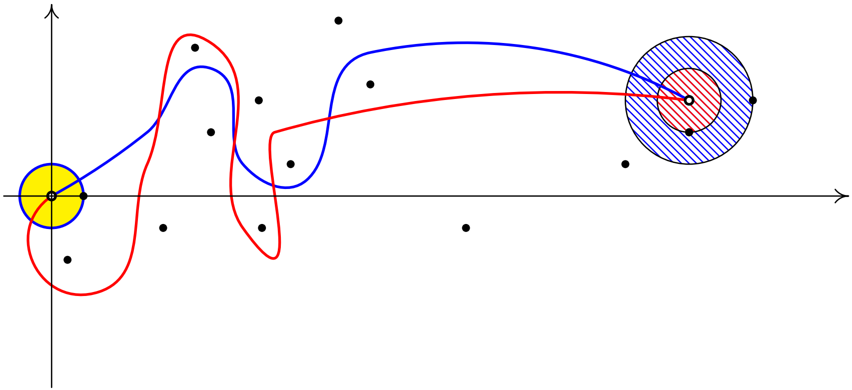
Вейерштрассов подход



Вейерштрассов подход



Вейерштрассов подход



Теорема Йенча–Сегё: расходимость $S_n(z;f)$

Функция f голоморфна в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(z_0)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{4}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k=0}} |c_k|^{1/k}, \qquad R \in (0, \infty).$$

Теорема Йенча–Сегё: расходимость $S_n(z; f)$

Функция f голоморфна в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(z_0)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{4}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k=0}} |c_k|^{1/k}, \qquad R \in (0, \infty).$$

Расходимость $\{S_n(z; f)\}$ за пределами $|z - z_0| < R$;
$S_n(z; f) \in \mathbb{C}_n[z]$:

$$f(z) - S_n(z; f) = O(z^{n+1}), \quad z \to 0.$$

Теорема Йенча–Сегё: расходимость $S_n(z;f)$

Функция f голоморфна в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(z_0)$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{4}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k=0}} |c_k|^{1/k}, \qquad R \in (0, \infty).$$

Расходимость $\{S_n(z;f)\}$ за пределами $|z - z_0| < R$;
$S_n(z;f) \in \mathbb{C}_n[z]$:

$$f(z) - S_n(z;f) = O(z^{n+1}), \quad z \to 0.$$

Все полюсы $S_n(z;f)$ расположены в бесконечноудаленной точке $z = \infty$. Как распределены нули $S_n(z;f)$?

Теорема Йенча–Сегё: $S_{100}(z; f)$, $f(z) = \log(4.0 - z^2)$

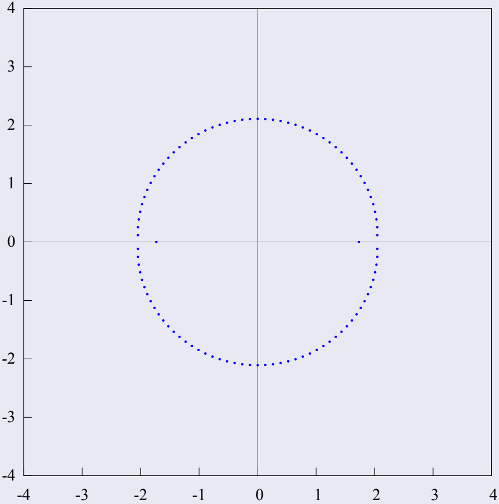


Рис.: Нули частных сумм $S_{100}(z; f)$ функции $f(z) = \log(4.0 - z^2)$.

Теорема Йенча–Сегё: $S_{200}(z; f)$, $f(z) = \log(4.0 - z^2)$

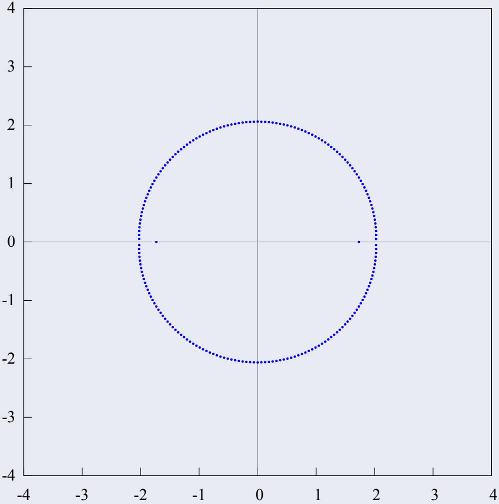


Рис.: Нули частных сумм $S_{200}(z; f)$ функции $f(z) = \log(4.0 - z^2)$.

Теорема Йенча–Сегё: $S_{300}(z; f)$, $f(z) = \log(4.0 - z^2)$

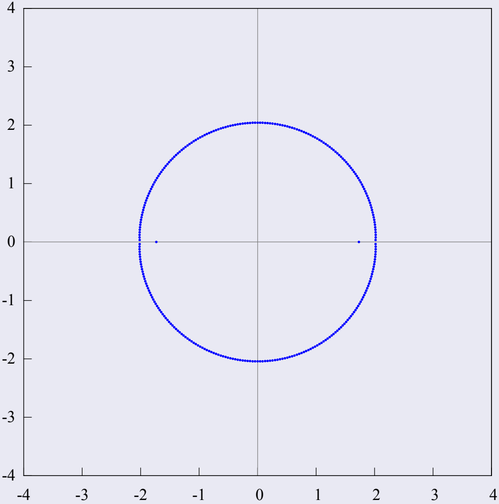


Рис.: Нули частных сумм $S_{300}(z; f)$ функции $f(z) = \log(4.0 - z^2)$.

Теорема Йенча–Сегё: распределение нулей $S_n(z;f)$

Для произвольного полинома $Q \in \mathbb{C}[z]$ положим

$$\chi(Q) := \sum_{\zeta : Q(\zeta)=0} \delta_\zeta.$$

Теорема Йенча–Сегё: распределение нулей $S_n(z;f)$

Для произвольного полинома $Q\in\mathbb{C}[z]$ положим

$$\chi(Q) := \sum_{\zeta:Q(\zeta)=0}\delta_\zeta.$$

Теорема Йенча–Сегё (1916, 1922)

Пусть функция $f\in\mathcal{H}(0)$, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ и

$$\varlimsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k}=1.$$

Теорема Йенча–Сегё: распределение нулей $S_n(z;f)$

Для произвольного полинома $Q \in \mathbb{C}[z]$ положим

$$\chi(Q) := \sum_{\zeta : Q(\zeta)=0} \delta_\zeta.$$

Теорема Йенча–Сегё (1916, 1922)

Пусть функция $f \in \mathcal{H}(0)$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и

$$\varlimsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = 1.$$

Тогда существует $\Lambda \subset \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n}\chi(S_n) \xrightarrow{*} \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}, \quad z = e^{i\theta}, \quad n \to \infty, n \in \Lambda.$$

Рациональные аппроксимации со свободными полюсами

Рациональные аппроксимации со свободными полюсами

Пусть функция $f \in \mathcal{H}(0)$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$; $S_{2n}(z; f) \in \mathbb{C}_{2n}[z]$: $f(z) - S_{2n}(z; f) = O(z^{2n+1})$, $z \to \infty$,

$$S_{2n}(z; f) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{2n} z^{2n}.$$

Рациональные аппроксимации со свободными полюсами

Пусть функция $f \in \mathcal{H}(0)$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$; $S_{2n}(z; f) \in \mathbb{C}_{2n}[z]$: $f(z) - S_{2n}(z; f) = O(z^{2n+1})$, $z \to \infty$,

$$S_{2n}(z; f) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n} z^{2n}.$$

Пусть

$$\mathbb{C}_n(z) := \Big\{ r(z) = p(z)/q(z), p, q \in \mathbb{C}_n[z] \Big\}.$$

Ищем $r^* \in \mathbb{C}_n(z)$, $r^* \in \mathcal{H}(0)$ и

$$r^*(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n} z^{2n} + O(z^{2n+1}).$$

Рациональные аппроксимации со свободными полюсами

Пусть функция $f \in \mathcal{H}(0)$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$; $S_{2n}(z;f) \in \mathbb{C}_{2n}[z]$:
$f(z) - S_{2n}(z;f) = O(z^{2n+1})$, $z \to \infty$,

$$S_{2n}(z;f) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n} z^{2n}.$$

Пусть

$$\mathbb{C}_n(z) := \Big\{ r(z) = p(z)/q(z), p, q \in \mathbb{C}_n[z] \Big\}.$$

Ищем $r^* \in \mathbb{C}_n(z)$, $r^* \in \mathcal{H}(0)$ и

$$r^*(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n} z^{2n} + O(z^{2n+1}).$$

Задача нелинейная. В случае “общего положения” решение существует и единственно. Функция $r^* = [n/n]_f$ называется диагональной аппроксимацией Паде функции f (в точке $z = 0$).

АП $[150/150]_f(z)$ в точке $z = 0$: $f(z) = \log(4.0 - z^2)$

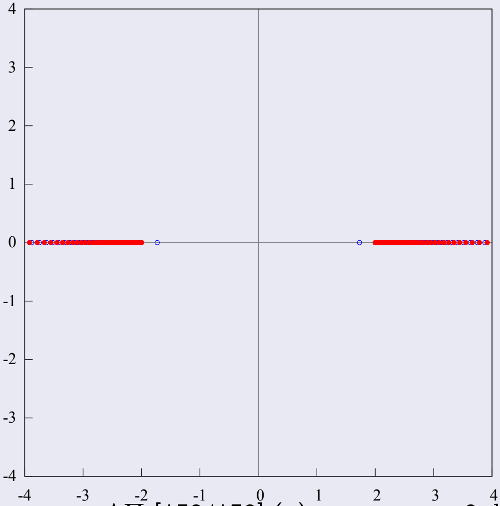


Рис.: Нули и полюсы АП $[150/150]_f(z)$ в точке $z = 0$ функции $f(z) = \log(4.0 - z^2)$.

Аппроксимации Паде, $f \in \mathcal{H}(\infty)$

Аппроксимации Паде, $f \in \mathcal{H}(\infty)$

Пусть $f \in \mathcal{H}(\infty)$ – произвольный росток ($f \notin \mathbb{C}(z)$) $\Rightarrow$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n, \deg Q_n \leqslant n$, $Q_n \not\equiv 0$,

$$(Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{5}$$

$[n/n]_f := P_n/Q_n \in \mathbb{C}(z)$ – диагональная АП ряда f;

Аппроксимации Паде, $f \in \mathcal{H}(\infty)$

Пусть $f \in \mathcal{H}(\infty)$ – произвольный росток ($f \notin \mathbb{C}(z)$)
$\Rightarrow$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n, \deg Q_n \leqslant n$, $Q_n \not\equiv 0$,

$$(Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{5}$$

$[n/n]_f := P_n/Q_n \in \mathbb{C}(z)$ – диагональная АП ряда f;
P_n, Q_n определены не однозначно, рациональная функция $[n/n]_f$ единственна.

Аппроксимации Паде, $f \in \mathcal{H}(\infty)$

Пусть $f \in \mathcal{H}(\infty)$ – произвольный росток ($f \notin \mathbb{C}(z)$)
$\Rightarrow$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n, \deg Q_n \leqslant n$, $Q_n \not\equiv 0$,

$$(Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{5}$$

$[n/n]_f := P_n/Q_n \in \mathbb{C}(z)$ – диагональная АП ряда f;
P_n, Q_n определены не однозначно, рациональная функция $[n/n]_f$ единственна.
(5) $\Longrightarrow$ $[n/n]_f$ строится по $c_0, c_1, \dots, c_{2n}$, т.е. по частной сумме $S_{2n}(z; f)$.

Аппроксимации Паде, $f \in \mathcal{H}(\infty)$

Пусть $f \in \mathcal{H}(\infty)$ – произвольный росток ($f \notin \mathbb{C}(z)$)
$\Rightarrow$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n, \deg Q_n \leqslant n$, $Q_n \not\equiv 0$,

$$(Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{5}$$

$[n/n]_f := P_n/Q_n \in \mathbb{C}(z)$ – диагональная АП ряда f;
P_n, Q_n определены не однозначно, рациональная функция $[n/n]_f$ единственна.
(5) $\Longrightarrow$ $[n/n]_f$ строится по $c_0, c_1, \dots, c_{2n}$, т.е. по частной сумме $S_{2n}(z; f)$.
Для нормальных индексов $n \in \Lambda = \Lambda(f) \subseteq \mathbb{N}$

$$[n/n]_f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_{2n}}{z^{2n}} + \frac{d_n}{z^{2n+1}} + \cdots, \quad z \to \infty, d_n \neq 0.$$

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Пусть задана многозначная аналитическая функция $f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$, $\#\Sigma < \infty$.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Пусть задана многозначная аналитическая функция $f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$, $\#\Sigma < \infty$.
В основе теории Шталя лежит теорема о “максимальной” области $D = D(f) \ni \infty$ голоморфности для заданной f, т.е. $f \in \mathcal{H}(\infty) \Longrightarrow f \in \mathcal{H}(D)$.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Пусть задана многозначная аналитическая функция $f \in \mathscr{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$, $\#\Sigma < \infty$.

В основе теории Шталя лежит теорема о “максимальной” области $D = D(f) \ni \infty$ голоморфности для заданной f, т.е. $f \in \mathcal{H}(\infty) \Longrightarrow f \in \mathcal{H}(D)$.

Максимальность D понимается в том смысле, что ее граница ∂D имеет минимальную емкость среди всех областей $G \ni \infty$ таких, что $f \in \mathcal{H}(G)$:

$$\operatorname{cap} \partial D = \min\Big\{\operatorname{cap} \partial G : \text{ область } G \ni \infty, f \in \mathcal{H}(G)\Big\}.$$

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Пусть задана многозначная аналитическая функция
$f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$, $\#\Sigma < \infty$.
В основе теории Шталя лежит теорема о “максимальной” области $D = D(f) \ni \infty$ голоморфности для заданной f, т.е.
$f \in \mathcal{H}(\infty) \Longrightarrow f \in \mathcal{H}(D)$.
Максимальность D понимается в том смысле, что ее граница ∂D имеет минимальную емкость среди всех областей $G \ni \infty$ таких, что $f \in \mathcal{H}(G)$:

$$\operatorname{cap}\partial D = \min\Bigl\{\operatorname{cap}\partial G : \text{ область } G \ni \infty, f \in \mathcal{H}(G)\Bigr\}.$$

Такая максимальная область по заданной f определяется однозначно с точностью до множества нулевой емкости.

Классические АП. Теорема Шталя: сходимость по емкости

H. Stahl, 1985–1986. Пусть $f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_p\})$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$, $\mathfrak{K}_f := \{K \subset \mathbb{C} : f \in \mathcal{H}(D_\infty(K))\}$.

Классические АП. Теорема Шталя: сходимость по емкости

H. Stahl, 1985–1986. Пусть $f \in \mathscr{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_p\})$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$,
$\mathfrak{K}_f := \{K \subset \mathbb{C} : f \in \mathcal{H}(D_\infty(K))\}$.
Тогда

Классические АП. Теорема Шталя: сходимость по емкости

H. Stahl, 1985–1986. Пусть $f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_p\})$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$,
$\mathfrak{K}_f := \{K \subset \mathbb{C} : f \in \mathcal{H}(D_\infty(K))\}$.
Тогда
1) $\exists$ область $D = D_{\max}(f) \ni \infty$: $f \in \mathcal{H}(D)$, $\operatorname{cap}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D) = \min\limits_{K \in \mathfrak{K}_f} \operatorname{cap} K$.

Классические АП. Теорема Шталя: сходимость по емкости

H. Stahl, 1985–1986. Пусть $f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_p\})$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$,
$\mathfrak{K}_f := \{K \subset \mathbb{C} : f \in \mathcal{H}(D_\infty(K))\}$.
Тогда
1) $\exists$ область $D = D_{\max}(f) \ni \infty$: $f \in \mathcal{H}(D)$, $\operatorname{cap}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D) = \min\limits_{K \in \mathfrak{K}_f} \operatorname{cap} K$.

2) компакт $F := \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ состоит из конечного числа аналитических дуг, не разбивает плоскость и обладает следующим свойством симметрии (S-свойством):

$$\frac{\partial g_D(\zeta, \infty)}{\partial n_+} = \frac{\partial g_D(\zeta, \infty)}{\partial n_-}, \quad \zeta \in F^0; \tag{6}$$

H. Stahl, 1985–1986. Пусть $f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_p\})$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$, $\mathfrak{K}_f := \{K \subset \mathbb{C} : f \in \mathcal{H}(D_\infty(K))\}$.
Тогда
1) $\exists$ область $D = D_{\max}(f) \ni \infty$: $f \in \mathcal{H}(D)$, $\operatorname{cap}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D) = \min\limits_{K \in \mathfrak{K}_f} \operatorname{cap} K$.

2) компакт $F := \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ состоит из конечного числа аналитических дуг, не разбивает плоскость и обладает следующим свойством симметрии (S-свойством):

$$\frac{\partial g_D(\zeta, \infty)}{\partial n_+} = \frac{\partial g_D(\zeta, \infty)}{\partial n_-}, \quad \zeta \in F^0; \tag{6}$$

3)
$$\frac{1}{n} \sum_{\zeta : Q_n(\zeta) = 0} \delta_\zeta \xrightarrow{*} \lambda_F, \quad \int_F \log \frac{1}{|z - t|} d\lambda_F(t) \equiv \gamma_F, \; z \in F;$$

Классические АП. Теорема Шталя: сходимость по емкости

H. Stahl, 1985–1986. Пусть $f \in \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_p\})$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$, $\mathfrak{K}_f := \{K \subset \mathbb{C} : f \in \mathcal{H}(D_\infty(K))\}$.

Тогда

1) $\exists$ область $D = D_{\max}(f) \ni \infty$:$f \in \mathcal{H}(D)$, $\operatorname{cap}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D) = \min\limits_{K \in \mathfrak{K}_f} \operatorname{cap} K$.

2) компакт $F := \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ состоит из конечного числа аналитических дуг, не разбивает плоскость и обладает следующим свойством симметрии (S-свойством):

$$\frac{\partial g_D(\zeta,\infty)}{\partial n_+} = \frac{\partial g_D(\zeta,\infty)}{\partial n_-}, \quad \zeta \in F^0; \tag{6}$$

3) $$\frac{1}{n} \sum_{\zeta : Q_n(\zeta) = 0} \delta_\zeta \xrightarrow{*} \lambda_F, \quad \int_F \log \frac{1}{|z-t|} d\lambda_F(t) \equiv \gamma_F,\ z \in F;$$

4) $[n/n]_f(z) \overset{\operatorname{cap}}{\to} f(z)$ внутри D.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Для

$$f(z) = \prod_{j=1}^{3} (z - a_j)^{\alpha_j},$$

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Для

$$f(z) = \prod_{j=1}^{3} (z - a_j)^{\alpha_j},$$

S-компакт состоит из критических траекторий квадратичного дифференциала

$$-\frac{z - v}{A_3(z)}\, dz^2 > 0, \quad A_3(z) := \prod_{j=1}^{3} (z - a_j). \tag{7}$$

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Для

$$f(z)=\prod_{j=1}^{3}(z-a_j)^{\alpha_j},$$

S-компакт состоит из критических траекторий квадратичного дифференциала

$$-\frac{z-v}{A_3(z)}\,dz^2>0,\quad A_3(z):=\prod_{j=1}^{3}(z-a_j). \tag{7}$$

Эти три траектории выходят из точек ветвления a_j и заканчиваются в одной точке $z=v$, которая называется точкой Чеботарёва.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Для

$$f(z)=\prod_{j=1}^{3}(z-a_j)^{\alpha_j},$$

S-компакт состоит из критических траекторий квадратичного дифференциала

$$-\frac{z-v}{A_3(z)}\,dz^2>0,\quad A_3(z):=\prod_{j=1}^{3}(z-a_j). \tag{7}$$

Эти три траектории выходят из точек ветвления a_j и заканчиваются в одной точке $z=v$, которая называется точкой Чеботарёва.

Все точки a_1,a_2,a_3 – это простые полюсы квадратичного дифференциала (12), а точка Чеботарёва v – простой нуль дифференциала. В общем случае точку $v=v(a_1,a_2,a_3)$ нельзя выразить через элементарные функции от a_1,a_2,a_3.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Точка v однозначно определяется из условия, что все периоды абелева интеграла

$$\int^{z} \sqrt{\frac{\zeta - v}{A_3(\zeta)}}\, d\zeta \qquad (8)$$

чисто мнимые.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Точка v однозначно определяется из условия, что все периоды абелева интеграла

$$\int^z \sqrt{\frac{\zeta - v}{A_3(\zeta)}}\, d\zeta \tag{8}$$

чисто мнимые.

Отсюда вытекает, что функция

$$\operatorname{Re} \int_{a_1}^z \sqrt{\frac{\zeta - v}{A_3(\zeta)}}\, d\zeta \tag{9}$$

– однозначная гармоническая функция на двулистной эллиптической рп $\mathfrak{R}_2$ заданной уравнением $w^2 = (z - v)A_3(z)$.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Компакт Чеботарева–Шталя определяется соотношением

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \int_{a_1}^{z} \sqrt{\frac{\zeta - v}{A_3(\zeta)}}\, d\zeta = 0 \right\}, \tag{10}$$

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

Компакт Чеботарева–Шталя определяется соотношением

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \int_{a_1}^{z} \sqrt{\frac{\zeta - v}{A_3(\zeta)}}\, d\zeta = 0 \right\}, \tag{10}$$

а так называемая g-функция

$$g(z) := -\operatorname{Re} \int_{a_1}^{z} \sqrt{\frac{\zeta - v}{A_3(\zeta)}}\, d\zeta \tag{11}$$

с точностью до знака совпадает с функцией Грина $g_D(z, \infty)$ для области Шталя $D := \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$.

Классические АП. Теория Шталя, 1985–1986

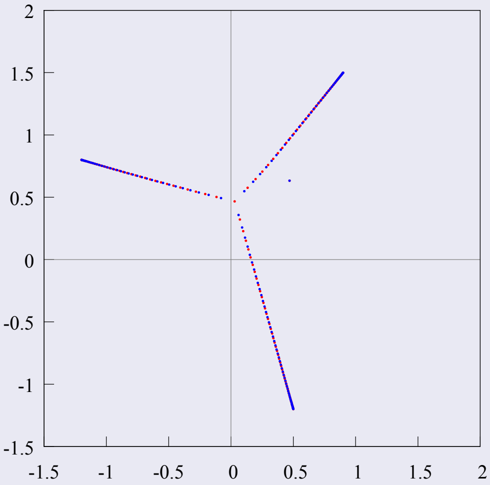


Рис.: Нули и полюсы АП $[130/130]_f$ для
$f(z) = \big(z - (-1.2 + 0.8i)\big)^{1/3}\big(z - (0.9 + 1.5i)\big)^{1/3}\big(z - (0.5 - 1.2i)\big)^{-2/3}$.

Классические АП. Теорема Шталя: сходимость по емкости

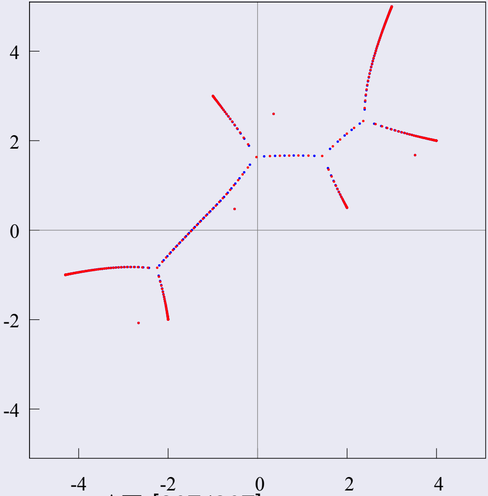


Рис.: Нули и полюсы АП $[267/267]_f$,
$f(z) = \{(z + (4.3 + 1.0i))(z - (2.0 + 0.5i))(z + (2.0 + 2.0i))(z + (1.0 - 3.0i))(z - (4.0 + 2.0i))(z - (3.0 + 5.0i))\}^{-1/6}$.

Классические АП

Для функции

$$f(z) = \prod_{j=1}^{3}(z - a_j)^{\alpha_j}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = -2/3,$$

Классические АП

Для функции

$$f(z) = \prod_{j=1}^{3} (z - a_j)^{\alpha_j}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = -2/3,$$

S-компакт состоит из критических траекторий квадратичного дифференциала

$$-\frac{z - v}{A_3(z)}\, dz^2 > 0, \quad A_3(z) := \prod_{j=1}^{3} (z - a_j). \tag{12}$$

Классические АП

Для функции

$$f(z) = \prod_{j=1}^{3}(z - a_j)^{\alpha_j}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = -2/3,$$

S-компакт состоит из критических траекторий квадратичного дифференциала

$$-\frac{z - v}{A_3(z)}\,dz^2 > 0, \quad A_3(z) := \prod_{j=1}^{3}(z - a_j). \tag{12}$$

Функция f – трехзначная (т.е. кубическая) функция, ее риманова поверхность $\mathfrak{R}_3(f)$ трехлистная.

Классические АП

Из теории Шталя вытекает, что с функцией f ассоциирована двулистная эллиптическая поверхность $\mathfrak{R}_2(w)$ функции $w^2 = (z - v)A_3(z)$.

Классические АП

Из теории Шталя вытекает, что с функцией f ассоциирована двулистная эллиптическая поверхность $\mathfrak{R}_2(w)$ функции $w^2 = (z - v)A_3(z)$. Каноническая проекция $\pi_2 \colon \mathfrak{R}_2(w) \to \widehat{\mathbb{C}}$ задается соотношением $\pi_2(\mathbf{z}) = z$, где $\mathbf{z} = (z, \pm\sqrt{z^2 - 1}) \in \mathfrak{R}_2(w)$ – точка на рп $\mathfrak{R}_2(w)$.

Классические АП

Из теории Шталя вытекает, что с функцией f ассоциирована двулистная эллиптическая поверхность $\mathfrak{R}_2(w)$ функции $w^2 = (z - v)A_3(z)$. Каноническая проекция $\pi_2 : \mathfrak{R}_2(w) \to \widehat{\mathbb{C}}$ задается соотношением $\pi_2(\mathbf{z}) = z$, где $\mathbf{z} = (z, \pm\sqrt{z^2 - 1}) \in \mathfrak{R}_2(w)$ – точка на рп $\mathfrak{R}_2(w)$.
В области Шталя D функция Грина $g_D(z, \infty)$ совпадает с точностью до знака с функцией

$$g(z) := \operatorname{Re} G(z), \quad G(z) := -\int_{a_1}^{z} \sqrt{\frac{\zeta - v}{A_3(\zeta)}}\, d\zeta.$$

Функция $g(z)$ продолжается на всю рп $\mathfrak{R}_2(w)$ как функция точки $\mathbf{z} = (z, w) \in \mathfrak{R}_2$ и задает наттолловское разбиение рп $\mathfrak{R}_2$ на листы $\mathfrak{R}_2^{(0)} \ni z^{(0)}$ и $\mathfrak{R}_2^{(1)} \ni z^{(1)}$ с помощью неравенства

$$g(z^{(0)}) < g(z^{(1)}), \quad \pi_2(z^{(0)}) = \pi_2(z^{(1)}) = z \in D.$$

Классические АП

Теория Шталя, 1985–1986: Классические АП восстанавливаю значения $f(z^{(0)})$, $z \in D$. При этом

$$\frac{1}{n}\chi(Q_n) \xrightarrow{*} \lambda_S, \quad n \to \infty.$$

$\Rightarrow o(n)$ нулей Q_n вне контроля.

Классические АП

Теория Шталя, 1985–1986: Классические АП восстанавливаю значения $f(z^{(0)})$, $z \in D$. При этом

$$\frac{1}{n}\chi(Q_n) \xrightarrow{*} \lambda_S, \quad n \to \infty.$$

$\Rightarrow o(n)$ нулей Q_n вне контроля.

Дж. Наттолл, 1986 (А. И. Аптекарев, М. Ятцелев, 2015). Сильная (точнее, “полная”) асимптотика Q_n в терминах, связанных с $R_2(w)$:

$$Q_n(z) \cong \Phi_n(z)(1 + o(1)), \quad z \in D, \quad n \to \infty.$$

$\log \Phi_n(z)$ – абелевы интегралы на $\mathfrak{R}_2(w)$.

Полиномы Эрмита–Паде

Для нескольких функций $f_0 \equiv 1$, f_1, f_2

Полиномы Эрмита–Паде

Для нескольких функций $f_0 \equiv 1$, f_1, f_2
$f_1 = f$, $f_2 = f^2$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$ и не гиперэллиптическая функция.

Полиномы Эрмита–Паде

Для нескольких функций $f_0 \equiv 1,\ f_1,\ f_2$

$f_1 = f$, $f_2 = f^2$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$ и не гиперэллиптическая функция.

Полиномы Эрмита–Паде 1-го типа: $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2} \in \mathbb{C}_n[z]$,

$Q_{n,j} \not\equiv 0$,

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1}f + Q_{n,2}f^2)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad z \to \infty.$$

Полиномы Эрмита–Паде

Для нескольких функций $f_0 \equiv 1$, f_1, f_2
$f_1 = f$, $f_2 = f^2$, $f \in \mathcal{H}(\infty)$ и не гиперэллиптическая функция.
Полиномы Эрмита–Паде 1-го типа: $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2} \in \mathbb{C}_n[z]$, $Q_{n,j} \not\equiv 0$,

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1} f + Q_{n,2} f^2)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad z \to \infty.$$

Полиномы Эрмита–Паде 2-го типа: $P_{2n,0}, P_{2n,1}, P_{2n,2} \in \mathbb{C}_{2n}[z]$,

$$(P_{2n,0} f - P_{2n,1})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty,$$

$$(P_{2n,0} f^2 - P_{2n,2})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty.$$

Полиномы Эрмита–Паде

Пусть w; $w^3 + r_2(z)w^2 + r_1(z)w + r_0 = 0$.

Полиномы Эрмита–Паде

Пусть w; $w^3 + r_2(z)w^2 + r_1(z)w + r_0 = 0$.

Пусть $G(\mathbf{z})$ – некоторый специальный абелев интеграл на $\mathfrak{R}_3$, $\mathbf{z} = (z, w)$, то разбиение на листы $\mathfrak{R}^{(0)} \ni z^{(0)}$, $\mathfrak{R}^{(1)} \ni z^{(1)}$, $\mathfrak{R}^{(2)} \ni z^{(2)}$ определяется неравенством

Полиномы Эрмита–Паде

Пусть w; $w^3 + r_2(z)w^2 + r_1(z)w + r_0 = 0$.

Пусть $G(\mathbf{z})$ – некоторый специальный абелев интеграл на $\mathfrak{R}_3$, $\mathbf{z} = (z, w)$, то разбиение на листы $\mathfrak{R}^{(0)} \ni z^{(0)}$, $\mathfrak{R}^{(1)} \ni z^{(1)}$, $\mathfrak{R}^{(2)} \ni z^{(2)}$ определяется неравенством

$$\operatorname{Re} G(z^{(0)}) < \operatorname{Re} G(z^{(1)}) < \operatorname{Re} G(z^{(2)}), \quad \pi_3(z^{(j)}) = z,$$

$\pi_3 \colon \mathfrak{R}_3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ – каноническая проекция, $\pi_3(\mathbf{z}) = z$.

Трехлистная рп. Гипотеза Наттолла

Гипотеза Наттолла, 1984.
При наттолловском разбиении на листы открытое множество $\mathfrak{D}_2 := \mathfrak{R}_3 \setminus \overline{\mathfrak{R}_3^{(2)}}$ всегда есть область

Трехлистная рп. Гипотеза Наттолла

Гипотеза Наттолла, 1984.
При наттолловском разбиении на листы открытое множество $\mathfrak{D}_2 := \mathfrak{R}_3 \setminus \overline{\mathfrak{R}_3^{(2)}}$ всегда есть область

$\Rightarrow \mathfrak{D}_2$ – двулистная область над $\widehat{\mathbb{C}}$.
Если функция $f \in \mathcal{H}(\infty^{(0)})$, $\infty^{(0)} \in \pi_3^{-1}(\infty)$ и $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_3)$, то можно ставить вопрос об эффективном продолжении ростка $f_{\infty^{(0)}}$ в область $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{R}_3$.

Трехлистная рп. Гипотеза Наттолла

Гипотеза Наттолла, 1984.
При наттолловском разбиении на листы открытое множество $\mathfrak{D}_2 := \mathfrak{R}_3 \setminus \overline{\mathfrak{R}_3^{(2)}}$ всегда есть область

$\Rightarrow \mathfrak{D}_2$ – двулистная область над $\widehat{\mathbb{C}}$.
Если функция $f \in \mathcal{H}(\infty^{(0)})$, $\infty^{(0)} \in \pi_3^{-1}(\infty)$ и $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_3)$, то можно ставить вопрос об эффективном продолжении ростка $f_{\infty^{(0)}}$ в область $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{R}_3$.

Гипотеза Наттолла, 2017
Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017: при наттолловском разбиении на листы открытое множество $\mathfrak{D}_2 := \mathfrak{R}_3 \setminus \overline{\mathfrak{R}_3^{(2)}}$ всегда есть область

Трехлистная рп. Гипотеза Наттолла

Гипотеза Наттолла, 1984.
При наттолловском разбиении на листы открытое множество $\mathfrak{D}_2 := \mathfrak{R}_3 \setminus \overline{\mathfrak{R}_3^{(2)}}$ всегда есть область

$\Rightarrow \mathfrak{D}_2$ – двулистная область над $\widehat{\mathbb{C}}$.
Если функция $f \in \mathcal{H}(\infty^{(0)})$, $\infty^{(0)} \in \pi_3^{-1}(\infty)$ и $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_3)$, то можно ставить вопрос об эффективном продолжении ростка $f_{\infty^{(0)}}$ в область $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{R}_3$.

Гипотеза Наттолла, 2017
Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017: при наттолловском разбиении на листы открытое множество $\mathfrak{D}_2 := \mathfrak{R}_3 \setminus \overline{\mathfrak{R}_3^{(2)}}$ всегда есть область

$\Rightarrow \mathfrak{D}_2$ – двулистная область над $\widehat{\mathbb{C}}$.

Трехлистная рп. Гипотеза Наттолла

Дж. Наттолл, 1984

(Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017)

$\Longrightarrow$

Трехлистная рп. Гипотеза Наттолла

Дж. Наттолл, 1984

(Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017)

$\Longrightarrow$

$$\frac{P_{2n,1}}{P_{2n,0}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(0)}), \quad n \to \infty,$$

Трехлистная рп. Гипотеза Наттолла

Дж. Наттолл, 1984

(Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017)

$\Longrightarrow$

$$\frac{P_{2n,1}}{P_{2n,0}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(0)}), \quad n \to \infty,$$

$$\frac{Q_{n,1}}{Q_{n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -\left\{f(z^{(0)}) + f(z^{(1)})\right\}, \quad n \to \infty,$$

Четырехлистная рп. Обобщенные НР-полиномы

Пусть $\mathfrak{R}_4$ – четырехлистная рп, $\pi\colon \mathfrak{R}_4 \to \widehat{\mathbb{C}}$ – каноническая проекция, $\mathfrak{R}_4^{(0)}$, $\mathfrak{R}_4^{(1)}$, $\mathfrak{R}_4^{(2)}$, $\mathfrak{R}_4^{(3)}$ – наттолловское разбиение рп $\mathfrak{R}_4$ на листы, $z^{(j)} \in \mathfrak{R}_4^{(j)}$, $\pi(z^{(j)}) = z$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\mathcal{D}_3 := \mathfrak{R}_4 \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(3)}}$ – трехлистная область Наттолла. $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_4)$ и $f \in \mathcal{H}(\infty^{(0)})$.

Пусть $\mathfrak{R}_4$ – четырехлистная рп, $\pi\colon \mathfrak{R}_4 \to \widehat{\mathbb{C}}$ – каноническая проекция, $\mathfrak{R}_4^{(0)}$, $\mathfrak{R}_4^{(1)}$, $\mathfrak{R}_4^{(2)}$, $\mathfrak{R}_4^{(3)}$ – наттолловское разбиение рп $\mathfrak{R}_4$ на листы, $z^{(j)} \in \mathfrak{R}_4^{(j)}$, $\pi(z^{(j)}) = z$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\mathcal{D}_3 := \mathfrak{R}_4 \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(3)}}$ – трехлистная область Наттолла. $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_4)$ и $f \in \mathcal{H}(\infty^{(0)})$.
Полиномы Эрмита–Паде 1-го типа: $Q_{n,j} \in \mathbb{C}_n[z]$, $Q_{n,j} \not\equiv 0$,

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1} f + Q_{n,2} f^2 + Q_{n,3} f^3)(z) = O\left(\frac{1}{z^{3n+3}}\right), \quad z \to \infty.$$

Пусть $\mathfrak{R}_4$ – четырехлистная рп, $\pi\colon \mathfrak{R}_4 \to \widehat{\mathbb{C}}$ – каноническая проекция, $\mathfrak{R}_4^{(0)}$, $\mathfrak{R}_4^{(1)}$, $\mathfrak{R}_4^{(2)}$, $\mathfrak{R}_4^{(3)}$ – наттолловское разбиение рп $\mathfrak{R}_4$ на листы, $z^{(j)} \in \mathfrak{R}_4^{(j)}$, $\pi(z^{(j)}) = z$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\mathcal{D}_3 := \mathfrak{R}_4 \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(3)}}$ – трехлистная область Наттолла. $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_4)$ и $f \in \mathcal{H}(\infty^{(0)})$.

Полиномы Эрмита–Паде 1-го типа: $Q_{n,j} \in \mathbb{C}_n[z]$, $Q_{n,j} \not\equiv 0$,

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1}f + Q_{n,2}f^2 + Q_{n,3}f^3)(z) = O\left(\frac{1}{z^{3n+3}}\right), \quad z \to \infty.$$

Полиномы Эрмита–Паде 2-го типа: $P_{3n,j} \in \mathbb{C}_{3n}[z]$,

$$(P_{2n,0}f - P_{2n,1})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty,$$

$$(P_{2n,0}f^2 - P_{2n,2})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty,$$

$$(P_{2n,0}f^3 - P_{2n,3})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty.$$

Дж. Наттолл, 1984

(Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017)

$\Longrightarrow$ при $n \to \infty$:

1.
$$\frac{P_{3n,1}}{P_{3n,0}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(0)}),$$

Четырехлистная рп. Обобщенные НР-полиномы

Дж. Наттолл, 1984

(Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017)

$\Longrightarrow$ при $n \to \infty$:

1. $$\frac{P_{3n,1}}{P_{3n,0}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(0)}),$$

3. $$\frac{Q_{n,2}}{Q_{n,3}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -\Bigl\{f(z^{(0)}) + f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})\Bigr\}.$$

Дж. Наттолл, 1984
(Е. М. Чирка, А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С.П.С., 2017)
$\Longrightarrow$ при $n \to \infty$:

1.
$$\frac{P_{3n,1}}{P_{3n,0}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(0)}),$$

2. А. В. Комлов, 2018. Обобщенные НР-полиномы $H_{2n,j}$:
$$\frac{H_{2n,0}}{H_{2n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(0)}) + f(z^{(1)}).$$

3.
$$\frac{Q_{n,2}}{Q_{n,3}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -\left\{f(z^{(0)}) + f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})\right\}.$$

QD-алгоритм

Г. Рутисхаузер [1]: исходные данные c_k/c_{k+1}.

Heinz Rutishauser, “Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus”, Basel, Birkhäuser, 1957 [Г. Рутисхаузер, “Алгоритм частных и разностей”, М., ИЛ, 1960]

Вычисление полиномов Эрмита–Паде

QD-алгоритм

Г. Рутисхаузер [1]: исходные данные c_k/c_{k+1}.

Heinz Rutishauser, “Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus”, Basel, Birkhäuser, 1957 [Г. Рутисхаузер, “Алгоритм частных и разностей”, М., ИЛ, 1960]

Алгоритм Висковатова

Vasilii Ivanovich Viskovatov (1779–1812)
Original Viskovatov's paper, 1805, see [1].

B. Viscovatov [Viscovatoff], “De la methode generale pour reduire toutes sortes des quantites en fractions continues”, [Trans.: B. Viskovatov, “A general method for reducing all types of quantities to continued fractions”, submitted 18 Dec 1805], Memoires de L'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg I (Tome I) 1803–1806, 226–247

Случай $m = 1$: полиномы Паде

Пусть $a(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $b(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $b_0 \neq 0$.

Случай $m = 1$: полиномы Паде

Пусть $a(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $b(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $b_0 \neq 0$.

Алгоритм Висковатова разложения отношения рядов $a(z)/b(z)$ в регулярную C-дробь основан на тождестве:

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{z}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k \Big/ \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_{k+1} - a_0 b_{k+1}/b_0) z^k}. \tag{13}$$

Случай $m = 1$: полиномы Паде

Пусть $a(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $b(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $b_0 \neq 0$.

Алгоритм Висковатова разложения отношения рядов $a(z)/b(z)$ в регулярную C-дробь основан на тождестве:

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{z}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k \Big/ \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_{k+1} - a_0 b_{k+1}/b_0) z^k}. \tag{13}$$

$$v_0 + \cfrac{z}{v_1 + \cfrac{z}{v_2 + \cfrac{z}{v_3 + \dots}}}. \tag{14}$$

$\Rightarrow$ ступенька $[n/n]_f, [n+1/n]_f$ в таблице Паде $f = a/b$.

Случай $m = 1$: набор рядов $[f_0, f_1]$

1-й шаг

Положим $f_0 = f_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{0,k} z^k = c_0 + O(z)$,

$f_1 = f_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{1,k} z^k = c_1 + O(z)$; здесь и всюду в дальнейшем через $O(z)$ обозначаются степенные ряды, начинающиеся с первой степени переменного z. Тогда

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{c_1}{c_0} + \frac{z}{f_0 \Big/ \Big[\Big(f_1 - \dfrac{c_1}{c_0} f_0\Big)/z\Big]} = \frac{c_1}{c_0} + \frac{z}{f_1^{[1]}/f_0^{[1]}}, \tag{15}$$

1-й шаг

Положим $f_0 = f_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{0,k} z^k = c_0 + O(z)$,
$f_1 = f_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{1,k} z^k = c_1 + O(z)$; здесь и всюду в дальнейшем через $O(z)$ обозначаются степенные ряды, начинающиеся с первой степени переменного z. Тогда

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{c_1}{c_0} + \frac{z}{f_0 \Big/ \left[\left(f_1 - \dfrac{c_1}{c_0} f_0\right)/z\right]} = \frac{c_1}{c_0} + \frac{z}{f_1^{[1]}/f_0^{[1]}}, \qquad (15)$$

где мы положили

$f_1^{[1]} := f_0 =: \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{1,k}^{[1]} z^k = c_1^{[1]} + O(z)$,

$f_0^{[1]} := \frac{1}{z}\left(f_1 - \dfrac{c_1}{c_0} f_0\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{0,k}^{[1]} z^k = c_0^{[1]} + O(z)$.

2-й шаг

Для новых рядов $f_0^{[1]}$ и $f_1^{[1]}$ полагаем

$$\frac{f_1^{[1]}}{f_0^{[1]}} = \frac{c_1^{[1]}}{c_0^{[1]}} + \frac{z}{f_1^{[2]}/f_0^{[2]}}, \tag{16}$$

2-й шаг

Для новых рядов $f_0^{[1]}$ и $f_1^{[1]}$ полагаем

$$\frac{f_1^{[1]}}{f_0^{[1]}} = \frac{c_1^{[1]}}{c_0^{[1]}} + \frac{z}{f_1^{[2]}/f_0^{[2]}}, \tag{16}$$

где

$$f_1^{[2]} := f_0^{[1]} =: \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k}^{[2]} z^k = c_1^{[2]} + O(z),$$

$$f_0^{[2]} := \frac{1}{z}\left(f_1^{[1]} - \frac{c_1^{[1]}}{c_0^{[1]}} f_0^{[1]}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{0,k}^{[2]} z^k = c_0^{[2]} + O(z).$$

Матричный подход

$f_0^{[0]} := f_0, f_1^{[0]} := f_1, f_0^{[1]}, f_1^{[1]}, \dots$ имеют тот же смысл. Положим

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ -c_1^{[0]}/c_0^{[0]} & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} := (f_1, f_0).$$

Тогда $$M_1\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad M_2\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zf_0 \\ f_1 - \dfrac{c_1}{c_0}f_0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} f_1^{[1]} \\ f_0^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Матричный подход

$f_0^{[0]} := f_0, f_1^{[0]} := f_1, f_0^{[1]}, f_1^{[1]}, \dots$ имеют тот же смысл. Положим

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ -c_1^{[0]}/c_0^{[0]} & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} := (f_1, f_0).$$

Тогда $M_1\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad M_2\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zf_0 \\ f_1 - \dfrac{c_1}{c_0}f_0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} f_1^{[1]} \\ f_0^{[1]} \end{pmatrix}.$

Положим $M^{[0]} := M_2M_1 = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & -c_1^{[0]}/c_0^{[0]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix},$

где P_1, P_2, Q_1, Q_2 – полиномы от z, $P_j.Q_j \in \mathbb{C}[z]$. Итак, имеем

$$M^{[0]}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} f_1^{[1]} \\ f_0^{[1]} \end{pmatrix} = O(z).$$

Получаем $Q_1 f_1 + Q_2 f_0 = O(z)$, где $Q_1 = \mathrm{const}_1$, $Q_2 = \mathrm{const}_2$. Значит, Q_2 и Q_1 – НР-полиномы для набора рядов $[f_0, f_1]$ и мультииндекса $\mathbf{k} = (0, 0)$, $|\mathbf{k}| + 1 = 0 + 1 = 1$.

Получаем $Q_1 f_1 + Q_2 f_0 = O(z)$, где $Q_1 = \mathrm{const}_1$, $Q_2 = \mathrm{const}_2$. Значит, Q_2 и Q_1 – НР-полиномы для набора рядов $[f_0, f_1]$ и мультииндекса $\mathbf{k} = (0,0)$, $|\mathbf{k}| + 1 = 0 + 1 = 1$.

Аналогично $\quad M^{[1]} \begin{pmatrix} f_1^{[1]} \\ f_0^{[1]} \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} f_1^{[2]} \\ f_0^{[2]} \end{pmatrix}, \quad$ где $\quad M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & -c_1^{[1]}/c_0^{[1]} \end{pmatrix}$.

Следовательно $\quad M^{[1]} M^{[0]} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = z^2 \begin{pmatrix} f_1^{[2]} \\ f_0^{[2]} \end{pmatrix} = O(z^2)$.

Получаем $Q_1 f_1 + Q_2 f_0 = O(z)$, где $Q_1 = \mathrm{const}_1$, $Q_2 = \mathrm{const}_2$. Значит, Q_2 и Q_1 – НР-полиномы для набора рядов $[f_0, f_1]$ и мультииндекса $\mathbf{k} = (0,0)$, $|\mathbf{k}| + 1 = 0 + 1 = 1$.

Аналогично $\quad M^{[1]}\begin{pmatrix} f_1^{[1]} \\ f_0^{[1]} \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} f_1^{[2]} \\ f_0^{[2]} \end{pmatrix}, \quad$ где $\quad M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & -c_1^{[1]}/c_0^{[1]} \end{pmatrix}$.

$$\text{Следовательно} \quad M^{[1]}M^{[0]}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = z^2\begin{pmatrix} f_1^{[2]} \\ f_0^{[2]} \end{pmatrix} = O(z^2).$$

Положим $A^{[0]} := M^{[0]}$, $A^{[1]} := M^{[1]}M^{[0]}$. Тогда

$$A^{[1]} = M^{[1]}M^{[0]} = \begin{pmatrix} P_1^{[1]} & P_2^{[1]} \\ Q_1^{[1]} & Q_2^{[1]} \end{pmatrix},$$

где $\deg Q_1^{[1]} = 0$, $\deg Q_2^{[1]} = 1$ и $Q_2^{[1]} f_0 + Q_1^{[1]} f_1 = O(z^2)$.
$Q_2^{[1]}, Q_1^{[1]}$ – пара НР-полиномов для $[f_0, f_1]$ и $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{[1]} = (1,0)$.
$\Rightarrow$ приходим к НР-полиномам для $[f_0, f_1]$ и $\mathbf{k}^{[2]} = (1,1)$, $\mathbf{k}^{[3]} = (2,1)$, $\mathbf{k}^{[4]} = (2,2)$, $\mathbf{k}^{[5]} = (3,2), \dots$.

НР-Полиномы для $[f_0, f_1]$: случай $(n+1)$-го шага итерации

Переход от n к $n+1$: $f_1^{[n+1]} := f_0^{[n]} =: c_1^{[n+1]} + O(z)$,

$$f_0^{[n+1]} := \frac{1}{z}\left(f_1^{[n]} - \frac{c_1^{[n]}}{c_0^{[n]}} f_0^{[n]}\right) =: c_0^{[n+1]} + O(z).$$

НР-Полиномы для $[f_0, f_1]$: случай $(n+1)$-го шага итерации

Переход от n к $n+1$: $f_1^{[n+1]} := f_0^{[n]} =: c_1^{[n+1]} + O(z)$,

$$f_0^{[n+1]} := \frac{1}{z}\left(f_1^{[n]} - \frac{c_1^{[n]}}{c_0^{[n]}} f_0^{[n]}\right) =: c_0^{[n+1]} + O(z).$$

Пусть

$$M^{[n]} := \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & -c_1^{[n]}/c_0^{[n]} \end{pmatrix}, \quad A^{[n]} := M^{[n]} \dots M^{[0]} = \begin{pmatrix} P_1^{[n]} & P_2^{[n]} \\ Q_1^{[n]} & Q_2^{[n]} \end{pmatrix},$$

где $P_j^{[n]}, Q_j^{[n]}$ – полиномы. Тогда

$$A^{[n+1]} := M^{[n+1]} A^{[n]} = \begin{pmatrix} P_1^{[n+1]} & P_2^{[n+1]} \\ Q_1^{[n+1]} & Q_2^{[n+1]} \end{pmatrix},$$

где $P_j^{[n+1]}, Q_j^{[n+1]} \in \mathbb{C}[z] \Rightarrow$ рекуррентные соотношения:

$$P_j^{[n+1]} = zQ_j^{[n]},\ Q_j^{[n+1]} = P_j^{[n]} - \frac{c_1^{[n+1]}}{c_0^{[n+1]}} Q_j^{[n]}, \quad j = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots .$$

$\Rightarrow$

$$Q_j^{[n+1]}(z) = -\frac{c_1^{[n+1]}}{c_0^{[n+1]}} Q_j^{[n]}(z) + zQ_j^{[n-1]}(z), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

$$P_j^{[n+1]} = zQ_j^{[n]},\ Q_j^{[n+1]} = P_j^{[n]} - \frac{c_1^{[n+1]}}{c_0^{[n+1]}} Q_j^{[n]}, \quad j = 1, 2, \dots,\ n = 1, 2, \dots .$$

$\Rightarrow$

$$Q_j^{[n+1]}(z) = -\frac{c_1^{[n+1]}}{c_0^{[n+1]}} Q_j^{[n]}(z) + zQ_j^{[n-1]}(z), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Начальные условия:

$$Q_1^{[0]} = Q_1 = 1,\ Q_2^{[0]} = Q_2 = -\frac{c_1}{c_0},\ Q_1^{[1]} = -\frac{c_1^{[1]}}{c_0^{[1]}},\ Q_2^{[1]} = z + \frac{c_1^{[1]}}{c_0^{[1]}} \frac{c_1}{c_0}.$$

При этом имеем

$$A^{[n]} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{[n+1]} & P_2^{[n+1]} \\ Q_1^{[n+1]} & Q_2^{[n+1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = z^{n+1} \begin{pmatrix} f_1^{[n+1]} \\ f_0^{[n+1]} \end{pmatrix} = O(z^{n+1}). \quad (17)$$

Алгоритм для набора рядов $[f_0, \ldots, f_m]$

Nikolay R. Ikonomov, Sergey P. Suetin, ”Viskovatov algorithm for Hermite–Padé polynomials”, 2000, 23 pp., arXiv:2007.03370

Алгоритм для набора рядов $[f_0, \dots, f_m]$

- Nikolay R. Ikonomov, Sergey P. Suetin, "Viskovatov algorithm for Hermite–Padé polynomials", 2000, 23 pp., arXiv:2007.03370

Построение новых рядов $f_0^{[n]}, \dots, f_m^{[n]}$, $n = 1, 2, \dots$

Nikolay R. Ikonomov, Sergey P. Suetin, ”Viskovatov algorithm for Hermite–Padé polynomials”, 2000, 23 pp., arXiv:2007.03370

Построение новых рядов $f_0^{[n]},\dots,f_m^{[n]}$, $n=1,2,\dots$

Шаг 1:

$$f_m^{[1]}:=f_0^{[0]}=:\sum_{k=0}^{\infty}c_{m,k}^{[1]}z^k=c_m^{[1]}+O(z),$$

$$f_j^{[1]}:=\frac{1}{z}\left(f_{j+1}^{[0]}-\frac{c_{j+1}^{[0]}}{c_j^{[0]}}f_j^{[0]}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{j,k}^{[1]}z^k=c_j^{[1]}+O(z),\ j=0,\dots,m-1,$$

$$a_j^{[1]}:=-c_j^{[1]}/c_{j-1}^{[1]},\quad j=1,\dots,m.$$

$(n+1)$-й шаг:

Полагаем

$$f_m^{[n+1]} := f_0^{[n]} =: \sum_{k=0}^{\infty} c_{m,k}^{[n+1]} z^k = c_m^{[n+1]} + O(z),$$

$$f_j^{[n+1]} := \frac{1}{z}\left(f_{j+1}^{[n]} + a_{j+1}^{[n]} f_j^{[n]}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}^{[n+1]} z^k = c_j^{[n+1]} + O(z),\ j = 0, \dots, m$$

$$a_j^{[n+1]} := -c_j^{[n+1]} / c_{j-1}^{[n+1]}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Замечания

Замечания

(1) Итак, по заданному набору рядов $f_0, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[[z]]$ мы построили новые ряды $f_0^{[n]}, \ldots, f_m^{[n]} \in \mathbb{C}[[z]]$ и нашли величины $a_1^{[n]}, \ldots, a_m^{[n]} \in \mathbb{C}$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечания

(1) Итак, по заданному набору рядов $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{C}[[z]]$ мы построили новые ряды $f_0^{[n]}, \dots, f_m^{[n]} \in \mathbb{C}[[z]]$ и нашли величины $a_1^{[n]}, \dots, a_m^{[n]} \in \mathbb{C}$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$.

(2) Отметим, что основная цель этого шага – это именно нахождение m величин $a_1^{[n]}, \dots, a_m^{[n]} \in \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Замечания

(1) Итак, по заданному набору рядов $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{C}[[z]]$ мы построили новые ряды $f_0^{[n]}, \dots, f_m^{[n]} \in \mathbb{C}[[z]]$ и нашли величины $a_1^{[n]}, \dots, a_m^{[n]} \in \mathbb{C}$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$.

(2) Отметим, что основная цель этого шага – это именно нахождение m величин $a_1^{[n]}, \dots, a_m^{[n]} \in \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

(3) Из описания шага вытекает, что процедуры вычисления новых рядов $f_0^{[n+1]}, \dots, f_m^{[n+1]}$ по рядам $f_0^{[n]}, \dots, f_m^{[n]}$ могут выполняться параллельно.

Построение HP-полиномов для мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]} \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$ при $n \geqslant m-1$

Построение НР-полиномов для мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]} \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$ при $n \geqslant m-1$

Начальные условия

Полагаем

$$\vec{A}_{m+1}^{[0]} := (0, 0, 0, \dots, 0, 1, a_1^{[0]}) \in \mathbb{C}^{m+1}.$$

$$\vec{A}_2^{[1]} := (a_m^{[1]}, a_m^{[1]} a_m^{[0]}, 0, 0, \dots, 0, 0, z) \in \mathbb{C}^{m+1},$$

для $j = 3, \dots, m+1$ полагаем

$$\vec{A}_j^{[1]} := (0, \dots, 0, \underbrace{1, a_{m+2-j}^{[1]} + a_{m+3-j}^{[0]}, a_{m+2-j}^{[1]} a_{m+2-j}^{[0]}}_{j-2,\ j-1,\ j}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{m+1}.$$

$(n+1)$-й шаг: нахождение мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]}$

$(n+1)$-й шаг: нахождение мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]}$

Полагаем $\ell := (n-(m-1)) \pmod{m+1} \in \{0,\dots,m\}$, находим k из соотношения $n-(m-1) = (m+1)k+\ell$ (имеем: $\ell = 0,\dots,m$, $k := (n-(m-1)-\ell)/(m+1) \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0,1,\dots$).

$(n+1)$-й шаг: нахождение мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]}$

Полагаем $\ell := (n-(m-1)) \pmod{m+1} \in \{0,\dots,m\}$, находим k из соотношения $n-(m-1) = (m+1)k + \ell$ (имеем: $\ell = 0,\dots,m$, $k := (n-(m-1)-\ell)/(m+1) \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0,1,\dots$). Полагаем

$$\mathbf{k}^{[n]} := (\underbrace{k+1,\dots,k+1}_{\ell},\underbrace{k,\dots,k}_{m+1-\ell}) \in \mathbb{Z}_+^{m+1}.$$

Мультииндекс $\mathbf{k}^{[n]}$ однозначно определяется по заданному числу $n \geqslant m-1$.

$(n+1)$-й шаг: нахождение мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]}$

Полагаем $\ell := (n-(m-1)) \pmod{m+1} \in \{0,\dots,m\}$, находим k из соотношения $n-(m-1) = (m+1)k+\ell$ (имеем: $\ell = 0,\dots,m$, $k := (n-(m-1)-\ell)/(m+1) \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0,1,\dots$).
Полагаем

$$\mathbf{k}^{[n]} := (\underbrace{k+1,\dots,k+1}_{\ell},\underbrace{k,\dots,k}_{m+1-\ell}) \in \mathbb{Z}_+^{m+1}.$$

Мультииндекс $\mathbf{k}^{[n]}$ однозначно определяется по заданному числу $n \geqslant m-1$.
Находим

$$\vec{A}_2^{[n+1]} := a_m^{[n+1]}\vec{A}_2^{[n]} + z\vec{A}_{m+1}^{[n-1]},$$

для $j = 3,\dots,m+1$ полагаем

$$\vec{A}_j^{[n+1]} := a_{m+2-j}^{[n+1]}\vec{A}_j^{[n]} + \vec{A}_{j-1}^{[n]}.$$

При всех $n \geqslant m-1$ имеем для $\vec{f} = (f_m, \dots, f_0)$

$$\vec{A}_{m+1}^{[n]\,\mathrm{T}} \vec{f} = O(z^{n+1})$$

и вектор $\vec{Q}_{\mathbf{k}^{[n]}}(\vec{f}) := (A_{m+1,m+1}^{[n]}, \dots, A_{m+1,1}^{[n]}) = (Q_{\mathbf{k}^{[n]},0}, \dots, Q_{\mathbf{k}^{[n]},m})$ – вектор НР-полиномов для вектор-ряда $(f_0, \dots, f_m)$ и мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]} = (k_0, \dots, k_m)$, где $k_j = \deg A_{m+1,m+1-j}^{[n]}$, $j = 0, \dots, m$, При всех $n \geqslant m-1$ имеем для $\vec{f} = (f_m, \dots, f_0)$

$$\vec{A}_{m+1}^{[n]}{}^{\mathrm{T}}\vec{f} = O(z^{n+1})$$

и вектор $\vec{Q}_{\mathbf{k}^{[n]}}(\vec{f}) := (A_{m+1,m+1}^{[n]}, \dots, A_{m+1,1}^{[n]}) = (Q_{\mathbf{k}^{[n]},0}, \dots, Q_{\mathbf{k}^{[n]},m})$ – вектор НР-полиномов для вектор-ряда $(f_0, \dots, f_m)$ и мультииндекса $\mathbf{k}^{[n]} = (k_0, \dots, k_m)$, где $k_j = \deg A_{m+1,m+1-j}^{[n]}$, $j = 0, \dots, m$, порядок касания равен

$$|\mathbf{k}^{[n]}| + m = \sum_{j=0}^{m} \deg A_{m+1,m+1-j}^{[n]} + m = n+1.$$

Нули HP-полиномов $Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},2}$, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$

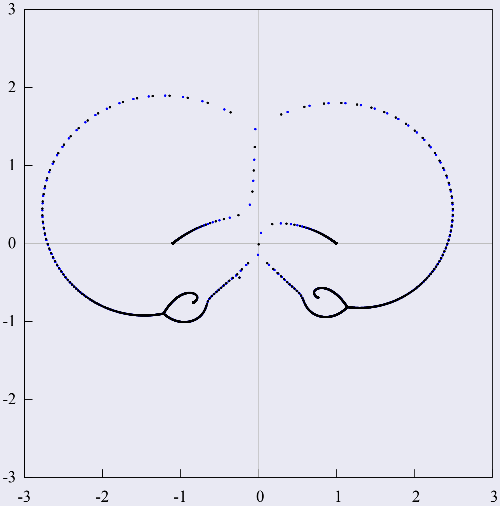


Рис.: Нули HP-полиномов $Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},2}$, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$.

Нули НР-полиномов $Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},1}, Q_{\mathbf{n},2}$, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$

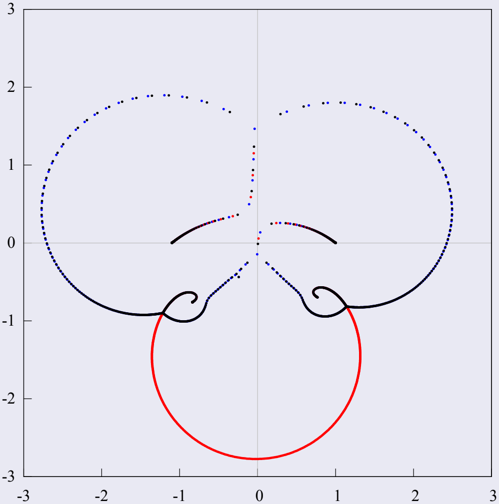


Рис.: Нули НР-полиномов $Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},1}, Q_{\mathbf{n},2}$, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$.

Нули НР-полиномов $Q_{\mathbf{n},1}$, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$

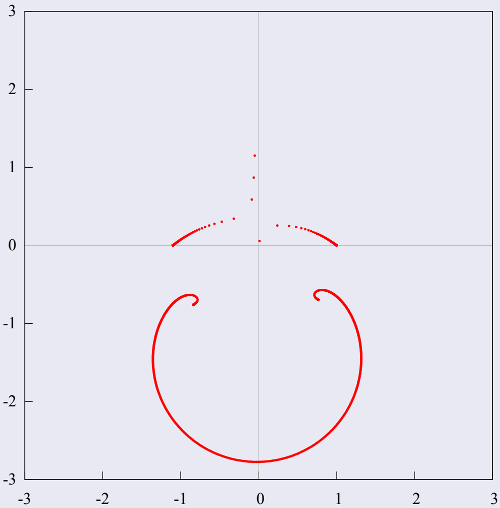


Рис.: Нули НР-полиномов $Q_{\mathbf{n},1}$, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$.

Нули НР-полиномов $Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},2}, P_{2n}$, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$

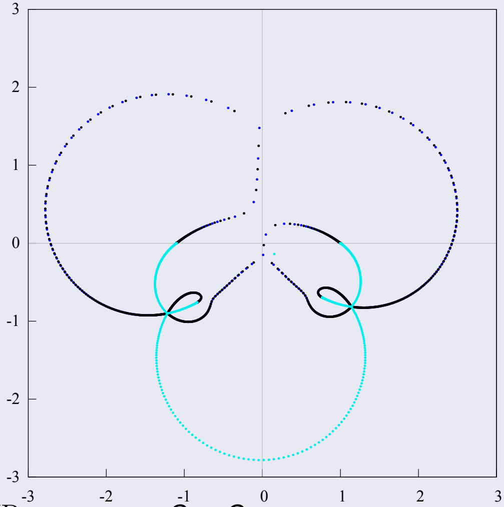


Рис.: Нули НР-полиномов $Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},2}$ – черные и синие точки, $\mathbf{n} = (1500, 1500, 1500)$, P_{2n} – голубые точки

Спасибо за внимание !