$\mathbb{G}_a$-действия вертикального типа на аффинных $\mathbb{T}$-многообразиях

Содержание

Зафиксируем основное поле $\boldsymbol{k}$ нулевой характеристики. Пусть N – решётка ранга n и $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ – двойственная решётка. Обозначим $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$ и $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes \mathbb{Q}$. Пусть $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}\, \boldsymbol{k}[M]$ и $X = \mathrm{Spec}\, A$. Напомним, что каждое действие $\mathbb{T}$ на X индуцирует M-градуировку на A и, обратно, любая M-градуировка на A происходит из некоторого действия $\mathbb{T}$ на X.
Рассмотрим острый многогранный конус σ в $N_{\mathbb{Q}}$. Множество полиэдров в $N_{\mathbb{Q}}$ с хвостовым конусом σ обозначим через $\mathrm{Pol}_{\sigma}(N_{\mathbb{Q}})$. Каждому полиэдру $\Delta \in \mathrm{Pol}_{\sigma}(N_{\mathbb{Q}})$ соответствует его опорная функция $h_{\Delta} : \sigma^{\vee} \to \mathbb{Q}$, где

$$h_{\Delta}(m) = \min\langle m, \Delta\rangle = \min_{p \in \Delta}\langle m, p\rangle.$$

Функция h_{Δ} кусочно линейна на $\sigma^{\vee}$. Кроме того,

$$h_{\Delta}(m + m') \geq h_{\Delta}(m) + h_{\Delta}(m') \text{ и}$$

$$h_{\Delta}(\lambda m) = \lambda h_{\Delta}(m)\ \forall m, m' \in \sigma^{\vee},\ \forall \lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

Определение 1.1

σ-полиэдральным дивизором на многообразии Y называется формальная сумма $\mathfrak{D} = \sum_H \Delta_H \cdot H$, где H пробегает множество простых дивизоров на Y, $\Delta_H \in \mathrm{Pol}_\sigma(N_\mathbb{Q})$ и $\Delta_H \neq \sigma$ лишь для конечного множества H.

Для любого $m \in \sigma_M^\vee$ определим $\mathbb{Q}$-дивизор

$$\mathfrak{D}(m) = \sum_{H \subset Y} h_H(m) \cdot H,$$

где $h_H = h_{\Delta_H}$.

Определение 1.2

σ-полиэдральный дивизор $\mathfrak{D}$ называется *собственным*, если $\mathfrak{D}(m)$ является полуобильным $\mathbb{Q}$-дивизором Картье для всех $m \in \sigma_M^\vee$ и большим дивизором для всех $m \in \mathrm{relint}(\sigma^\vee) \cap M$.

Теорема 1.3

Каждому собственному σ-полиэдральному дивизору $\mathfrak{D}$ на полупроективном многообразии Y можно сопоставить нормальную, конечно порождённую, эффективно M-градуированную область размерности $\mathrm{rank}\, M + \dim Y$ следующим образом:

$$A[Y, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A_m \chi^m, \text{ где } A_m = \Gamma\big(Y, \mathcal{O}_Y(\mathfrak{D}(m))\big) \subset \boldsymbol{k}(Y).$$

*Обратно, если **k** алгебраически замкнуто, то любая нормальная, конечно порождённая, эффективно M-градуированная область изоморфна $A[Y, \mathfrak{D}]$ для некоторого полупроективного многообразия Y и некоторого собственного σ-полиэдрального дивизора $\mathfrak{D}$ на Y.*

Пример 1.4

Пусть $A = \boldsymbol{k}[x, y]$ и $\deg x = 0$, $\deg y = 1$ $(n = 1)$. Тогда

$$A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \boldsymbol{k}[x] y^m$$

и можно взять $Y = \mathbb{A}^1$, $\mathfrak{D} = 0$ $\big(\sigma = [0, \infty),\ \sigma^{\vee} = [0, \infty)\big)$.
Действительно, тогда $\mathfrak{D}(m) = 0$ и

$$\Gamma\big(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(0)\big) = \boldsymbol{k}[x].$$

Соответствующее действие $\mathbb{T} = \boldsymbol{k}^{\times}$ на $X = \mathbb{A}^2$ – это

$$t \cdot (x, y) = (x, t^{-1} y).$$

Содержание

Лемма 2.1

Пусть A – это конечно порождённая нормальная область. Для любого ЛНД ∂ на A верны следующие утверждения.

1. $\ker \partial$ *– это нормальная подалгебра коразмерности 1.*
2. *Если* $ab \in \ker \partial$, *то* $a, b \in \ker \partial$.
3. *Если* $a \in A^{\times}$, *то* $a \in \ker \partial$.
4. *Расширение полей* $\mathrm{Frac}\,(\ker \partial) \subset \mathrm{Frac}\, A$ *чисто трансцендентно степени 1.*

Будем называть ЛНД ∂ и ∂' *эквивалентными*, если $\ker \partial = \ker \partial'$. Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ и K_Y – это поле рациональных функций на Y. Однородное ЛНД ∂ на A продолжается до дифференцирования на $\mathrm{Frac}\, A = K_Y(M) = \mathrm{Frac}\, K_Y[M]$. ЛНД ∂ называется ЛНД *вертикального типа*, если $\partial(K_Y) = 0$, и *горизонтального типа* иначе.

Напомним описание однородных ЛНД для аффинных торических многообразий.
Пусть $\rho \in N$ и $e \in M$. Определим однородное дифференцирование $\partial_{\rho,e}$ степени e на $\boldsymbol{k}[M]$ следующим образом:

$$\partial_{\rho,e}(\chi^m) = \langle m, \rho\rangle \cdot \chi^{m+e}.$$

Пусть $A = \boldsymbol{k}[\sigma_M^\vee]$. Если $\sigma = \{0\}$, то, как векторное пространство, A порождено обратимыми функциями. По лемме 2.1 (3) любое ЛНД на A тривиально. Будем считать, что $\sigma \neq \{0\}$. Зафиксируем луч ρ конуса σ. Пусть τ – это грань $\sigma^\vee$, двойственная к ρ. Через ρ будем обозначать как луч, так и его примитивный вектор.
Положим

$$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M \mid \langle e, \rho\rangle = -1\},$$

где σ_ρ – это конус, порождённый всему лучами σ, кроме ρ.

Теорема 2.2

Любой паре (ρ, e), *где* ρ *является лучом* σ *и* $e \in S_\rho$, *можно сопоставить однородное ЛНД* $\partial_{\rho,e}$ *степени* e *на* $A = \boldsymbol{k}[\sigma_M^\vee]$, *для которого* $\ker \partial_{\rho,e} = \boldsymbol{k}[\tau_M]$. *Обратно, если задано однородное ЛНД* $\partial \neq 0$ *на* A, *то* $\partial = \lambda \partial_{\rho,e}$ *для некоторого луча* $\rho \subset \sigma$, *вектора* $e \in S_\rho$ *и* $\lambda \in \boldsymbol{k}^\times$.

Содержание

В этом разделе считаем, что $\boldsymbol{k}$ алгебраически замкнуто. Зафиксируем гладкое полупроективное многообразие Y и собственный σ-полиэдральный дивизор $\mathfrak{D} = \sum_H \Delta_H \cdot H$ на Y. Пусть $K_Y = \boldsymbol{k}(Y)$ и $X = \operatorname{Spec} A$, где $A = A[Y, \mathfrak{D}]$. Обозначим через h_H опорную функцию полиэдра Δ_H и зафиксируем однородное ЛНД ∂ вертикального типа на A. Положим $\bar{A} = K_Y[\sigma_M^\vee]$. Дифференцирование ∂ продолжается до однородного K_Y-ЛНД $\bar{\partial}$ на $\bar{A}$.
Если $\sigma = \{0\}$, то по теореме 2.2 $\bar{\partial} = 0$, а значит ∂ тривиально.
Рассмотрим луч ρ конуса σ и его двойственную грань τ. Для любого $e \in S_\rho$ определим $\mathbb{Q}$-дивизор

$$D_e = \sum_H \max_{m \in \sigma_M^\vee \setminus \tau_M} \left(h_H(m) - h_H(m+e)\right) \cdot H$$

на Y. Так как функция h_H вогнута и кусочно линейна на $\sigma^\vee$, то рассмотренный максимум достигается на одном из конусов линейности h_H, то есть на одном из максимальных конусов нормального квазивеера $\Lambda(h_H)$.

Рассмотрим множество максимальных конусов $\{\delta_{1,H},\ldots,\delta_{l_H,H}\}$ квазивеера $\Lambda(h_H)$. Пусть $g_{r,H},\ 1\leq r\leq l_H$ – это линейное продолжение функции h_H, ограниченной на $\delta_{r,H}$. Запишем

$$\max_{m\in\sigma_M^{\vee}\setminus\tau_M}\big(h_H(m)-h_H(m+e)\big)=\max_{r\in\{1,\ldots,l_H\}}\big(-g_{r,H}(e)\big)=$$

$$=-\min_{r\in\{1,\ldots,l_H\}}g_{r,H}(e)=-g_{1,H}(e).$$

Лемма 3.1

Для любого $e \in S_\rho$ *положим* $\Phi_e = \Gamma\big(Y, \mathcal{O}_Y(-D_e)\big)$ *и рассмотрим* $\phi \in K_Y$. *Тогда* $\phi \in \Phi_e$ *тогда и только тогда, когда* $\phi \cdot A_m \subset A_{m+e}$ *для любых* $m \in \sigma_M^\vee \setminus \tau_M$.

Доказательство.

Пусть $\phi \in \Phi_e$. Тогда для любого $m \in \sigma_M^\vee \setminus \tau_M$ имеем

$$\mathrm{div}(\phi) \geq D_e \geq \sum_H \big(h_H(m) - h_H(m+e)\big) \cdot H = \mathfrak{D}(m) - \mathfrak{D}(m+e).$$

Если $f \in \phi A_m$, то $\mathrm{div}(f) + \mathfrak{D}(m) \geq \mathrm{div}(\phi)$, откуда $\mathrm{div}(f) + \mathfrak{D}(m+e) \geq 0$. Значит $\phi A_m \subset A_{m+e}$.
Обратно, пусть $\phi \in K_Y$ и $\phi A_m \subset A_{m+e}$ для всех $m \in \sigma_M^\vee \setminus \tau_M$. Пусть $m \in M$ такой, что $\mathfrak{D}(m)$ – целый дивизор и m и $m+e$ лежат в $\mathrm{relint}(\delta_{1,H})$ для любого простого дивизора H.

Лемма 3.1

Для любого $e \in S_\rho$ *положим* $\Phi_e = \Gamma\big(Y, \mathcal{O}_Y(-D_e)\big)$ *и рассмотрим* $\phi \in K_Y$. *Тогда* $\phi \in \Phi_e$ *тогда и только тогда, когда* $\phi \cdot A_m \subset A_{m+e}$ *для любых* $m \in \sigma_M^\vee \setminus \tau_M$.

Доказательство.

Для каждого $H \in \operatorname{Supp} \mathfrak{D}$ рассмотрим такую функцию $f_H \in A_m$, что

$$\operatorname{ord}_H(f_H) = -h_H(m) = -g_{1,H}(m).$$

Так как $\phi f_H \in A_{m+e}$, то

$$\operatorname{ord}_H(\phi f_H) \geq -h_H(m+e) = -g_{1,H}(m+e).$$

Отсюда следует, что $\operatorname{ord}_H(\phi) \geq -g_{1,H}(m+e) + g_{1,H}(m) = -g_{1,H}(e)$, значит $\phi \in \Phi_e$.

Теорема 3.2

Любой тройке (ρ, e, ϕ), *где* ρ *– это луч* σ, $e \in S_\rho$ *и* $\phi \in \Phi_e^\times$, *можно сопоставить однородное ЛНД вертикального типа* $\partial_{\rho,e,\phi}$ *на* $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ *степени* e *с ядром*

$$\ker \partial_{\rho,e,\phi} = \bigoplus_{m \in \tau_M} A_m \chi^m.$$

Обратно, если $\boldsymbol{k}$ *алгебраически замкнуто, то любое нетривиальное однородное ЛНД* ∂ *вертикального типа на* A *имеет вид* $\partial = \partial_{\rho,e,\phi}$ *для некоторого луча* $\rho \subset \sigma$, *вектора* $e \in S_\rho$ *и функции* $\phi \in \Phi_e^\times$.

Доказательство.

Пусть $\bar{A} = K_Y[\sigma_M^\vee]$. Рассмотрим K_Y-ЛНД $\partial_{\rho,e}$ на $\bar{A}$. Так как $\phi \in K_Y^\times$, то $\phi\partial_{\rho,e}$ – это тоже K_Y-ЛНД на $\bar{A}$.
Докажем, что $\phi\partial_{\rho,e}$ оставляет $A \subset \bar{A}$ на месте. Действительно, рассмотрим однородный элемент $f \in A_m \subset K_Y$. Если $m \in \tau_M$, то $\phi\partial_{\rho,e}(f\chi^m) = 0$. Если $m \in \sigma_M^\vee \setminus \tau_M$, то

$$\phi\partial_{\rho,e}(f\chi^m) = \phi f\partial_{\rho,e}(\chi^m) = m_0\phi f\chi^{m+e},$$

где $m_0 = \langle m, \rho\rangle \in \mathbb{Z}_{>0}$. По лемме $m_0\phi f\chi^{m+e} \in A_{m+e}\chi^{m+e}$.
Положим $\partial_{\rho,e,\phi} = \phi\partial_{\rho,e}|_A$ – однородное ЛНД на A с ядром

$$\ker\partial_{\rho,e,\phi} = A \cap \ker\partial_{\rho,e} = \bigoplus_{m\in\tau_M}(A_m \cap K_Y)\chi^m = \bigoplus_{m\in\tau_M} A_m\chi^m.$$

Доказательство.

Обратно, так как $\boldsymbol{k}$ алгебраически замкнуто, то $A = A[Y, \mathfrak{D}]$. Рассмотрим однородное ЛНД ∂ на A вертикального типа. Так как ∂ вертикального типа, то $\partial(K_Y) = 0$, а значит ∂ может быть продолжено до K_Y-ЛНД $\bar{\partial}$ на $\bar{A} = K_Y[\sigma_M^\vee]$. Тогда $\bar{\partial} = \phi\partial_{\rho,e}$ для некоторого луча $\rho \subset \sigma$, $e \in S_\rho$ и $\phi \in K_Y^\times$. Так как $\phi\partial_{\rho,e}$ оставляет A на месте, то по лемме $\phi \in \Phi_e^\times$ и $\partial = \phi\partial_{\rho,e} |_A = \partial_{\rho,e,\phi}$.

Следствие 3.3

Ядро однородного ЛНД вертикального типа на A конечно порождено.

Доказательство.

Пусть $a_1, \dots, a_r$ – это однородные порождающие A. Можно считать, что $\deg a_i \in \tau_M$ тогда и только тогда, когда $1 \leq i \leq s < r$. Докажем, что $a_1, \dots, a_s$ порождают $\ker \partial$. Действительно, рассмотрим многочлен P, для которого $P(a_1, \dots, a_r) \in \ker \partial$. Так как τ – это грань, то $\sum m_i \in \tau_M$ для $m_i \in \sigma_M^\vee$ влечет $m_i \in \tau$ $\forall i$. Значит все мономы $P(a_1, \dots, a_r)$ содержат только $a_1, \dots, a_s$.

Следствие 3.4

Пусть ∂ – это однородное ЛНД вертикального типа на A. Тогда ∂ полностью определяется образом $g\chi^{m+e} = \partial(f\chi^m) \in A_{m+e}\chi^{m+e}$, где $f\chi^m \in A \setminus \ker \partial$.

Доказательство.

По теореме $\partial = \partial_{\rho,e,\phi}$, где $e = \deg \partial$ и ρ однозначно определяется по e. Вспомним, что $\partial_{\rho,e,\phi}(f\chi^m) = m_0\phi f\chi^{m+e}$, а значит $\phi = \frac{g}{m_0 f} \in K_Y$ тоже однозначно определена.

Когда существует такой $e \in S_\rho$, что $\Phi_e^\times$ непусто ($\dim \Phi_e > 0$)? Оказывается, что тогда и только тогда, когда дивизор $\mathfrak{D}(m)$ является большим для всех целых векторов $m \in \mathrm{relint}(\tau)$.

Следствие 3.5

Два однородных ЛНД вертикального типа $\partial = \partial_{\rho,e,\phi}$ и $\partial' = \partial_{\rho',e',\phi'}$ на A эквивалентны тогда и только тогда, когда $\rho = \rho'$. Более того, существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности однородных ЛНД вертикального типа на A и лучами $\rho \subset \sigma$, для которых $\mathfrak{D}(m)$ является большим для всех $m \in \mathrm{relint}(\tau) \cap M$.

Содержание

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, где A – это конечно порождённая $\boldsymbol{k}$-область. Инвариант Макар-Лиманова определяется следующим образом:

$$\mathrm{ML}(A) = \bigcap_{\partial \in \mathrm{LND}(A)} \ker \partial.$$

Пусть теперь A снабжена эффективной M-градуировкой. Определим

$$\mathrm{ML}_{\mathrm{h}}(A) = \bigcap_{\partial \in \mathrm{LND}_{\mathrm{h}}(A)} \ker \partial \text{ и } \mathrm{ML}_{\mathrm{fib}}(A) = \bigcap_{\partial \in \mathrm{LND}_{\mathrm{fib}}(A)} \ker \partial.$$

Ясно, что

$$\mathrm{ML}(A) \subset \mathrm{ML}_{\mathrm{h}}(A) \subset \mathrm{ML}_{\mathrm{fib}}(A).$$

Пример 4.1

Вернёмся к примеру 1.4. Дифференцирования ∂_x и ∂_y однородны. Так как $\ker \partial_x = \boldsymbol{k}[y]$ и $\ker \partial_y = \boldsymbol{k}[x]$, то $\mathrm{ML_h} = \boldsymbol{k}$. Ясно, что есть только один класс эквивалентности ЛНД вертикального типа. Представителем этого класса является ∂_y, откуда $\mathrm{ML_{fib}}(A) = \boldsymbol{k}[x]$ и $\mathrm{ML_h}(A) \subsetneq \mathrm{ML_{fib}}(A)$.

Содержание

Лемма 5.1

Пусть A – это конечно порождённая двумерная нормальная $\boldsymbol{k}$-область. Если $\mathrm{ML}(A) = \boldsymbol{k}$, то $\mathrm{Frac}\, A$ является чисто трансцендентным расширением $\boldsymbol{k}$.

Теорема 5.2

Пусть $X = \mathrm{Spec}\, A$ – это аффинное многообразие размерности $n \geq 2$. Если $\mathrm{ML}(X) = \boldsymbol{k}$, то $X \simeq_{\mathrm{bir}} Y \times \mathbb{P}^2$ для некоторого многообразия Y. Обратно, в классе бирациональной эквивалентности многообразия $Y \times \mathbb{P}^2$ существует аффинное многообразие X с $\mathrm{ML}(X) = \boldsymbol{k}$.

Доказательство.

Обозначим $K = \operatorname{Frac} A$. Рассмотрим неэквивалентные ЛНД ∂_1 и ∂_2 на A. Пусть $L_i = \operatorname{Frac}(\ker \partial_i) \subset K$, $i = 1, 2$. По лемме 2.1 (4) $L_i \subset K$ – это чисто трансцендентное расширение степени 1.

Положим $L = L_1 \cap L_2$. Заметим, что $\operatorname{trdeg}_L(K) = 2$. Рассмотрим двумерную алгебру $\bar{A} = A \otimes_{\boldsymbol{k}} L$ над L. Так как $\operatorname{Frac} \bar{A} = \operatorname{Frac} A = K$ и $L \subset \ker \partial_i$, то ЛНД ∂_i продолжается до L-ЛНД $\bar{\partial}_i$ следующим образом:

$$\bar{\partial}_i(a \otimes l) = \partial_i(a) \otimes l, \text{ где } a \in A \text{ и } l \in L.$$

Более того, $\ker \bar{\partial}_i = \bar{A} \cap L_i$, значит

$$\ker \bar{\partial}_1 \cap \ker \bar{\partial}_2 = \bar{A} \cap L_1 \cap L_2 = L.$$

Таким образом, инвариант Макар-Лиманова алгебры $\bar{A}$ тривиален. По предыдущей лемме $K = \operatorname{Frac} \bar{A}$ – это чисто трансцендентное расширение L степени 2. Отсюда $X \simeq_{\mathrm{bir}} Y \times \mathbb{P}^2$, где $\boldsymbol{k}(Y) = L$. Обратное утверждение докажем чуть позже.

Пусть, как прежде, N – Это решётка ранга $n \geq 2$. Зафиксируем $p \in \mathrm{relint}(\sigma) \cap M$. Положим $\Delta = p + \sigma$ и $h = h_\Delta$, откуда

$$h(m) = \langle p, m \rangle \ \forall m \in \sigma_M^\vee \setminus \{0\}.$$

Рассмотрим проективное многообразие Y и полуобильный большой $\mathbb{Z}$-дивизор Картье H на Y. Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$, где $\mathfrak{D} = \Delta \cdot H$ – собственный σ-полиэдральный дивизор.
Так как $\mathrm{Frac}\, A = K_Y(M)$, то $\mathrm{Spec}\, A \simeq_{\mathrm{bir}} Y \times \mathbb{P}^n$

Лемма 5.3

Инвариант Макар-Лиманова многообразия X тривиален.

Доказательство.

Рассмотрим множество всех лучей $\{\rho_i\}$ конуса σ и их двойственные грани $\{\tau_i\}$ в $\sigma^\vee$. Так как rH большой для всех $r > 0$, то найдётся $e_i \in S_{\rho_i}$ такой, что $\dim \Phi_{e_i} > 0$. Возьмём ненулевой элемент $\phi_i \in \Phi_{e_i}$.

Рассмотрим ЛНД $\partial_{\rho_i, e_i, \phi_i}$. Так как $\sigma^\vee$ острый, то $\cap_i \tau_i = \{0\}$, значит

$$\bigcap_i \ker \partial_{\rho_i, e_i, \phi_i} \subset A_0 = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \boldsymbol{k}.$$

Отсюда

$$\mathrm{ML}(A) = \mathrm{ML}_{\mathrm{h}}(A) = \mathrm{ML}_{\mathrm{fib}}(A) = \boldsymbol{k}.$$

Содержание

Пусть A – конечно порождённая нормальная область и $K = \mathrm{Frac}\, A$. Определим

$$\mathrm{FML}(A) = \bigcap_{\partial \in \mathrm{LND}(A)} \mathrm{Frac}\,(\ker \partial) \subset K.$$

Если задана M-градуировка на A, то аналогично можно определить $\mathrm{FML_h}$ и $\mathrm{FML_{fib}}$. Заметим, что $\mathrm{ML}(A) \subset \mathrm{FML}(A)$.

Пример 6.1

Пусть $A = \boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n]$ и $K = \boldsymbol{k}(x_1, \ldots, x_n)$. Для частной производной $\partial_i = \partial_{x_i}$, имеем $\mathrm{Frac}\,(\ker \partial_i) = \boldsymbol{k}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$. Отсюда

$$\mathrm{FML}(A) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Frac}\,(\ker \partial_i) = \boldsymbol{k},$$

значит $\mathrm{FML}(A) = \boldsymbol{k}$.

Предложение 6.2

Если A – это конечно порождённая нормальная область, то

$$\mathrm{ML}(A) = \mathrm{FML}(A) \cap A.$$

Доказательство.

Достаточно доказать, что для любого ЛНД ∂ на A

$$\ker \partial = \mathrm{Frac}\,(\ker \partial) \cap A.$$

Включение '$\subset$' очевидно. Обратно, возьмём $a \in \mathrm{Frac}\,(\ker \partial) \cap A$ и $b, c \in \ker \partial$ такие, что $ac = b$. По лемме 2.1 (2) $a \in \ker \partial$.

Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$. Тогда $K = K_Y(M) = \mathrm{Frac}\,(K_Y[M])$ – чисто трансцендентное расширение K_Y степени $\mathrm{rank}\, M$. Рассмотрим однородное ЛНД ∂ вертикального типа на A. По определению, $K_Y \subset \mathrm{Frac}\,(\ker \partial)$, а значит $K_Y \subset \mathrm{FML}_{\mathrm{fib}}(A)$.

Гипотеза 6.3

Пусть X – это аффинное многообразие. Если $\mathrm{FML}(X) = \boldsymbol{k}$, то X рационально.

Эта гипотеза верна для случая $X \simeq_{\mathrm{bir}} C \times \mathbb{P}^n$, где C – кривая.

Лемма 6.4

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ и $X \simeq_{\mathrm{bir}} C \times \mathbb{P}^n$, где C – кривая. Обозначим через L поле рациональных функций на C. Если C не рациональна, то $L \subset \mathrm{FML}(X)$. В частности, если $\mathrm{FML}(X) = \boldsymbol{k}$, то C рациональна.

Эта лемма показывает, что инвариант FML несёт больше информации, чем обычный инвариант ML. Действительно, для гладкой проективной нерациональной кривой Y лемма 5.3 показывает, что $\mathrm{ML}(A[Y, \mathfrak{D}]) = \boldsymbol{k}$, но $\mathrm{FML}(A[Y, \mathfrak{D}]) \supset K_Y$.

Доказательство.

По условию $K = \mathrm{Frac}\, A = L(x_1, \dots, x_n)$ для некоторых $x_1, \dots, x_n \in K$ и L – не рациональное поле. Рассмотрим ЛНД ∂ на A. Докажем, что $L \subset \mathrm{Frac}\,(\ker \partial)$. Действительно, пусть $f, g \in L \setminus \boldsymbol{k}$. Так как $\mathrm{trdeg}_{\boldsymbol{k}}(L) = 1$, то существует многочлен $P \in \boldsymbol{k}[x, y] \setminus \boldsymbol{k}$ такой, что $P(f, g) = 0$. Применим ∂ к $P(f, g)$ и получим

$$\frac{\partial P}{\partial x}(f, g) \cdot \partial(f) + \frac{\partial P}{\partial y}(f, g) \cdot \partial(g) = 0.$$

Так как f и g не константны, то можно считать, что $\frac{\partial P}{\partial x}(f, g) \neq 0$ и $\frac{\partial P}{\partial y}(f, g) \neq 0$. Отсюда $\partial(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial(g) = 0$. Значит, возможны два случая:

$$L \subset \mathrm{Frac}\,(\ker \partial) \text{ или } L \cap \mathrm{Frac}\,(\ker \partial) = \boldsymbol{k}.$$

Доказательство.

Предположим, что $L \cap \mathrm{Frac}\,(\ker \partial) = \boldsymbol{k}$. Тогда, по лемме 2.1 (1) $\mathrm{Frac}\,(\ker \partial) = \boldsymbol{k}(x_1, \ldots, x_n)$, а значит расширение полей $\mathrm{Frac}\,(\ker \partial) \subset K$ не чисто трансцендентно. Это противоречит лемме 2.1 (4). Таким образом, $L \subset \mathrm{Frac}\,(\ker \partial)$.

Следующая теорема доказывает гипотезу в случае размерности не больше, чем 3.

Теорема 6.5

Пусть X – это аффинное многообразие размерности не больше, чем 3. Если $\mathrm{FML}(X) = \boldsymbol{k}$, то X рационально.

Доказательство.

Так как $\mathrm{FML}(X)$ тривиален, то это же верно и для $\mathrm{ML}(X)$. Если $\dim X \leq 2$, то X рационально в силу леммы 5.1. Пусть $\dim X = 3$. Так как $X \simeq_{\mathrm{bir}} C \times \mathbb{P}^2$ для некоторой кривой C, то, как мы уже видели, C рациональна.