

Лекция 5.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|} = +\infty.$$

Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|} < \infty$. Тогда расам. $|s| \leq R_1$.

и осемим в кроне

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= \left| e^{as} \prod_{\rho_n} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}} \right| \leq \\ &\leq e^{aR_1} \prod_{\rho_n} \left(1 + \frac{|R_1|}{|\rho_n|}\right) e^{\frac{R_1}{|\rho_n|}} \leq e^{aR_1} \prod_{\rho_n} e^{2\frac{R_1}{|\rho_n|}} \leq e^{cR_1}. \end{aligned}$$

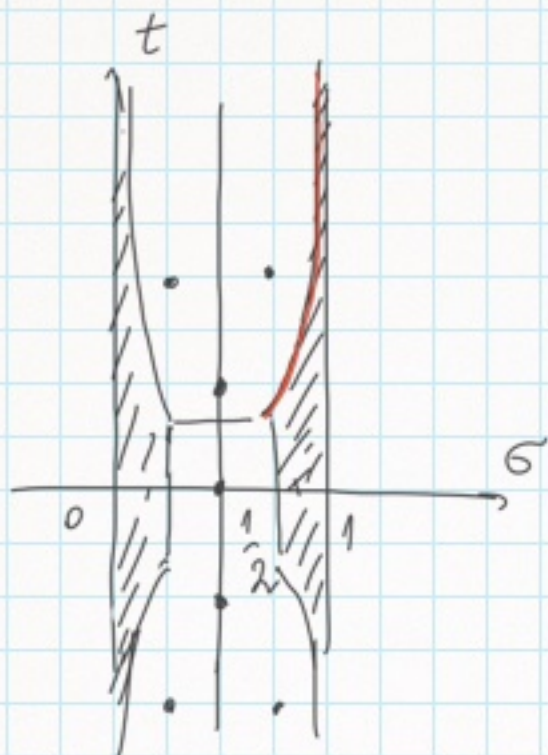
$\wedge \frac{R_1}{|\rho_n|}$

Расам. $s = 2(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= 2(N+1)(2N+1) \pi^{-(N+1)} N! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2N+2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{cN \ln N} \Rightarrow e^{c|s| \ln |s|} \end{aligned}$$

Получим противоречие.

Теорема (Адамара, Валье - Туссена о границе нулей $\zeta(s)$ (1896г.)).



$\zeta(s) \neq 0$ при

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(|t|+2)}, \quad c > 0.$$

(лучшая известная оценка:

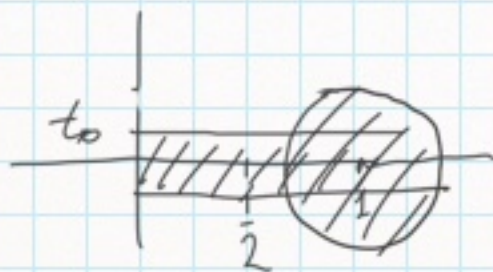
$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{(\ln(|t|+2))^{2/3} (\ln \ln(|t|+2))^{1/3}})$$

- граница нулей
И.М. Виноградова).

D-во:

у $\zeta(s)$ при $s=1$ - полюс 1^{ого} порядка. $\Rightarrow$

при $|s-1| \leq t_0$ - нет нулей у $\zeta(s)$



Будем полагать $|t| \geq t_0$, считая
что при $|t| \leq t_0$ нет нулей $\zeta(s)$.
(поскольку на отрезке $[0, 1]$ также нет нулей).

Воспользуемся соотношением:

$$3 + 4 \cos \varphi + \cos 2\varphi = 3 + 4 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi - 1 = 2(\cos \varphi + 1)^2 \geq 0.$$

При $\sigma > 1$:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

$$, \quad -\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \cos(t \ln n).$$

Типу $\sigma > 1$

$$\exists \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \right) + 4 \left(-\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) + \left(-\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right) \geq 0. (*)$$

Ymb.: a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) = O(\ln |t| + 2)$ нпу $-1 \leq \sigma \leq 2$, $s = \sigma + it$

б) нпу $-1 \leq \sigma \leq 2$

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \frac{1}{s-1} + c - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) - \sum_p \left(\frac{1}{s-p} + \frac{1}{p} \right) = \\ &= \frac{1}{s-1} - \sum_p \left(\frac{1}{s-p} + \frac{1}{p} \right) + O(\ln(|t|+2)). \end{aligned}$$

D-bo:

a) $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right| \leq \sum_{n \leq |t|+2} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} \right) +$

$$+ \underbrace{\sum_{n > |t|+2} \frac{|s|}{2n(2n-1)}}_{O(1)} = O(\ln(|t|+2)).$$

б) $\xi(s) = s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$, $s^{-1} \Gamma^{-1}(s) = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right) e^{\frac{s}{n}}$.

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \frac{1}{s-1} + c + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{s+2n} \right) - \frac{\xi'}{\xi}(s) = \\ &= \frac{1}{s-1} + c_1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{s+2n} \right)}_{O(\ln(|t|+2))} - \sum_p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \end{aligned}$$

$$1 < \sigma \leq 2$$

$$f(s) = \frac{1}{(s-1)} g(s), \quad g - \text{max. gr-ue } b \text{ exp-mu 1.}$$

$$-\frac{s'}{s}(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1} - \frac{g'}{g}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma-1} + A.$$

$$1 < \sigma \leq 2$$

$$-\operatorname{Re} \frac{s'}{s}(\sigma + it) \leq -\sum_p \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + A \ln(|t|+2)$$

$$-1 \leq \sigma \leq 2$$

$$-\operatorname{Re} \frac{s'}{s}(\sigma + 2it) \leq A \ln(|t|+2).$$

$$\frac{3}{\sigma-1} - 4 \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + A \ln(|t|+2) \geq 0.$$

$$t = \gamma, \quad \sigma = 1 + \frac{1}{2A \ln(|t|+2)}.$$

$$7A \ln(|t|+2) \geq \frac{4}{\sigma - \beta} \Rightarrow \sigma - \beta \geq \frac{4}{7A \ln(|t|+2)} \Rightarrow$$

$$\beta \leq \sigma - \frac{4}{7A \ln(|t|+2)} = 1 - \frac{1}{14A \ln(|t|+2)}.$$

Теорема 9-на.

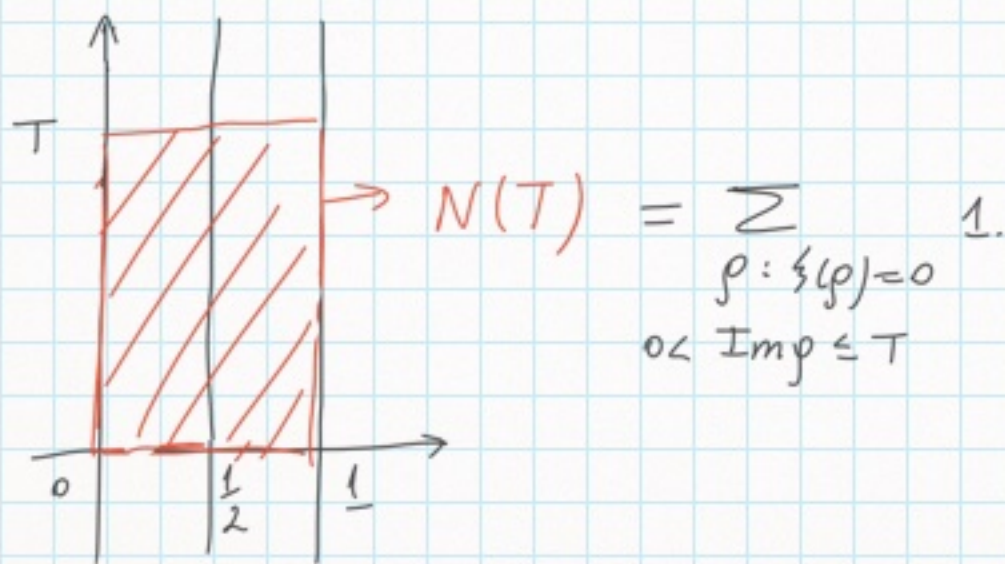
Ymb.: a) $\sum_{\rho=\beta+i\gamma} \frac{1}{1+(t-\gamma)^2} = O(\ln(|t|+2)).$

б) $\sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = O(\ln(|t|+2))$

в) $\sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{1+(t-\gamma)^2} = O(\ln(|t|+2)).$

2) $N(T+1) - N(T) \ll \ln(T+2).$

$N(T) \ll T \ln(T+2).$



Задо г-мб мнмь а) и 1^{го} строчку 2).

D-60:

$$a) \quad -\frac{g'}{g}(2+it) = \sum_p \left(\frac{1}{2+it-p} + \frac{1}{p} \right) + O(\ln |t|+2)$$

||
c.

(см. выражение в начале лекции).

$$\operatorname{Re} \sum_p \left(\frac{1}{2+it-p} + \frac{1}{p} \right) = O(\ln(|t|+2)).$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{p} = \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{2+it-p} &= \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + (t-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + 4(t-\gamma)^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{1}{1 + (t-\gamma)^2} \end{aligned}$$

$$\sum_p \frac{1}{1 + (t-\gamma)^2} = O(\ln(|t|+2)).$$

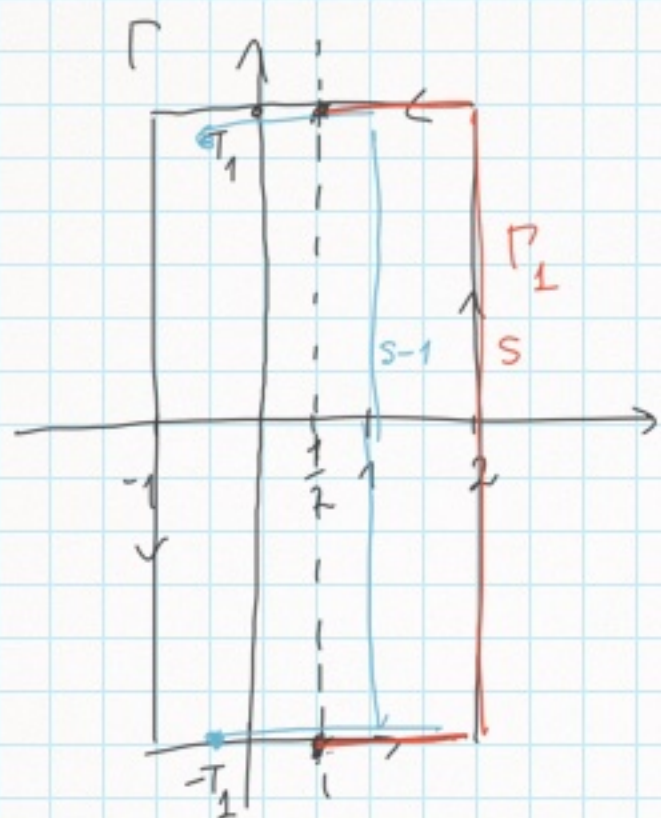
$$\begin{aligned} 2) \quad O(\ln T) &= \sum_{|T-\gamma| \leq 1} \frac{1}{1 + (T-\gamma)^2} \geq \sum_{|T-\gamma| \leq 1} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (N(T+1) - N(T-1)) \geq \frac{1}{2} (N(T+1) - N(T)). \end{aligned}$$

так g-но.

Теорема: (ф-ла Римана - Мангольдта).

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T), T \rightarrow +\infty.$$

До-во:



$T_1: T \in T_1 \in T+1$ и
при $|\operatorname{Im} \rho| \neq T_1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \operatorname{vararg}_{\Gamma} \zeta(s) &= 2N(T) \\ \parallel & \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{vararg}_{\Gamma_1} \zeta(s) & \text{ блужд } \zeta(s) = \zeta(1-s). \end{aligned}$$

$$\zeta(s) = s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \beta(s)$$

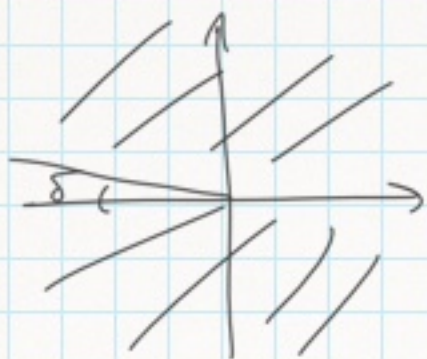
$$|\operatorname{vararg}_{\Gamma_1} s| < \pi.$$

$$|\operatorname{vararg}_{\Gamma_1} (s-1)| < 2\pi$$

$$\arg \pi^{-\frac{s}{2}} = \arg e^{-\frac{s}{2} \ln \pi} = -\frac{t}{2} \ln \pi.$$

$$\operatorname{vararg}_{\Gamma_1} \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{T_1}{2} \ln \pi - \frac{T_1}{2} \ln \pi = -\frac{T_1}{1} \ln \pi.$$

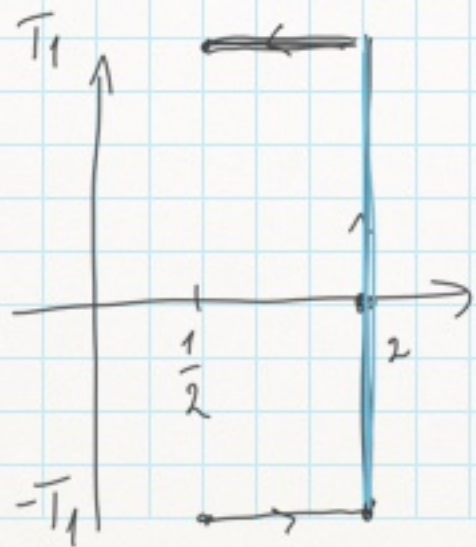
$$\ln \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \ln s - s + \ln \sqrt{\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$



$$\arg \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \arg s + t \ln |s| - t + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{vararg}_{\Gamma_1} \Gamma\left(\frac{\Sigma}{2}\right) &= -\frac{1}{4} \arg\left(\frac{1}{4} + \frac{iT_1}{2}\right) + \frac{1}{4} \arg\left(\frac{1}{4} - \frac{iT_1}{2}\right) + \\ &+ \frac{T_1}{2} \ln\left|\frac{1}{4} + \frac{iT_1}{2}\right| + \frac{T_1}{2} \ln\left|\frac{1}{4} - \frac{iT_1}{2}\right| - T_1 + O\left(\frac{1}{|T_1|}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \arg\left(\frac{1}{4} + \frac{iT_1}{2}\right) + T_1 \ln\left|\frac{1}{4} + \frac{iT_1}{2}\right| - T_1 + O\left(\frac{1}{|T_1|}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + O(T_1^{-1})\right) + \frac{T_1}{2} \ln\left(\frac{T_1}{2}\right)^2 - T_1 + O(\pi^{-1}) = \\ &= T_1 \ln \frac{T_1}{2} - T_1 - \frac{\pi}{2} + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

Осталось найти $\operatorname{vararg}_{\Gamma_1} \zeta(s)$.



$$\operatorname{vararg}_{[2-iT_1, 2+iT_1]} \zeta(s) = ?$$

$$\zeta(2+it) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+it}} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+it}}$$

$$\left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+it}} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4} + \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^2} \leq \frac{3}{4}.$$

$$\left| \operatorname{vararg}_{[2-iT_1, 2+iT_1]} \zeta(s) \right| \leq \pi.$$

Осталось найти $\operatorname{vararg}_{[\frac{1}{2}+iT_1, 2+iT_1]} \zeta(s)$.

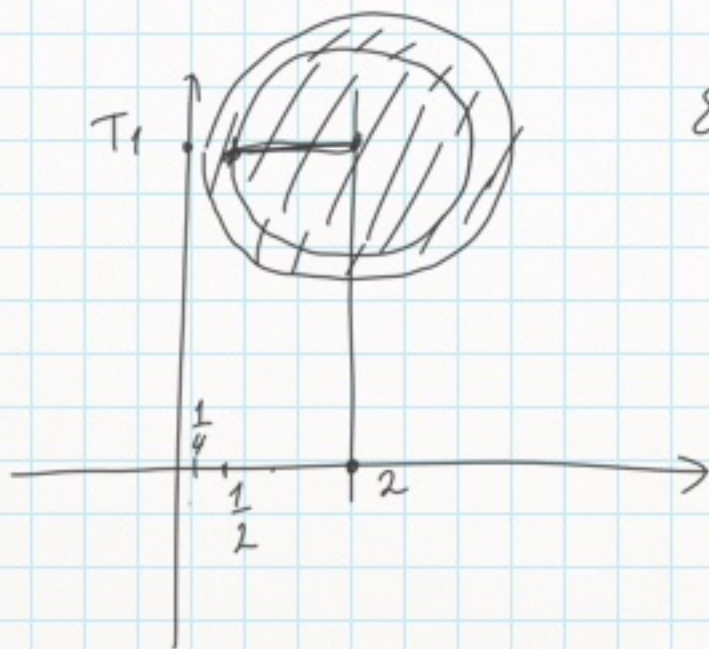
Пусть мы знаем, что $\operatorname{Re} \zeta(s)$ на $[\frac{1}{2}+iT_1, 2+iT_1]$ имеет $\leq n$ нулей. Тогда

$$\left| \operatorname{vararg}_{[\frac{1}{2}+iT_1, 2+iT_1]} \zeta(s) \right| \leq \pi(n+2).$$

Хотим оценить кол-во нулей $\operatorname{Re} \zeta(s)$ на $[\frac{1}{2}+iT_1, 2+iT_1]$.

Рассм. $F(s) = \zeta(2+iT_1+s) + \overline{\zeta(2+iT_1+\bar{s})} = f(s) + \overline{f(s)}$

$F(s)$ — аналитическая в круге $|s| \leq R = 2 - \frac{1}{4}$.



Если s — вещ.-ое, то

$$F(s) = 2 \operatorname{Re} \zeta(2+iT_1+s)$$

По теореме: $F(0) \neq 0$, $R = 2 - \frac{1}{4}$.

$$\ln \frac{|F(0)| R^{n_2}}{r_1 \dots r_{n_2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(Re^{i\varphi})| d\varphi.$$

$$\ln \frac{R^{n_2}}{r_1 \dots r_{n_2}} = n_2 \ln R - \ln r_1 - \dots - \ln r_{n_2}$$

||?

$$\int_0^R \frac{n(x)}{x} dx, \text{ где } n(x) - \text{число нулей в}$$

||

круге $|s| \leq x$.

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{2dx}{x} + \dots + \int_{r_{n_2}}^R \frac{n_2 dx}{x} =$$

$$= \ln r_2 - \ln r_1 + 2\ln r_3 - 2\ln r_2 + \dots + n_2 \ln R - n_2 \ln r_{n_2} =$$

$$= -\ln r_1 - \ln r_2 - \dots - \ln r_{n_2} + n_2 \ln R. \Rightarrow ? \text{ имеет место.}$$

$$\ln |F(0)| = O(1)$$

$$n\left(\frac{3}{2}\right) \underbrace{\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} \frac{dx}{x}}_{\text{|| c}} \leq \int_0^R \frac{n(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(Re^{i\varphi})| d\varphi - \ln |F(0)|.$$

$O(1)$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u^{s+1}} du, \quad \sigma > 0.$$

при $\sigma > \frac{1}{4}$

$$|\zeta(s)| \ll |t|, \quad |t| \rightarrow +\infty.$$

$$\ln |\zeta(Re^{i\varphi})| \ll \ln T_1.$$

$$n\left(\frac{3}{2}\right) \ll \ln T \Rightarrow$$

кол-во нулей $\Re s (\sigma + iT_1)$, при $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$

$$\ll \ln T.$$

Умножив:

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} \text{vararg}_{\Gamma_1} \zeta(s) = \frac{1}{2\pi} (-T_1 \ln \pi + T_1 \ln \frac{T_1}{2} - T_1) +$$

$$+ O(\ln T) = \frac{T_1}{2\pi} \ln \frac{T_1}{2\pi} - \frac{T_1}{2\pi} + O(\ln T) =$$

$$= \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

Формула доказана.

Д/з:

20. Пусть f - анал. в круге $|s| \leq R$. Тогда $\forall 0 < r < R$

$$\max_{|s| \leq r} |f(s) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} (A(R) - \operatorname{Re} f(0)), \text{ где}$$

$$A(R) = \max_{|s|=R} \operatorname{Re} f(s).$$

21. $\forall m = 2, 3, \dots \exists T_m: m < T_m \leq m+1$: при

$-1 \leq \sigma \leq 2$ и $t = \pm T_m$ справедливы оценки

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \ln^2 m.$$

22. Пусть $\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(R(x))$, где $\sqrt{x} \leq R(x) \leq x$

и $R(x)$ - возрастающая гр-ца. Тогда

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(R(x) \ln x).$$

23. При $\operatorname{Re} s > 1$

$$a) -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{+\infty} \frac{\Psi(u)}{u^{s+1}} du.$$

$$b) \ln \zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{\pi(u)}{(u^s - 1)u} du.$$

Идея: гр-ца суммирования Абеля (помним $\lim_{N \rightarrow +\infty}$);

также заметить, что $\pi(n) - \pi(n-1) = \begin{cases} 1, & n \text{ - простое} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

24.

$$a) -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\sigma| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln |t|+2),$$

$$\text{npri} - 1 \leq \sigma \leq 2.$$

$$b) \text{ D-mb, } \text{amo} \quad \exists c > 0:$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\ln^2(|t|+2)) \text{ npri } \sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(|t|+2)}.$$