Подфакторы вещественного фактора и их индексы

Болтаев Х.Х.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами

Март 18, 2021

Оглавление

Введение

В классической теории групп индекс $[G : H]$ подгруппы H группы G – это число смежных (левых или правых) классов G относительно подгруппы H. К примеру, $[\mathbb{Z} : \mathbb{Z}_n] = n$. В 1983 году новозеландский математик Воган Джонс (Vaughan Jones) обобщил понятие индекса для конечных W*-алгебр [1] Он указал множества возможных значений индекса и, в частности, он доказал, что если M – W*-алгебра, G – счетная дискретная группа автоморфизмов M и H – подгруппа G, для которых скрещенные произведения $M \times G$ и $M \times H$ являются конечными факторами, тогда

$$[M \times G : M \times H] = [G : H].$$

Это показывает, что понятие индекса подфактора является обобщением понятия индекса подгруппы. За все эти работы В.Джонс в 1990 году в Киото, на всемирном XXI-математическом Конгрессе, был награжден медалью Филдса. В конце 80-х годов японский математик Х.Косаки обобщил работы Джонса для произвольных факторов [2]

[1] V. F. R. Jones. Index for Subfactors. Inventiones Math. (1983), 1–25.

[2] H. Kosaki. Extension of Jones' Theory on index to arbitrary factors. J.F.A. (1986), 123–140

Введение

Как известно, задача изучения йордановых банаховых алгебр (в частности, JW-алгебр), во многих случаях, редуцируется к изучению вещественных алгебр фон Неймана (т.е. вещественных W*-алгебр). Поэтому параллельно с теорией JW и (комплексной) теорией W*-алгебр бурно продолжается исследование теории вещественных W*-алгебр. Основные достижения в изучении вещественных W*-алгебр принадлежат в первую очередь Ш. Аюпову, Э. Штермеру, П. Стаси, Ш. Усманову и А. Рахимову. К настоящему времени в основном благодаря этим ученым получена полная классификация вещественных инъективных факторов.

Настоящий доклад посвящен вещественным подфакторам W*-алгебр и их индексам. Рассмотрим некоторые свойства индекса, которые верны и в вещественном случае, а также укажем свойства, неверные для вещественных подфакторов. С помощью множества примеров для каждой пары $N \subset M$ факторов укажем схема построения графов.

Предварительные сведения.

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, B(H)– алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H. Слабая топология на алгебре $B(H)$ определяется как

$$x_\alpha \to \theta \quad \Leftrightarrow \quad (x_\alpha \xi, \eta) \to 0, \quad \forall \xi, \eta \in H$$

Слабо замкнутая *-подалгебра $M \subset B(H)$ с единицей $\mathbf{1}$ называется *W*-алгеброй*. Множество

$$M' = \{x \in B(H) : \; xy = yx, \; \forall y \in M\}$$

называется *коммутантом* *-алгебры M. Множество $Z = M \cap M'$ называется *центром* алгебры M. W*-алгебра M называется *фактором*, если ее центр тривиален, т.е. Z совпадает с $\{\lambda \mathbf{1}, \; \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Предварительные сведения.

Вещественная *-подалгебра $R \subset B(H)$ называется *вещественной W*–алгеброй*, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$. Известно, что существует H_r - вещественное гильбертово пространство такое, что

$$H_r + iH_r = H, \quad R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H).$$

Коммутант *-алгебры R определяется аналогично комплексному случаю:

$$R' = \{a \in B(H_r) : \; ab = ba, \; \forall b \in R\}.$$

Непосредственно проверяется, что $(R + iR)' = R' + iR'$.

Предварительные сведения.

Линейное отображение α алгебры M в себя с $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ называется **-автоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$; **-антиавтоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$ и *инволютивным* отображением, если $\alpha^2(x) = x$. Если α – инволютивный *-антиавтоморфизм W*-алгебры M, то через (M, α) мы обозначим вещественную W*-алгебру $\{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$, порожденную антиавтоморфизмом α. Наоборот, всякая вещественная W*-алгебра R имеет вид (M, α), где $M = R + iR$ – обертывающая W*-алгебра и α – инволютивный *-антиавтоморфизм M, определенный как $\alpha(x + iy) = x^* + iy^*$ [3]. Вещественная W*-алгебра R называется *вещественным фактором*, если ее центр совпадает с $\{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$; R имеет тип I_n, I_∞, II_1, II_∞ или III_λ, $(0 \leq \lambda \leq 1)$, если ее обертывающая W*-алгебра имеет соответствующий тип в смысле обычной классификации W*-алгебры.

---

[3] Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, Sh. M. Usmanov. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluw.Acad.Pub.,MAIA. Vol. 418, (1997), 235p.

Предварительные сведения.

Пусть R – вещественный фактор типа II_1, τ – точный нормальный канонический след на R. След τ продолжается на $M = R + iR$ как $\overline{\tau}(a + ib) := \tau(a)$, причем след $\overline{\tau}$ также является точным нормальным следом. Аналогично следы на алгебрах R' и $M' = (R + iR)'$ обозначим как τ' и $\overline{\tau}'$ соответственно. Для любого вектора $\xi \in H$ $(\xi \neq 0)$ рассмотрим следующие проекторы:

$$e_\xi : H \to \overline{R'\xi}, \quad e'_\xi : H \to \overline{R\xi}, \quad f_\xi : H \to \overline{M'\xi} \text{ и } f'_\xi : H \to \overline{M\xi}.$$

Легко показать, что $e_\xi \in R$, $e'_\xi \in R'$, $f_\xi \in M$, $f'_\xi \in M'$. Известно, что число $\dfrac{\overline{\tau}(f_\xi)}{\overline{\tau}'(f'_\xi)}$ называется *парной константой Неймана-Мюррея*, причем это число не зависит от вектора ξ и обозначается через $\dim_M(H)$.

$e_\xi : H \to \overline{R'\xi}, \quad e'_\xi : H \to \overline{R\xi}, \quad f_\xi : H \to \overline{M'\xi}$ и $f'_\xi : H \to \overline{M\xi}$

Аналогично, число $\dfrac{\tau(e_\xi)}{\tau'(e'_\xi)}$, обозначаемое через $\dim_R(H_r)$, также не зависит от вектора ξ, и эти парные константы Неймана-Мюррея совпадают между собой (Теорема 3.5.2, [4]

$$\dim_M(H) = \frac{\overline{\tau}(f_\xi)}{\overline{\tau}'(f'_\xi)} = \frac{\tau(e_\xi)}{\tau'(e'_\xi)} = \dim_R(H_r).$$

Вообще говоря, имеют место следующие неравенства

$$\overline{\tau}(f_\xi) \neq \tau(e_\xi), \qquad \overline{\tau}'(f'_\xi) \neq \tau'(e'_\xi).$$

То есть равенство $\overline{\tau}(a+ib) = \tau(a)$ не влечет за собой равенств: $\overline{\tau}(f_\xi) = \tau(e_\xi)$ и $\overline{\tau}'(f'_\xi) = \tau'(e'_\xi)$. Потому что, например, проектор $f_\xi \in M$ имеет вид $f_\xi = a + ib$, где $a, b \in R$, $a \geq 0$, $b = -b^*$, и в общем случае $a \neq e_\xi$. Однако ясно, что $\exists\lambda > 0$ с $\overline{\tau}(f_\xi) = \lambda\tau(e_\xi)$ и $\overline{\tau}'(f'_\xi) = \lambda\tau'(e'_\xi)$.

[4] Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov. Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Mauritius. (2010), 138p.

Индекс конечных подфакторов.

Пусть теперь $L^2(R)$ – вещественное гильбертово пространство, получаемое пополнением алгебры R относительно нормы $\|a\|_2 = \tau(a^*a)^{1/2}$. Аналогично через $L^2(M)$ обозначим пополнение алгебры M по норме $\|x\|_2 = \overline{\tau}(x^*x)^{1/2}$.

Легко проверить, что

$$L^2(R) + iL^2(R) = L^2(M). \tag{1}$$

Определение 1. Пусть R – конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ – подфактор. *Индексом* Q в R называется число $\dim_Q(L^2(R))$, которое обозначается как $[R : Q]$.

Используя формулу (1) можно получить следующий результат

Теорема 1. Индекс вещественного подфактора совпадает с индексом обертывающего подфактора

$$\dim_Q(L^2(R)) = \dim_{Q+iQ}(L^2(R+iR)), \text{ т.е. } [R : Q] = [R+iR : Q+iQ].$$

Индексы вещественных W*-подалгебр.

Ясно, что комплексный фактор имеет большее количество вещественных W*-подалгебр, чем комплексных W*-подалгебр. В частности, сам (комплексный) фактор является вещественной W*-алгеброй. Рассмотрим это на примере. Пусть M – фактор типа I_6, т.е.

$$M \cong M_6(\mathbb{C}) \cong B(\mathbb{C}^6).$$

Тогда M имеет, с точностью до изоморфизма, девять [5] (без учета прямых слагаемых) собственных вещественных W*-подалгебр, являющихся вещественными или комплексными подфакторами M: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$, $M_2(\mathbb{R})$, $M_2(\mathbb{C})$, $M_3(\mathbb{R})$, $M_3(\mathbb{C})$, $M_3(\mathbb{H})$ и $M_6(\mathbb{R})$, где $\mathbb{H}$ – тело кватернионов. Индексы вещественных W*-подалгебр вычисляются непосредственно:

[5] Заметим, что фактор M имеет ровно три (комплексных) подфакторов.

Индексы вещественных W*-подалгебр.

$$[M_6(\mathbb{C}) : \mathbb{C}] = [M_6(\mathbb{R}) : \mathbb{R}] = [M_3(\mathbb{H}) : \mathbb{R}] = 36,$$

$$[M_6(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{C})] = [M_6(\mathbb{R}) : M_2(\mathbb{R})] = [M_3(\mathbb{H}) : \mathbb{H}] = 9,$$

$$[M_6(\mathbb{R}) : M_3(\mathbb{R})] = 4, \quad [M_6(\mathbb{C}) : M_3(\mathbb{R})] = 2[M_6(\mathbb{R}) : M_3(\mathbb{R})] = 8,$$

$$[M_6(\mathbb{C}) : \mathbb{H}] = 2[M_3(\mathbb{H}) : \mathbb{H}] = 18,$$

$$[M_6(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{R})] = 2[M_6(\mathbb{R}) : M_2(\mathbb{R})] = 18.$$

Можно заметить, что в общем случае справедливо следующие формулы:

$$[M_n(\mathbb{R}) : M_m(\mathbb{R})] = (\frac{n}{m})^2, \quad [M_n(\mathbb{C}) : M_m(\mathbb{R})] = 2(\frac{n}{m})^2.$$

Индексы вещественных W*-подалгебр.

Используя теорему 1 и результат В.Джонса, мы получим следующую теорему

Теорема 2. Пусть R – конечный вещественный фактор и Q – подфактор R. Тогда

$$[R : Q] \in \ \{4\cos^2\frac{\pi}{q} \ : \ q \geq 3\} \cup [4, +\infty].$$

Расширенная положительная часть W*-алгебры.

Теперь обобщим понятие индекса для произвольной вещественной W*-алгебры. Сначала дадим определение расширенной положительной части $\hat{R}^+$ вещественной W*-алгебры R [6] Пусть R_*^+ – множество всех нормальных положительных линейных функционалов на R, которые равны нулю на кососимметричных элементах R. Тогда каждый такой функционал f единственным образом продолжается на $M = R + iR$ как $\overline{f}(a + ib) := f(a)$, поскольку $a + ib \geq 0$, $b = -b^*$ и $f(b) = 0$. Причем $\overline{f}$ также нормален. Рассмотрим на R_*^+ множество $\hat{R}^+$ всех положительно-однородных аддитивных полунепрерывных снизу функций $m : R_*^+ \to [0, +\infty]$. Вложим $\hat{R}^+$ в конус R^+, отождествляя произвольный элемент $a \in R^+$ с функцией m_a, где $m_a(f) = f(a)$, $\forall f \in R_*^+$. Если a – неограниченный самосопряженный положительный оператор с носителем e, присоединенный к R, то определим функцию m_a следующим образом:

[6] Ш. М. Усманов. Условные ожидания на вещественных W*-алгебрах и JW-алгебрах. Известия высших учебных заведений. Математика. (2001), Vol 470, N7, 43–47.

Расширенная положительная часть W*-алгебры.

$$m_a(f) = \sum f(\bar{e}_n a) + (+\infty) f(\mathbf{1} - e),$$

где f – произвольный функционал из R_*^+ и $\bar{e}_n = e_{[n-1,n]}$ – спектральные проекторы элемента a и $n \in \overline{1, \infty}$.

Определение 2. Множество $\hat{R}^+$ называется расширенной положительной частью алгебры R.

Из определения вытекает, что $\hat{R}^+ \subset \hat{M}^+$. Верно следующая теорема:

Теорема 3. [7] Для любого $m \in \hat{R}^+$ существуют проектор $e \in R$ и положительный самосопряженный (но не необходимо ограниченный) оператор a на eH, присоединенный к R, такой, что $m = m_a$.

[7] Ш. М. Усманов. Изв. выс. учеб. зав. Математика. (2001), V470, N7, 43–47.

Операторно-значные весы.

Пусть R – вещественная W*-алгебра, $Q \subset R$ – вещественная W*-подалгебра. *Операторно-значным весом* на алгебре R со значением в $\hat{Q}$ (или, вкратце, *Q-значным весом*) называется линейное отображение $T : R^+ \to \hat{Q}^+$ такое, что $T(yxy^*) = yT(x)y^*$, для всех $x \in R^+$ и $y \in Q$. Нормальность, точность и полуконечность для T определяются так же, как и для линейных функционалов. А именно, T называется
– *нормальным*, если $a_\gamma \nearrow a$ влечет за собой $T(a_\gamma) \nearrow T(a)$, для $(a_\gamma) \subset R^+$;
– *точным*, если $T(a^*a) = 0$ влечет за собой $a = 0$;
– *полуконечным*, если множество $\{a \in R : \|T(a^*a)\| < \infty\}$ ультраслабо плотно в R.

Множество точных полуконечных весов на R обозначим как $P(R)$, а множество нормальных точных полуконечных операторно-значных весов – как $P(R, Q)$. Известно (У.Хаагерупп), что

$$P(M, N) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; P(N', M') \neq \emptyset, \qquad (2)$$

где $M = R + iR$ и $N = Q + iQ$ – обертывающие W*-алгебры.

Операторно-значные весы.

Это справедливо и в вещественном случае:

Теорема 4. $P(R, Q) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; P(M, N) \neq \emptyset.$

Следствие 1. $P(R, Q) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; P(Q', R') \neq \emptyset.$

Определение 3. Пусть R – σ-конечный (т.е. число попарно ортогональных эквивалентных проекторов не более чем счетно) вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ – подфактор.

Положительное линейное отображение $E : R \to Q$ называется *условным ожиданием*, если выполняются следующие условия:

(i) $E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

(ii) $E(E(x)y) = E(x)E(y) = E(xE(y))$;

(iii) $E(x)^* E(x) \leq E(x^* x), \quad \forall x, y \in R.$

Нормальные условные ожидания.

Пусть $E : R \to Q$ - нормальное условное ожидание. Продолжение E на W*-алгебру $M = R + iR$ мы обозначим как $\overline{E}$. Так как отображение E является операторно-значным весом, то по следствию 1 ему соответствует некоторое отображение $E^{-1} \in P(Q', R')$. Нетрудно показать, что $\overline{E}^{-1} = \overline{E^{-1}}$. По определению отображение E имеем $\overline{E}(\mathbf{1}) = E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Однако в общем случае, $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1}) \neq \mathbf{1}$. Легко увидеть, что для любых унитарных элементов $u \in R'$ и $v \in M'$ справедливо равенства

$$uE^{-1}(\mathbf{1})u^* = E^{-1}(u\mathbf{1}u^*) = E^{-1}(\mathbf{1}), \qquad v\overline{E}^{-1}(\mathbf{1})v^* = \overline{E}^{-1}(v\mathbf{1}v^*) = \overline{E}^{-1}(\mathbf{1}).$$

Отсюда $uE^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}u$ и $v\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = \overline{E}^{-1}(\mathbf{1})v$. Таким образом, элемент $E^{-1}(\mathbf{1}) = \overline{E}^{-1}(\mathbf{1})$ коммутирует произвольным унитарным элементом коммутанта алгебры.

Нормальные условные ожидания.

Так как всякий элемент алгебры порождается унитарными элементами, то $E^{-1}(\mathbf{1}) \in R'' = R$ и $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) \in M'' = M$. Однако по определению отображение E^{-1} имеем $E^{-1}(\mathbf{1}) \in R'$ и $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) \in M'$. Поэтому

$$\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1}) \in Z = R \cap R' \subset M \cap M',$$

т.е. $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ – центральный элемент. Так как R и M – факторы, т.е. центр алгебры тривиален, то элемент $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ скалярно кратен $\mathbf{1}$, т.е. $E^{-1}(\mathbf{1}) = \lambda \mathbf{1}$ (возможно, и $\lambda = +\infty$).

Определение 4. Скалярное число λ называется **индексом вещественного подфактора** Q на вещественном факторе R и обозначается $[R : Q]$ или $[(M, \alpha) : (N, \alpha)]$.

Индекс произвольного подфактора.

Из равенства $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ следует следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 5. Пусть R – σ-конечный вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ – подфактор. Тогда $[R : Q] = [R + iR : Q + iQ]$.

Отсюда, используя результат Косаки, получим следствие

Следствие 2. Пусть R – σ-конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ – подфактор. Тогда $[R : Q] = 4\cos^2(\pi/q)$ $(q \geq 3)$ или $[R : Q] \geq 4$.

Свойства индекса вещественных подфакторов.

В комплексном случае известно (В.Джонс), если для подфакторов $P, N \subset M$ верно равенство $[M : P] = [M : N]$, то $P = N$. Однако, для вещественных W*-подфакторов это неверно, как показывает следующий пример. Пусть $M = M_n(\mathbb{C})$ - алгебра $n \times n$ - комплексных матриц, $P = M_n(\mathbb{R})$ и $Q = M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{H})$, где $\mathbb{H}$ - тело кватернионов, n - четное натуральное число. Тогда

$$[M_n(\mathbb{C}) : M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{H})] = [(M_n(\mathbb{C}) : M_n(\mathbb{R})].$$

Однако, алгебры $M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{H})$ и $M_n(\mathbb{R})$ не изоморфны.

С другой стороны, в отличие от комплексного случая, для вещественных факторов R_1, R_2 и R_3, с $R_3 \subset R_1$ и $R_3 \subset R_2$, равенство $[R_1 : R_3] = [R_2 : R_3]$ не влечет $R_1 = R_2$. Покажем это на следующем примере: пусть $R_1 = M_n(\mathbb{R})$, $R_2 = M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{H})$ и $R_3 = \mathbb{R}$, тогда $[M_n(\mathbb{R}) : \mathbb{R}] = [M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{H}) : \mathbb{R}]$, при этом $M_{\frac{n}{2}}(\mathbb{H})$ не изоморфен $M_n(\mathbb{R})$.

Индекс тензорного произведения подфакторов.

Теорема 6. Если $Q_i \subset R_i$- конечные вещественные факторы, $(i = 1, 2)$, тогда $[R_1 \otimes R_2 : Q_1 \otimes Q_2] = [R_1 : Q_1] \cdot [R_2 : Q_2]$.

Для $i = 1, ..., n$, теорема 6 примет вид: $[\bigotimes_{k=1}^{n} R_k : \bigotimes_{k=1}^{n} Q_k] = \prod_{k=1}^{n} [R_k : Q_k]$.

Теорема 7. Пусть R_i - вещественные факторы и пусть $Q_i \subset R_i$ - подфакторы, $i = 1, 2$. Если $Q_i' \cap R_i = \mathbf{1} \cdot \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$, тогда $(Q_1 \otimes Q_2)' \cap (R_1 \otimes R_2) = \mathbf{1} \cdot \mathbb{R}$.

Очевидно, теорему можно обобщить на случай: $\bigotimes_{k=1}^{n} Q_k' \cap \bigotimes_{k=1}^{n} R_k = \mathbf{1} \cdot \mathbb{R}$.

Индекс гиперфинитных подфакторов.

Напомним, что комплексная или вещественная W*-алгебра $A \subset B(H)$ называется гиперфинитной, если существует возрастающая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - конечномерных W^*-подалгебр A, содержащих $\mathbf{1}$, такая, что $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A$. Верна следующая теорема

Теорема 7. Пусть R - вещественный фактор типа II_1. Если подфактор Q является гиперфинитным подфактором в R с $[R : Q] < \infty$, тогда фактор R - гиперфинитен.

Необходимое условие неприводимости подфактора.

Справедливы следующие результаты

Теорема 8. Пусть $Q \subset R$ - вещественные факторы и $N = Q+iQ$, $M = R+iR$. Тогда $Q' \cap R$ - конечномерно $\Leftrightarrow$ $N' \cap M$ конечномерно. В частности,

$$N' \cap M = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad Q' \cap R = \mathbb{R} \cdot \mathbf{1},$$

т.е. Q - неприводимый $\quad \Leftrightarrow \quad$ $Q + iQ$ - неприводимый.

Используя этот результат, доказывается следующая теорема.

Теорема 9. Пусть R - вещественный фактор типа II_1 и $Q \subset R$ - подфактор. Если $[R : Q] < \infty$, тогда вещественная W^* - алгебра $Q' \cap R$ - конечномерна. В частности, если $[R : Q] < 4$, тогда $Q' \cap R = \mathbf{1} \cdot \mathbb{R}$, т.е., если $[R : Q] < 4$, то вещественный подфактор Q - неприводим.

Пофакторы с индексами $r > 4$.

Так как всякий гиперфинитный (комплексный) фактор обладает инволютивный *-антиавтоморфизм, то используя теоремы 1, 5 и 9, аналогично комплексному случаю, получим аналог примеров Джонса (Jones), Хаагерупа (Haagerup), Шое (Schou), Окнеану (Ocneanu) и Йошида (Yoshida):

Теорема 10. Существует серия неприводимых гиперфинитных вещественных пофакторов с индексом $r > 4$, в частности, со значениями индексов в интервалах $(4, 3+\sqrt{3}]$, $(4, 5+\sqrt{13}]$ и $(6, 6.25)$.

Матрица вложения подфактора.

Пусть теперь $A \subseteq B$ – конечномерные вещественные или комплексные W*-алгебры. Тогда

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(F), \qquad B \cong \bigoplus_{j=1}^{l} M_{m_j}(F),$$

где $F = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ – тело кватернионов). Положим $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ и $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_l)$ и назовем их вектор-размерностями A и B соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$-матрицы Λ_A^B следующим образом: Λ_{ij} – число i-го слагаемого в представлении A в j-м слагаемом B. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть $M = M_6(\mathbb{C}) \bigoplus M_4(\mathbb{C}) \bigoplus M_2(\mathbb{C})$ и $N = M_3(\mathbb{C}) \bigoplus \mathbb{C}$. Вложение $N \subset M$ задаётся как

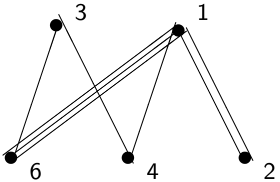
$$N \ni (x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{C}), y \in \mathbb{C} \right) \in M.$$

Матрица вложения подфактора.

Так как слагаемые $M_3(\mathbb{C})$ и $\mathbb{C}$ в представлении N участвуют в первом слагаемом M один и три раза соответственно, то $\Lambda_{11} = 1$ и $\Lambda_{21} = 3$; а во втором слагаемом алгебры M они участвуют по одному разу, и поэтому $\Lambda_{12} = \Lambda_{22} = 1$. Аналогично вычисляются числа $\Lambda_{13} = 0$ и $\Lambda_{23} = 2$. Таким образом, это вложение имеет следующую матрицу: $\Lambda_N^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

С помощью матрицы Λ_N^M построим граф следующим образом. Верхние и нижние вершины графа состоят из количества слагаемых в представлениях N и M соответственно. Они нумеруются по координатам векторов $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{m}$. Число рёбер, соединяющих две вершины, определяется числом Λ_{ij}. Например, так как $\Lambda_{11} = 1$, то число рёбер между верхней вершиной 3 и нижней вершиной 6 равно 1. Таким образом, матрице Λ_N^M соответствует граф

Граф, соответствующий подфактору.



Легко увидеть, что указанное вложение не единственно, и, следовательно, матрица Λ_N^M и ее граф не единственны. В примере 1, можно выбрать ещё два вложения:

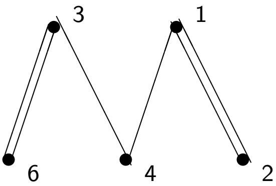
$$(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{C}), y \in \mathbb{C} \right),$$

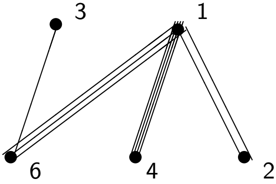
$$(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{C}), y \in \mathbb{C} \right).$$

Граф, соответствующий подфактору.

Тогда они имеют матрицы и графы

$$\Lambda_N^M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Lambda_N^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$





По аналогии рассмотрим примеры для вещественных W*-алгебр: $P \subset R$.

Граф, соответствующий подфактору.

Пример 2. Пусть $R = M_8(\mathbb{R}) \bigoplus M_6(\mathbb{R}) \bigoplus M_3(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{R})$ и $P = M_3(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{R}) \bigoplus \mathbb{R}$. Рассмотрим два вложения $P \subset R$:

$$1)\ (x, y, z) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right),$$

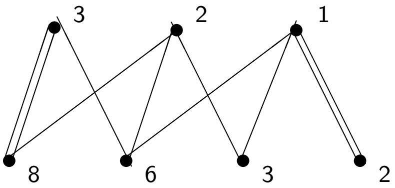
$$2)\ (x, y, z) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} \right),$$

где $x \in M_{\mathbf{3}}(\mathbb{R}), y \in M_{\mathbf{2}}(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}$.

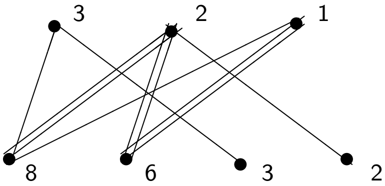
Для них матрицы и графы имеют вид

Граф, соответствующий подфактору.

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Конечномерные W*-подалгебры.

Ясно, что разные вложения дают разные матрицы и графы.

Для пар $A \subseteq B$ – конечномерных вещественных или комплексных W*–алгебр матрица Λ_A^B обладает следующими свойствами:

1) $\overline{m} = \overline{n} \cdot \Lambda_A^B$;

2) $\Lambda_A^B = \Lambda_A^C \cdot \Lambda_C^B$, где W*-алгебра C содержит A и содержится в B;

3) Если A и B – конечные комплексные W*-алгебры, то $[B : A] = \|\Lambda_A^B\|^2$ (ср. ниже следствие).

В качестве одного из приложений приведем следующую теорему.

Теорема 11. [8] Пусть $N \subset M$ и $N_1 \subset M_1$ – пары конечномерных W*-алгебр, для которых имеются совпадающие графы. Тогда существует изоморфизм $\theta : M \to M_1$ с $\theta(N) = N_1$.

[8] F.Goldman, P. de la. Harpe, V. F. R. Jones. Coxeter graphs and towers of algebras. V.14, (1989), MSRI Publications, (Springer), New York

Вещественные W*-подалгебры.

Замечание 1. Теорема 11 неверна в вещественном случае. Это показывает пример 4.

Теорема 11 обобщается следующим образом.

Теорема 12. Пусть $\mathbf{1} \in M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ и $\mathbf{1} \in N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ – две цепи матричных алгебр, для которых графы совпадают. Тогда существует изоморфизм $\varphi : \bigcup_k M_k \to \bigcup_k N_k$ такой, что $\varphi(M_k) = N_k$ для всех k.

Замечание 2. Теорема 12 неверна в вещественном случае.

Вещественные W*-подалгебры.

Теперь рассмотрим вектор-размерность $\overline{m} = (m_1, ..., m_l)$ алгебры B. Отображение $\tau \to \overline{x}$ задает биекцию между множеством точных следов B и открытым симплексом $\triangle^k = \{\overline{x} = (x_1, ..., x_k)^T \in \mathbb{R}^k : x_j > 0, \forall j$ и $\overline{m} \cdot \overline{x} = 1\}$, где $x_j = \tau(p_j)$ и p_j – минимальный проектор j-го слагаемого в представлении B. Пусть $e_A : L^2(B, \tau) \to L^2(A, \tau)$ – проектор, $E_A : B \to A$ – τ-инвариантное условное ожидание и $\langle B, e_A \rangle = \{B \cup \{e_A\}\}''$. В работе Джонса показано, что след τ продолжается на W*-алгебру $\langle B, e_A \rangle$ таким образом, что $E_B(e_A) = \lambda \cdot \mathbf{1}$ (для некоторого λ) тогда и только тогда, когда $\Lambda^T \Lambda \overline{x} = \lambda^{-1} \overline{x}$. В этом случае: $\lambda^{-1} = \|\Lambda\|^2$. Такой след τ называется *марковским следом*. В работе Jones and Sunder (1997) получено следующее необходимое и достаточное условия для существования единственного марковского следа.

Теорема 13. Для пары $A \subseteq B$ существует единственный Марковский след тогда и только тогда, когда граф является связанным.

Вещественные W*-подалгебры.

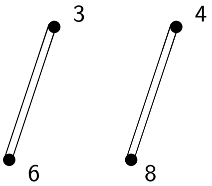
В приведенных выше примерах все графы являются связанными. Приведем примеры несвязанных графов.

Пример 3. Пусть $M = M_6(\mathbb{C}) \bigoplus M_8(\mathbb{C})$ и $N = M_3(\mathbb{C}) \bigoplus M_4(\mathbb{C})$. Легко увидеть, что подалгебру N можно вложить в M единственным образом:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_{\mathbf{3}}(\mathbb{C}), y \in M_{\mathbf{4}}(\mathbb{C}) \right),$$

при этом вложение имеет такие матрицу и граф:

$$\Lambda_N^M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



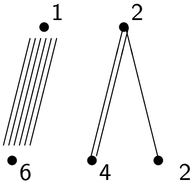
Вещественные W*-подалгебры.

Пример 4. Пусть $R = M_6(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{H}) \bigoplus \mathbb{H}$ и $P = \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{H}$. Подалгебра P вкладывается в R единственным образом:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{H} \right),$$

Для этого вложения матрица и граф имеют вид

$$\Lambda_P^R = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Очевидно, что эти графы являются несвязанными. Теперь в примере 4 рассмотрим обертывающие W*-алгебры: $M = R + iR$ и $N = P + iP$. Тогда

$$M = M_6(\mathbb{C}) \bigoplus M_4(\mathbb{C}) \bigoplus M_2(\mathbb{C}), \qquad N = \mathbb{C} \bigoplus M_2(\mathbb{C}).$$

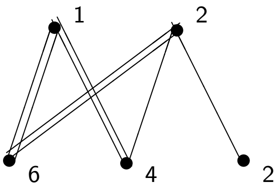
Вещественные W*-подалгебры.

Вложение $N \subset M$, задаваемое как

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}, y \in M_2(\mathbb{C}) \right),$$

имеет такие матрицу и граф:

$$\Lambda_N^M = \Lambda_{P+iP}^{R+iR} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Вещественные W*-подалгебры.

Замечание 3. Очевидно, что в последнем примере граф является связанным. Этот пример интересен тем, что вещественная пара не имеет связанного графа, в то время как их обертывающая комплексная пара имеет связанный граф. Поэтому для пары $N \subset M$ существует единственный Марковский след τ, а для пары $P \subset R$ след не является Марковским. Из указанного примера видим, что матрицы Λ_P^R и Λ_{P+iP}^{R+iR} могут не совпадать, т.е. верно следующее

Следствие 3. Для пар $P \subset R$ – вещественных W*-алгебр в общем случае верно неравенство

$$\Lambda_P^R \neq \Lambda_{P+iP}^{R+iR}.$$

Как отмечалось выше, в комплексном случае верно равенство

$$[M : N] = \|\Lambda_N^M\|^2. \tag{3}$$

Вещественные W*-подалгебры.

Так как для для вещественных факторов $P \subset R$ верно равенство $[R : P] = [R + iR : P + iP]$, то

$$[R : P] = [R + iR : P + iP] = \|\Lambda_{P+iP}^{R+iR}\|^2 = \|\Lambda_P^R\|^2.$$

Однако для вышеприведенных матриц Λ_P^R и Λ_{P+iP}^{R+iR} справедливо соотношения $\|\Lambda_P^R\| = 6$ и $\|\Lambda_{P+iP}^{R+iR}\| \leq 4$. Отсюда вытекает следующий полезный результат для вещественных W*-подалгебр.

Следствие 4. Для вещественных факторов $P \subset R$ всегда выполняется равенство

$$[R : P] = \|\Lambda_P^R\|^2,$$

а в общем случае, т.е. когда по крайне мере один из вещественных W*-алгебр не является фактором, то справедливо неравенство (ср. (3))

$$[R : P] \neq \|\Lambda_P^R\|^2.$$

Список опубликованных работ.

1. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Примеры индексов вещественных W*-подалгебр комплексного фактора типа I_n. Узбекский математический журнал. (2011), N4, 168-170.
2. Болтаев Х.Х. Возрастающая последовательность вещественных подфакторов конечного фактора. Узбекский математический журнал. (2012), N4, 19-25.
3. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Индекс подфактора произвольного вещественного фактора. Узбекский математический журнал, (2013), N2, 82-85.
4. Болтаев Х.Х. Вещественные W*-подалгеры и их графы. Доклады академии наук РУз., (2013), 3, 3-5.
5. Болтаев Х.Х. Некоторые свойства индекса вещественных W*-подалгебр. Узбекский математический журнал, (2013), 3, 28-32.
6. Болтаев Х.Х. Индекс подфакторов вещественного фактора типа II_1. Доклады академии наук РУз, (2014), 2, 5-6.
7. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Вещественные W*-подалгебры, их индексы и графы. Узбекский математический журнал, (2015), 4, 84-89.
8. Boltaev Kh.Kh. Index of real subfactors and graphs of real W*-subalgebras. Uzbek Mathematical Journal. (2020), 3, 47-55.
9. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Индекс вещественных подфакторов W*-алгебр. Дальневосточный математический журнал, (2020), Т20, 2. 234-246.
10. Rakhimov A.A., Boltaev Kh.Kh. On irreducible hyperfinite real subfactors with index larger than 4. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings, (2021), pp.1-10. в печате.

Тезисы.

1. Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов международной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения». Ташкент, (2013), 127-128.
2. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». Владикавказ, (2013), 77-79.
3. Boltaev Kh.Kh. //The V Congress of Turkic Mathematicians, Kyrgyzstan, 5-7, (2014), 56.
4. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //The second Usa-Uzbekistan conference on Analysis and Mathematical physics, (2017), 15-17.
5. Болтаев Х.Х. //Uzbekistan-Malaysiya International online conference on "Computational models and technologies" 24-25 August, (2020), 133-135.
6. Болтаев Х.Х. //Материалы Республиканской научной конференции «Проблемы современной математики». Карши, (2011), 87-89.
7. Болтаев Х.Х. //Материалы республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа». Нукус, (2012), 47-49.
8. Rakhimov A.A., Boltaev Kh.Kh. //Тезисы научно-практического семинара «Некорректные неклассические задачи математической физики и анализа». Самарканд, (2012), 67-68.
9. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». Ташкент, (2012), 195-197.
10. Болтаев Х.Х. //Материалы Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа». Ташкент, (2013), 54-55.

Тезисы.

11. Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием учёных из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнение и их приложение». Ташкент, (2013), 309-311.
12. Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов республиканской научно-технической конференции «Прикладная математика и информационная безопасность», (2014), 23-26
13. Болтаев Х.Х. //Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Неклассические уравнения математической физики и их приложения", (2015), 127-129.
14. Болтаев Х.Х. О некоторых свойствах индекса вещественных W*-подалгебр. // Республиканская научная конференция «математическая физика и родственные проблемы современного анализа» Бухара, (2015), 72-74.
15. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Алгебра, анализ и квантовая вероятность", (2015), 63-65.
16. Болтаев Х.Х. //«Ал-Хоразмий-2016» Амалий математиканинг долзарб муаммолари республика илмий амалий конференцияси, Бухара, 78-79.
17. Болтаев Х.Х. //«Кубатурные формулы и их приложения» Ташкент, (2017), 11.
18. Болтаев Х.Х. //Новые теоремы математики и их приложения, Самарканд, 14-15 май, (2018), 132-134.
19. Болтаев Х.Х. //“Modern problems of geometry and topology and their applications” . 21-23 ноябрь, (2019), 103-105.
20. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Actual problem of applied mathematics and information technologies, 14-15 ноябрь, (2019), 140-141.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!