

Лекция 4.

Теорема: (о разложении $\zeta(s)$ в виде произведения Вейерштасса).

Пусть $\zeta(s) = s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \mathcal{S}(s)$, $s \in \mathbb{C}$.

Справедливо рав-во:

$$\zeta(s) = e^{as} \prod_p \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \text{ где } \rho - \text{нули } \zeta(s)$$

с учетом кратности, расположенные в порядке возрастания модулей; при этом

$$a = \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\gamma}{2} - 1,$$

$$\sum_n \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \sum_n \frac{1}{|\rho_n|} = +\infty.$$

D-во (продолжение):

$$f(s) := \prod_p \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}.$$

D-ем, что $f(s)$ - целая ф-ия и имеет заданные нули ρ . Возьмём посл-ть $R \rightarrow +\infty$: на границе круга $|s| \leq R$ нет нулей ρ , и д-ем, что в круге $|s| \leq R$ $f(s)$ - целая и имеет нули ρ с условием $|\rho| < R$.

$$f(s) = f_1(s) \cdot \prod_{|p| > R} \overbrace{\left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}}}^{f_2(s)}$$

таким-образом у нас есть представление функции в круге $|s| \leq R$.

Умб: пусть есть $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n)$. Тогда

если $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ (где $u_n \in \mathbb{C}$), то

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n) < +\infty \quad (\neq 0).$$

$$\prod_{|p_n| > R} \left(1 - \frac{s}{p_n}\right) e^{\frac{s}{p_n}} = \prod_{|p_n| > R} (1 + u_n(s)), \quad u_n(s) = \left(1 - \frac{s}{p_n}\right) e^{\frac{s}{p_n}} - 1.$$

$$|u_n(s)| \leq \left| \left(1 - \frac{s}{p_n}\right) \left(1 + \frac{s}{p_n} + O\left(\frac{|s|^2}{|p_n|^2}\right)\right) - 1 \right| = O\left(\frac{R^2}{|p_n|^2}\right) =: u_n$$

$$\sum_n |u_n(s)| \ll R^2 \sum_n \frac{1}{|p_n|^2} < +\infty. \Rightarrow$$

$$\prod_{|p_n| > R} \left(1 - \frac{s}{p_n}\right) e^{\frac{s}{p_n}} \text{ с.к.}$$

Хотим показать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq N_0(\varepsilon):$

при $|s| < R$ верно

$$\left| \underbrace{\prod_{|p_n| > R} (1 + u_n(s))}_{f_2(s)} - \underbrace{\prod_{R < |p_n| \leq N} (1 + u_n(s))}_{f_2(s, N)} \right| \leq \varepsilon.$$

$$\left| \prod_{|p_n| > R} (1 + u_n(s)) \right| \leq \underbrace{\prod_{|p_n| > R} \left(1 + \frac{cR^2}{|p_n|^2} \right)}_{\substack{ii \\ A}} < +\infty$$

$$\left| \prod_{R \leq |p_n| \leq N} (1 + u_n(s)) \right| \leq \underbrace{\prod_{R \leq |p_n| \leq N} \left(1 + \frac{cR^2}{|p_n|^2} \right)}_{\substack{ii \\ A_N}}$$

$A_N \rightarrow A$ — знанн.

ϕ — ем, умо

$$\left| \frac{f_2(s)}{f_2(s, N)} - 1 \right| \leq \frac{A}{A_N} - 1.$$

$$\left| \frac{f_2(s, N+M)}{f_2(s, N)} - 1 \right| = \left| \prod_{N \leq |p_n| \leq N+M} (1 + u_n(s)) - 1 \right| =$$

$$= \left| \sum_n' u_n(s) + \sum_{n_1 n_2} u_{n_1}(s) u_{n_2}(s) + \dots \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_n' \underbrace{\frac{cR^2}{|p_n|^2}}_{u_n} + \dots \right| = \prod_{\substack{n: \\ N \leq |p_n| \leq N+M}} (1 + u_n) - 1 = \frac{A_{N+M}}{A_N} - 1 \rightarrow \frac{A}{A_N} - 1 \xrightarrow{M \rightarrow +\infty}$$

$$|f_2(s) - f_2(s, N)| \leq |f_2(s, N)| \cdot \left| \frac{A}{A_N} - 1 \right| \leq |A - A_N| < \varepsilon.$$

$f_2(s, N) \Rightarrow f_2(s) \quad |s| \leq R.$

До-бо ymb. - u2:

$$\text{Єм} \sum_n \ln(1+u_n) < \infty \Rightarrow \prod_n (1+u_n) < +\infty \quad (u \neq 0).$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n \in N} (1+u_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} e^{\sum_{n \in N} \ln(1+u_n)} = e^{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+u_n)} = e^c = e.$$

$\downarrow$
т.к. e^x непрерывна
 $\downarrow$
0

До-ем, что $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+u_n) < +\infty$.

$$\ln(1+u_n) = \ln|1+u_n| + i \arg(1+u_n)$$

Дано: $\sum_n |u_n| < +\infty \Rightarrow |u_n| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$.

Будем полагать, что $|u_n| \leq \frac{1}{2}$.

1 сл. $u_n \in \mathbb{R}$.

$$|\ln(1+u_n)| \leq |u_n| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \leq 2|u_n|$$

Бог $\sum_n \ln(1+u_n) - \text{абс. сж. сж.} \Rightarrow \text{пж. сж.}$

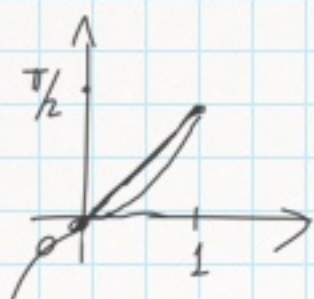
2 сл. $u_n \in \mathbb{C}$.

$$|\sigma_n| = |(1+u_1) \dots (1+u_n)| - \text{сж. сж.} \Leftrightarrow |\sigma_n|^2 - \text{сж. сж.}$$

$$|1+u_n|^2 = (1+\alpha_n)^2 + \beta_n^2 \leq 1 + |u_n|^2 + 2|u_n|$$

$u_n = \alpha_n + i\beta_n \Rightarrow$ использовать 1 сл. $\Rightarrow \sum_n \ln|1+u_n|^2 < \infty$

$$|\arg(1+u_n)| = \left| \arcsin \frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2 + \beta_n^2}} \right| \leq \frac{\pi}{2} |\beta_n| \ll |u_n|$$



$$\Rightarrow \sum_n \arg(1+u_n) < +\infty.$$

Умб.-ие g-но.

Рассм. $\zeta(s) f^{-1}(s)$ - целая, не имеет нулей $\Rightarrow$

$$\underbrace{\ln \zeta(s) f^{-1}(s)}_{h(s)} - \text{целая g-ия}$$

$$\zeta(s) f^{-1}(s) = e^{h(s)}$$

В круге радиуса R ($|s| \leq R$) g-ия

$\zeta(s)$ имеет $\ll R \ln R$ нулей (для g-но) $\Rightarrow$

$$\exists R_1 : R-1 \leq R_1 < R : |R_1 - |\rho_n|| \gg \frac{1}{R \ln R}.$$

Д-ем, что при $|s| \leq R_1$

$$\operatorname{Re} h(s) = \ln |e^{h(s)}| \leq R_1^{1+\varepsilon} \quad (*)$$

Если мы это знаем, то воспользуемся леммой Фореля - Каратеодори.

Лемма Фурье — Карамегорни:

$f(s)$ — анал. в круге $|s| \leq R \Rightarrow \forall n \geq 1$.

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq 2 (A(R) - \operatorname{Re} f(0)) R^{-n}, \text{ где}$$

$$A(R) = \max_{|s|=R} \operatorname{Re} f(s).$$

$$h(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} s^n,$$

$$\frac{|h^{(n)}(0)|}{n!} \ll \frac{R_1^{1+\varepsilon}}{R_1^n} \xrightarrow{n \geq 2} 0, \quad R_1 \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow h(s) = A + Bs$$

Д-ем, что $\operatorname{Re} h(s) = \ln |e^{h(s)}| \leq R_1^{1+\varepsilon}, |s| = R_1$.

$$e^{h(s)} = \xi(s) f^{-1}(s)$$

$$|\xi(s)| \leq e^{cR \ln R}, \quad |s| \leq R. \quad (\text{где } c \text{ — из предыдущего раз.})$$

Хотим оценить $|f(s)|$ снизу.

$$f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}}, \quad |s| = R_1.$$

$$\text{Таким образом } |p| \geq 2R_1 \Rightarrow \left| \prod_{|p| \geq 2R_1} \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}} \right| \geq$$

$$\geq e^{-c \sum_{|p| \geq 2R_1} \frac{R_1^2}{|p|^2}} \geq e^{-c R_1^{1+\varepsilon} \sum_{|p| \geq 2R_1} \frac{R_1^2}{|p|^{1+\varepsilon}}} \geq e^{-c R_1^{1+\varepsilon}}.$$

Σύμφωνα $|p_n| \leq \frac{R_1}{2}$.

$$\left| \prod_{|p_n| \leq \frac{R_1}{2}} \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}} \right| \geq e^{-R_1 \sum_{|p_n| \leq \frac{R_1}{2}} \frac{1}{|p|}} \quad (\geq)$$

$$\left| e^{\frac{s}{p}} \right| \geq e^{-\frac{R_1}{|p|}}$$

$$\left| 1 - \frac{s}{p} \right| \geq 1$$

$$(\geq) \quad e^{-R_1 \sum_{|p_n| \leq \frac{R_1}{2}} \frac{1}{|p|^{1+\varepsilon}}} \geq e^{-R_1^{1+2\varepsilon}}.$$

Εάν $\frac{R_1}{2} \leq |p_n| \leq 2R_1$, $|s| = R_1$

$$\left| \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}} \right| \geq e^{-2} \frac{|s-p|}{2R_1} \geq e^{-2} R_1^{-1} \cdot R_1^{-1-\varepsilon} \Rightarrow R_1^{-2-\varepsilon}.$$

$$\left| \prod_{\frac{R_1}{2} \leq |p| \leq 2R_1} \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}} \right| \geq \left(\frac{c}{R_1^{2+\varepsilon}} \right)^{R_1^{1+\varepsilon}} > e^{-R_1^{1+\varepsilon} (\ln R_1 - \ln c)} \geq$$

→ ουσιαστικά και-βέβαια μηδέν

$$\geq e^{-R_1^{1+2\varepsilon}}.$$

$$\left| e^{h(s)} \right| \ll e^{R_1^{1+2\varepsilon}}$$

$$\ln \left| e^{h(s)} \right| \ll R_1^{1+2\varepsilon}.$$

$$e^{As+B} = e^{as}, \text{ где } a = \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\gamma}{2} - 1.$$

до-во:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s'}{s}(s).$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = A + \sum_p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right)$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = A = - \frac{\zeta'}{\zeta}(1)$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1) = 1 - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) + \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{s'}{s}(s) \right).$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \dots \quad - \text{близ задано.}$$

$$\left(\frac{s'}{s}(s) + \frac{1}{s-1} \right) \rightarrow \gamma \quad s \rightarrow 1.$$

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right) \quad - \text{из разложения Вейерштрасса}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) =$$

по нулям $\Gamma^{-1}(s)$
как целой ф-ии.

$$= -1 - \frac{\gamma}{2} + (1 - \ln 2) = -\frac{\gamma}{2} - \ln 2$$

$$-A = 1 - \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{\gamma}{2} - \ln 2 + \gamma = 1 + \frac{\gamma}{2} - \ln 2 \sqrt{\pi}.$$

$B=0$. D-60:

$$\zeta(s) = e^{As+B} \prod_p \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}}.$$

$$\zeta(0) = \zeta(1) = e^B \Rightarrow B=0.$$

$\parallel$
1

Основная г-мб, что $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|p_n|} = +\infty$.

D/3:

14. Д-ть, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $0 < |\operatorname{Im} s| \leq 6,5$.

Подсказка: воспользоваться произведением Вейерштрасса по нулям для $\xi(s)$ (а точнее ф-ой для $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$), значением постоянной a , а также симметрией нулей ρ .

15. Д-ть, что если $\xi(s)$ не имеет нулей в области $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, то и $\xi(s)$ не имеет нулей в этой области.

16. Д-ть, что $\zeta(s) = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{s}{n}) e^{-\frac{s}{n}}$ — целая и имеет лишь простые нули в точках $s = 0, -1, -2, \dots$

17. Д-ть, что при $\operatorname{Re} s > 0$
- $$F(s, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt = n^s \cdot \frac{n!}{s(s+1) \dots (s+n)}.$$

Подсказка: интегрирование по частям много раз.

18. Д-ть, что
- $$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(s, n).$$

19. Доказать, что для $f(s)$ из зад. 16

справедливо

$$f(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^s (n-1)!}{s(s+1) \dots (s+n-1)}.$$

Подсказка:
воспользоваться
определением σ .

Существование: $f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(s, n).$

Существование:

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \Gamma^{-1}(s) = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}.$$