

Лекция 6.

Упрб.: пусть $\Psi(x) = x + R_1(x)$, где $\sqrt{x} \ll R_1(x) \ll x$,
и $R_1(x)$ — возрастающая ф-ия. Тогда

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(\frac{R_1(x)}{\ln x} + \sqrt{x}\right).$$

До-во:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{\ln p} = \sum_{n \leq x} \frac{c(n)}{\ln n}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n \leq x} c(n) = \sum_{p \leq x} \ln p = \Psi(x) + \\ &+ O\left(\sum_{p \leq \sqrt{x}} \underbrace{\sum_{k: p^k \leq x} \ln p}_{\approx \ln x}\right) = \Psi(x) + O(\ln x) \end{aligned}$$

используем $\pi(n) \ll \frac{x}{\ln x}$.

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{C(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{C(u)}{u \ln^2 u} du + O(1) = \\ &= \underbrace{\int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} + \frac{x}{\ln x}}_{\text{...}} + \int_2^x \frac{R_1(u)}{u \ln^2 u} du + \frac{R_1(x)}{\ln x} + O(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} + \frac{x}{\ln x} &= \int_2^x u d\left(-\frac{1}{\ln u}\right) + \frac{x}{\ln x} = \\ &= O(1) + \int_2^x \frac{du}{\ln u}. \end{aligned}$$

$$\int_2^x \frac{R_1(u)}{u \ln^2 u} du \ll R_1(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{R_1(u)}{u \ln^2 u} du \ll R_1(\sqrt{x}) + R_1(x) \left(-\frac{1}{\ln u}\right) \Big|_{\sqrt{x}}^x \ll$$

$$\ll R_1(\sqrt{x}) + \frac{R_1(x)}{\ln x} \ll \sqrt{x} + \frac{R_1(x)}{\ln x}.$$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(\frac{R_1(x)}{\ln x} + \sqrt{x}\right).$$

Умб: если $\psi(x) = x + R_1(x)$, где $R_1(x) = O(x^d)$, то
 $\zeta(s) \neq 0$ при $\sigma = \operatorname{Re} s > d$.

Следствие: $d \geq \frac{1}{2}$.

До-во:

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du = s \int_1^{+\infty} \left(u^{-s} + \frac{R_1(u)}{u^{s+1}} \right) du = \\ &= \frac{s}{s-1} + s \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{R_1(u)}{u^{s+1}} du}_{\text{равн. - ая при } \sigma > d.} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{R_1(u)}{u^{s+1}} du}_{\text{равн. - ая при } \sigma > d.} \ll \int_1^{+\infty} \frac{u^d}{u^{1+\sigma}} du \ll \frac{1}{\sigma-d}$$

$$\Rightarrow -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} + \text{равн. при } \sigma > d \Rightarrow$$

$\zeta(s)$ не имеет нулей в области $\sigma > d$.

Метод контурного интегрирования:

ф-ла суммирования Стиррона.

Лемма: а) пусть $c > 0$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1 \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

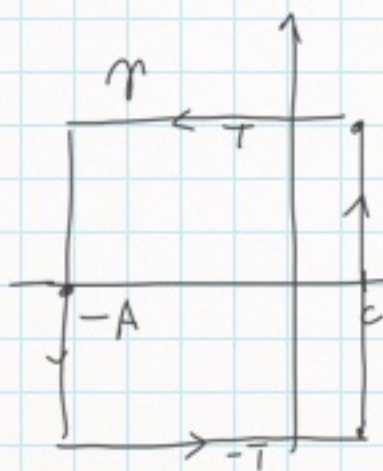
б) пусть $c > 0$, $T > 0$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{x^c}{T|\ln x|}\right) \\ O\left(\frac{x^c}{T|\ln x|}\right) \end{cases}$$

а) — D/3:

D — в 5).

$x > 1$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^s}{s} ds = 1$$

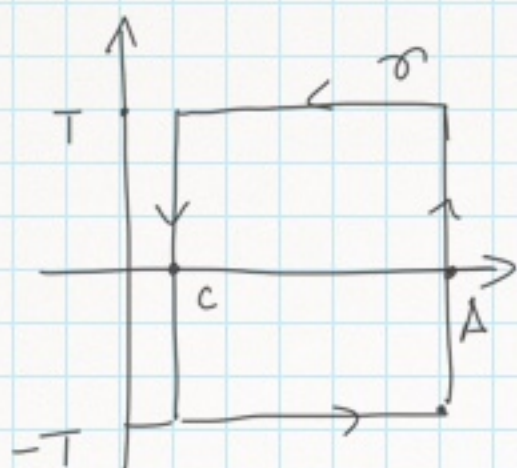
Оценим интегралы по горизонт.-ым отрезкам и отрезку с $\operatorname{Re} s = -A$.

$$\int_{-A}^c \frac{x^{\sigma}}{T} d\sigma = \frac{1}{T \ln x} (x^c - x^{-A}) \leq \frac{x^c}{T \ln x}$$

$$\int_{-T}^T \frac{x^{-A}}{\sqrt{t^2 + A^2}} dt \leq \frac{x^{-A}}{A} \cdot T \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty.$$

$\Rightarrow$ г-на ф-ла из 5) при $x > 1$.

$$0 < x < 1.$$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{x^s}{s} ds = 0.$$

$$\int_c^A \frac{x^\sigma}{T} d\sigma \ll \frac{1}{T|\ln x|} |x^A - x^c| \ll \frac{x^c}{T|\ln x|}$$

$$\int_{-T}^T \frac{x^A}{\sqrt{A^2 + t^2}} dt \ll \frac{x^A}{A} \cdot T \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty.$$

линия δ) γ -на.

Теорема (ф-ла Мермана):

пусть $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c(n)}{n^s}$ — с. -я а.с. -но

при $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0 > 0$ и при $\sigma \rightarrow \sigma_0^+$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|c(n)|}{n^\sigma} \ll \frac{1}{(\sigma - \sigma_0)^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Тогда $\forall c > \sigma_0, x \geq 2, T \geq 2$ верно

$$\sum_{n \leq x} c(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x), \quad \text{где}$$

$$R(x) \ll \frac{x^c}{T} \left(1 + \frac{1}{(c - \sigma_0)^\alpha} \right) + 2^c \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln T \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3}{2}x} |c(n)|.$$

Д-во:

бурем считать, что $x \notin \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds &= \sum_{n=1}^{+\infty} c(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \\
 &= \sum_{|n-x| < 1} c(n) + \underbrace{O\left(\sum_{|n-x| > 1} |c(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{1}{T |\ln \frac{x}{n}|}\right)}_{R_1} + \\
 &+ \underbrace{O\left(\sum_{|n-x| \leq 1} |c(n)| \left| \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \right)}_{R_2}.
 \end{aligned}$$

Ogennem R_2 : $x-1 \leq n \leq x+1$.

$$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{x}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| &\ll \left(\frac{x}{n}\right)^c \int_{-T}^T \frac{dt}{\sqrt{c^2+t^2}} \leq 2^c \left(\int_0^c \frac{dt}{c} + \int_c^T \frac{dt}{t} \right) \ll \\
 &\ll 2^c (1 + |\ln \frac{T}{c}|).
 \end{aligned}$$

Ogennem R_1 :

$$\frac{1}{T} \left(\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} |c(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{1}{|\ln \frac{x}{n}|} + \sum_{|n-x| > \frac{x}{2}} |c(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^c \right) \ll$$

$$\ll \frac{1}{T} \left(\max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3}{2}x} |c(n)| \cdot 2^c \sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \frac{1}{|\ln \frac{x}{n}|} + x^c \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|c(n)|}{n^c} \right) \ll$$

$$\ll \frac{1}{T} \left(2^c \cdot \max_{n \approx x} |c(n)| \cdot x \ln x + x^c \left[\frac{1}{(c-\sigma_0)^2} + 1 \right] \right)$$

$$\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \frac{1}{|\ln \frac{x}{n}|} = \sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \frac{1}{|\ln \frac{n-x}{x} + 1|} \ll \sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \frac{x}{|n-x|} \ll x \ln x.$$

Теорема: а) $\psi(x) = x + O(e^{-c_1 \sqrt{\ln x}})$, $c_1 > 0$.

б) если верно RH $\Rightarrow \psi(x) - x = O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x)$.

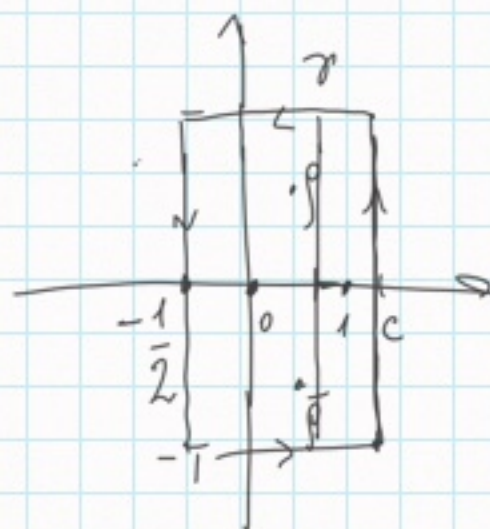
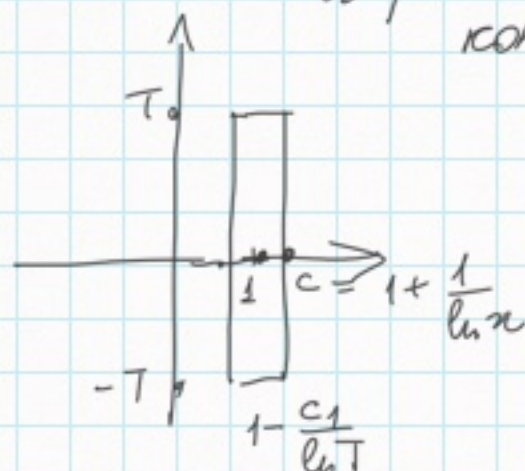
До-во:

$$c = 1 + \frac{1}{\ln x}$$

$$\sum_{n \leq x} \Delta(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T} + \ln T \cdot \ln x\right)$$

$\psi''(x)$

Вариант сдвига
контура.



$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{|\text{Im} \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T} + \ln T \cdot \ln x\right) + R_1 + R_2$$

Хотим оценить $|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}|$ на контуре интегрирования.

$$-1 \leq \sigma \leq 2, \quad s = \sigma + it, \quad t \geq 2$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln t).$$

$$\left| -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \frac{1}{|s-1|} + \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \ln T \ll \frac{1}{|s-1|} + \ln^2 T \ll \ln x + \ln^2 T$$

из выбора $T: |T - \text{Im} \rho| \gg \frac{1}{\ln T}$

Получим более точную оценку $|\frac{S'(s)}{s}|$ на нашей контуре в след-ий раз.

Продолжим g-to th.:

$$R_1 \ll \int_{-\frac{1}{2}}^c (\ln^2 T + \ln x) \cdot \frac{x^\sigma}{T} d\sigma \ll \frac{(\ln^2 T + \ln x)}{T \cdot \ln x} \cdot x$$

$$R_2 \ll \int_0^+ (\ln^2 T + \ln x) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} + t^2}} \ll$$

$$\ll x^{-\frac{1}{2}} (\ln^2 T + \ln x) \ln T$$

$$\Psi(x) - x \ll \frac{x}{T} \left(\ln^2 x + \frac{\ln^2 T}{\ln x} + 1 \right) + \ln x \cdot \ln T +$$

$$+ x^{-\frac{1}{2}} (\ln^2 T + \ln x \ln T) + 1 + \left| \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} \right|.$$

$$\left| \sum_{|\rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq x^{1 - \frac{c_1}{\ln T}} \sum_{k=1}^T \frac{1}{k} \ln k \ll x^{1 - \frac{c_1}{\ln T}} \ln^2 T.$$

th. Барне - Пусане

$$\text{по RH: } \left| \sum_{|\rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq x^{\frac{1}{2}} \ln^2 T.$$

$$\frac{x}{T} \ln^2 x = x^{1 - \frac{c_1}{\ln T}} \ln^2 T \Rightarrow x^{\frac{c_1}{\ln T}} \ln^2 x = T \ln^2 T$$

$$\frac{c_1}{\ln T} \cdot \ln x + 2 \ln \ln x = \ln T + 2 \ln \ln T$$

$$\Downarrow$$

$$\ln T = \sqrt{\ln x} \Rightarrow \Psi(x) - x \ll x^{1 - \frac{c_1}{\sqrt{\ln x}}} \quad \ln x \asymp \ln^2 T$$

$$RH \Rightarrow T \ll \sqrt{x} \Rightarrow \Psi(x) - x \ll x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x.$$

D/3:

25. D-мб, что при $c > 0$

$$a) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$b) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s^{n+1}} ds = \begin{cases} \frac{(\ln x)^n}{n!}, & x > 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

$$b) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s^{n+1}} ds = \begin{cases} \frac{(\ln x)^n}{n!} + O\left(\frac{x^c}{T^{n+1} |\ln x|}\right), & x > 1 \\ O\left(\frac{x^c}{T^{n+1} |\ln x|}\right), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

26. Пусть при $t \geq 2$ известны оценки:

$$\zeta(s) \ll \begin{cases} \ln t, & \sigma \geq 1 \\ t^{1-\sigma} \ln t, & \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ t^{1/2} \ln t, & 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \\ t^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln t, & -\sigma_0 \leq \sigma \leq 0. \end{cases}$$

С помощью ф-лы суммирования Тейлора
найти асимптотическую ф-лу для

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n).$$

Подсказка: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = ?$; братья дают главный член.